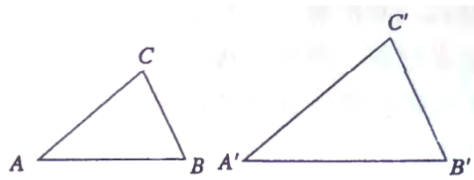
专题31 相似三角形模型

相似三角形的判定方法：

判定定理一：平行于三角形一边的直线和其两边相交（或其两边的延长线相交），所构成的三角形和原三角形相似。

判定定理二：三边成比例的两个三角形相似，即：

若 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}=k$，则 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$



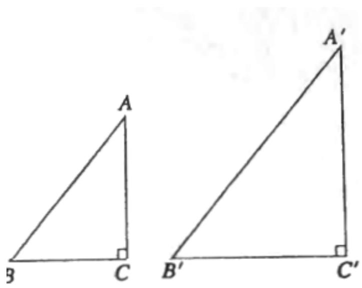
判定定理三：两边成比例并且夹角相等的两个三角形相似。

即：若 $\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k$，且∠C=∠C′　则 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

判定定理四：两个角分别相等的两个三角形相似。

即：若 $\angle C=\angle C'$，$\angle B=\angle B'$，则 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

判定定理五：斜边和直角边成比例的两个直角三角形相似。



即：在 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle A'B'C'$ 中，

若 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=k$ 或 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k$，

则 $Rt\triangle ABC\backsim Rt\triangle A'B'C'$

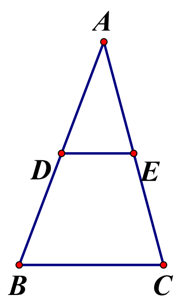
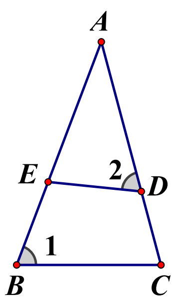
相似三角形的性质：

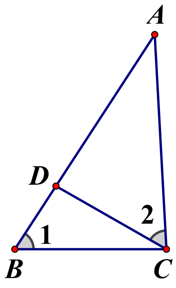
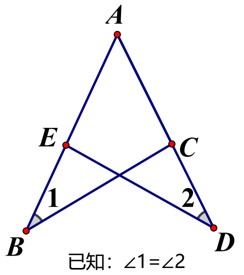
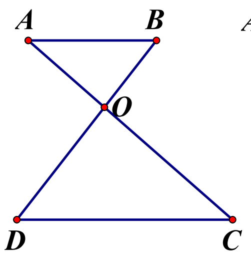
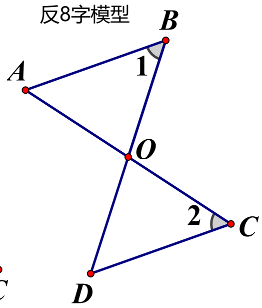
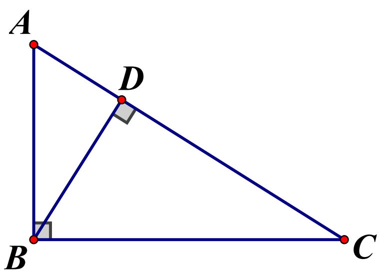
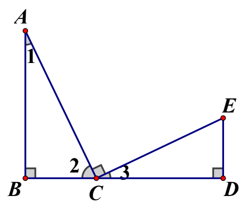
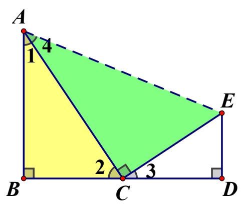
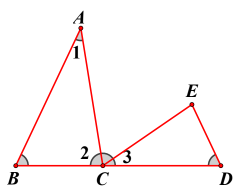
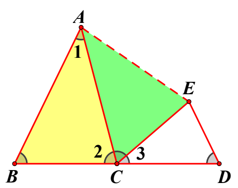
1）相似三角形的对应角相等，对应边的比相等。

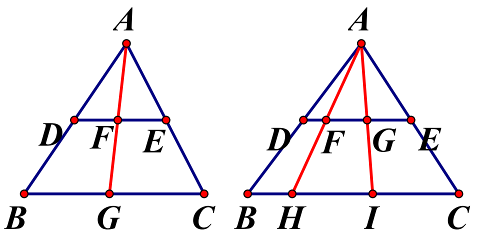
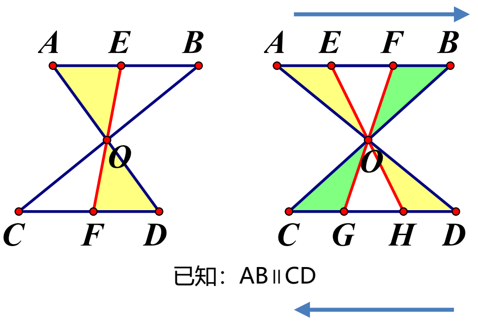
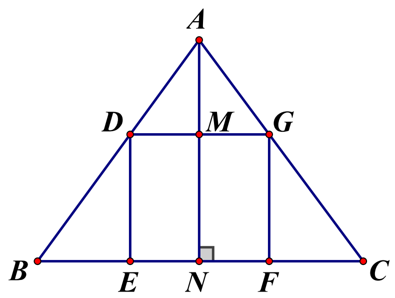
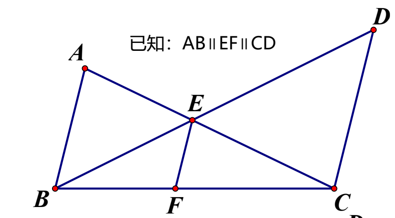
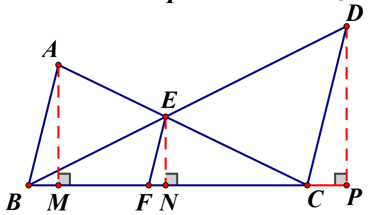
2）相似三角形对应高，对应中线，对应角平分线的比都等于相似比。

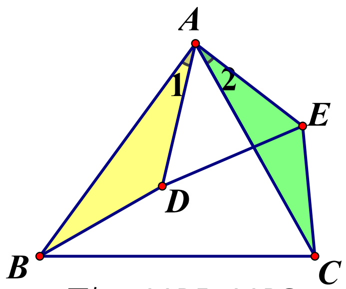
3）相似三角形周长的比等于相似比。

4）相似三角形面积比等于相似比的平方。

模型	图形	结论	证明过程（思路）
A字模型	正A字模型  已知：DE∥BC 反A字模型  已知：∠1=∠2	①ΔADE~ΔABC ②$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$	1) 已知DE∥BC 则∠ADE=∠ABC 而∠A=∠A 所以ΔADE~ΔABC 2) 已知∠1=∠2 ∠A=∠A 所以ΔADE~ΔABC

	共边反A字模型  已知：∠1=∠2 剪刀反A字模型  已知：∠1=∠2	**共边反 A 字模型** ①ΔABC∽ΔACD ②$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{CD}$ ③$AC^2=AB\bullet AD$ 剪刀反 A 字模型 ①ΔABC∽ΔADE ②$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$	证明过程参照按照 2）
8 字模型	正8字模型  已知：AB∥CD 反8字模型  已知：∠1=∠2	正 8 字模型 ①ΔAOB∽ΔCOD ②$\frac{AO}{CO}=\frac{BO}{DO}=\frac{AB}{CD}$ 反 8 字模型 ①ΔAOB∽ΔDOC ②$\frac{AO}{DO}=\frac{BO}{CO}=\frac{AB}{CD}$	3) 已知 AB∥DC 则∠A=∠C 而∠AOB=∠DOC 所以ΔAOB∽ΔCOD 4) 已知∠1=∠2 ∠AOB=∠DOC 所以ΔAOB∽ΔDOC
射影定理	 已知：∠ABC=∠ADB=90°	①ΔABC∽ΔADB∽ΔBDC ②$AB^2=AC\bullet AD$, $BD^2=AD\bullet CD$ $BC^2=AC\bullet CD$ （口诀：公共边的平方=共线边的乘积） ③AB•BC=BD•AC（面积法）	5) 已知∠ABC=∠ADB=90° ∠ABD=∠C ∠A= ∠DBC ∴ΔABC∽ΔADB∽ΔBDC
一线三垂直	  已知：∠B=∠D=∠ACE=90°	①ΔABC∽ΔCDE ②$\frac{AB}{CD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{CE}$ ③当点 C 为 BD 中点时， ΔABC∽ΔCDE∽ΔACE	6) ∵∠B=∠D=∠ACE=90° ∴∠1+∠2=90° ∠2+∠3=90° 则∠1=∠3 由此可得ΔABC∽ΔCDE 7) ∵ ΔABC∽ΔCDE ∴$\frac{AB}{CD}=\frac{AC}{CE}$而点 C 为 BD 中点 则$\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CE}$ 又∵∠B=∠ACE=90° ∴ΔABC∽ΔACE 则ΔABC∽ΔCDE∽ΔACE
一线三等角	  已知：∠B=∠D=∠ACE=α	①ΔABC∽ΔCDE ②$\frac{AB}{CD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{CE}$ ③当点 C 为 BD 中点时， ΔABC∽ΔCDE∽ΔACE	8）∵∠B=∠D=∠ACE=α ∴∠ACD=∠1+∠B=∠1+α 而∠ACD=∠ACE+∠DCE=∠3+α 则∠1=∠3 由此可得ΔABC∽ΔCDE 结论③证明过程参照 7）

线束模型（一）	 已知：DE∥BC	①$\frac{DF}{EF}=\frac{BG}{CG}$ （左图） ②DF:FG:EG = BH:HI:CI（右图）	9）∵DE∥BC ∴ΔADF∽ΔABG，ΔAFE∽ΔAGC ∴$\frac{DF}{BG}=\frac{AF}{AG}$，$\frac{AF}{AG}=\frac{EF}{CG}$ ∴$\frac{DF}{BG}=\frac{EF}{CG}$ 则$\frac{DF}{EF}=\frac{BG}{CG}$ 同理右图结论DF:FG:EG = BH:HI:CI
线束模型（二）	 已知：AB∥CD	①$\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{CF}$（左图） ②AE:EF:BF = DH:HG:CG（右图）	10）∵AB∥CD ∴ΔAOE∽ΔDOF，ΔBOE∽ΔCOF ∴$\frac{AE}{DF}=\frac{OE}{OF}$，$\frac{OE}{OF}=\frac{BE}{CF}$ ∴$\frac{AE}{DF}=\frac{BE}{CF}$ 则$\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{CF}$ 同理右图结论AE:EF:BF = DH:HG:CG
三角形内接矩形	 已知：四边形DEFG为矩形，AN⊥BC	①ΔABC∽ΔADG ②$\frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{DG}{BC}=\frac{AM}{AN}$ ③若四边形 DEFG 为正方形 即$\frac{DG}{BC}=\frac{AM}{AN}$ 若假设 DG=x 则$\frac{x}{BC}=\frac{AN-x}{AN}$ 若已知 BC、AN 长， 即可求出 x 的值	11）∵四边形 DEFG 为矩形 ∴DG∥BC 而 AN⊥BC ∴ΔABC∽ΔADG ∠AMG=∠ANC=90° ∴$\frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{DG}{BC}=\frac{AM}{AN}$
三平行模型	 	①$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EF}$ ②$\frac{1}{S_{\Delta ABC}}+\frac{1}{S_{\Delta BCD}}=\frac{1}{S_{\Delta BEC}}$	12）∵AB∥EF∥CD ∴ΔABC∽ΔEFC，ΔBEF∽ΔBDC ∴$\frac{EF}{AB}=\frac{FC}{BC}$①，$\frac{EF}{CD}=\frac{BF}{BC}$② ①+②得$\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{FC}{BC}+\frac{BF}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$ 两边同除 EF 得，$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EF}$ 13）作 AM⊥BC 于点 M，EN⊥BC 于点 N，DP⊥BC 于点 P 同理可得$\frac{1}{AM}+\frac{1}{DP}=\frac{1}{EN}$ 则$\frac{1}{AM}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}BC}+\frac{1}{DP}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}BC}=\frac{1}{EN}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}BC}$ ∴$\frac{1}{S_{\Delta ABC}}+\frac{1}{S_{\Delta BCD}}=\frac{1}{S_{\Delta BEC}}$

旋转 相似 模型	 已知：ΔADE~ΔABC	①ΔABD~ΔACE	∵ΔADE~ΔABC ∴∠BAC=∠DAE $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 而∠1+∠DAC=∠BAC ∠2+∠DAC=∠DAE ∴∠1=∠2 ∴ΔABD~ΔACE

【总结】

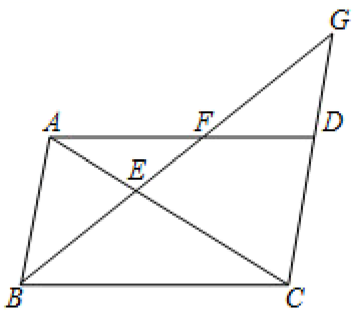
三角形相似就意味着对应线段的比值相等，所以就能建立等式关系。因此，题目中只要看到线段比例已知，就要首先考虑构建三角形相似来利用这个已知条件，为进一步完成解题创下基础。

口诀：线段比例若知道，三角相似解题巧。

【专项练习】

【A 字模型】

1．（四川省遂宁市 2020 年中考数学试题）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 E，交 AD 于点 F，交 CD 的延长线于点 G，若 $AF=2FD$，则 $\frac{BE}{EG}$ 的值为（　　）



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】C

【分析】由 $AF=2DF$，可以假设 $DF=k$，则 $AF=2k$，$AD=3k$，证明 $AB=AF=2k$，$DF=DG=k$，再利用平行线分线段成比例定理即可解决问题．

【详解】解：由 $AF=2DF$，可以假设 $DF=k$，则 $AF=2k$，$AD=3k$，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD/\!/BC$，$AB/\!/CD$，$AB=CD$，

∴$\angle AFB=\angle FBC=\angle DFG$，$\angle ABF=\angle G$，

∵BE 平分 $\angle ABC$，

∴$\angle ABF=\angle CBG$，

∴$\angle ABF=\angle AFB=\angle DFG=\angle G$，

∴$AB=CD=2k$，$DF=DG=k$，

∴ $CG=CD+DG=3k$,

∵ AB// DG,

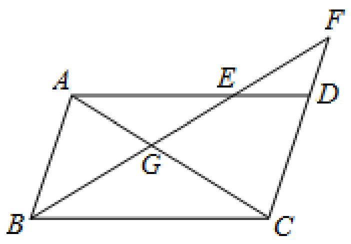
∴ △ABE∽△CGE,

∴ $\frac{BE}{EG}=\frac{AB}{CG}=\frac{2k}{3k}=\frac{2}{3}$,

故选：C.

【点睛】本题考查了比例的性质、相似三角形的判定及性质、等腰三角形的性质、角平分线的性质、平行四边形的性质、平行线分线段成比例定理，熟练掌握性质及定理是解题的关键.

2.（2021年陕西省宝鸡市金台区中考一模数学试题）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 AD 上一点，$AE=2ED$，连接 BE 交 AC 于点 G，延长 BE 交 CD 的延长线于点 F，则 $\frac{BG}{GF}$ 的值为（　　）



A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】A

【分析】先根据平行四边形的性质得到 AB// CD，则可判断△ABG∽△CFG，△ABE∽△DFE，于是根据相似三角形的性质和 $AE=2ED$ 即可得结果.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ AB// CD,

∴ △ABG∽△CFG,

∴ $\frac{BG}{GF}=\frac{AB}{CF}$

∵ △ABE∽△DFE,

∴ $\frac{AE}{DE}=\frac{AB}{DF}$,

∵ $AE=2ED$,

∴ $AB=2DF$,

∴ $\frac{AB}{CF}=\frac{2}{3}$,

∴ $\frac{BG}{GF}=\frac{2}{3}$.

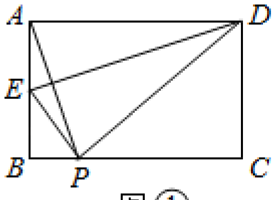
故选：A.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，相似三角形的判定和性质，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定和性质进行解题.

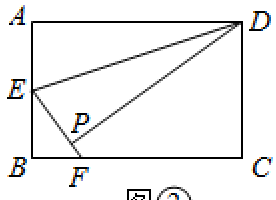
3．（江苏省南通市2020年中考数学试题）矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$AD=12$．将矩形折叠，使点 A 落在点 P 处，折痕为 DE．

（1）如图①，若点 P 恰好在边 BC 上，连接 AP，求 $\dfrac{AP}{DE}$ 的值；

（2）如图②，若 E 是 AB 的中点，EP 的延长线交 BC 于点 F，求 BF 的长．



图①



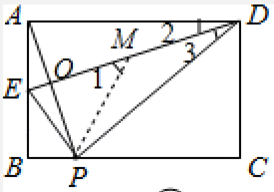
图②

【答案】（1）$\dfrac{2}{3}$；（2）$BF=3$．

【分析】（1）如图①中，取 DE 的中点 M，连接 PM．证明△POM∽△DCP，利用相似三角形的性质求解即可．

（2）如图②中，过点 P 作 GH∥BC 交 AB 于 G，交 CD 于 H．设 EG=x，则 BG=4-x．证明△EGP∽△PHD，推出 $\dfrac{EG}{PH}=\dfrac{PG}{DH}=\dfrac{EP}{PD}=\dfrac{1}{3}$，推出 PG=2EG=3x，DH=AG=4+x，在 Rt△PHD 中，由 $PH^2+DH^2=PD^2$，可得 $(3x)^2+(4+x)^2=12^2$，求出 x，再证明△EGP∽△EBF，利用相似三角形的性质求解即可．

【详解】解：（1）如图①中，取 DE 的中点 M，连接 PM．



图①

∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠BAD＝∠C＝90°，

由翻折可知，AO＝OP，AP⊥DE，∠2＝∠3，∠DAE＝∠DPE＝90°，

在 Rt△EPD 中，∵EM＝MD，

∴PM＝EM＝DM，

∴∠3＝∠MPD，

∴∠1＝∠3+∠MPD＝2∠3，

∵∠ADP＝2∠3，

∴∠1＝∠ADP，

∵AD∥BC，

∴∠ADP＝∠DPC，

∴∠1＝∠DPC，

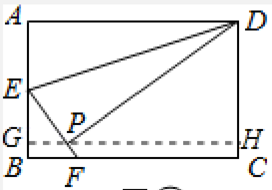
∵∠MOP＝∠C＝90°，

∴△POM∽△DCP，

∴ $\frac{PO}{PM}=\frac{CD}{PD}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，

∴ $\frac{AO}{DE}=\frac{2PO}{2PM}=\frac{2}{3}$.

（2）如图②中，过点 P 作 GH∥BC 交 AB 于 G，交 CD 于 H．则四边形 AGHD 是矩形，设 EG＝x，则 BG＝4﹣x



图②

∵∠A＝∠EPD＝90°，∠EGP＝∠DHP＝90°，

∴∠EPG+∠DPH＝90°，∠DPH+∠PDH＝90°，

∴∠EPG＝∠PDH，

∴△EGP∽△PHD，

∴ $\frac{EG}{PH}=\frac{PG}{DH}=\frac{EP}{PD}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，

∴PG＝2EG＝3x，DH＝AG＝4+x，

在 Rt△PHD 中，∵$PH^2+DH^2=PD^2$，

∴（3x）^{2}+（4+x）^{2}＝12^2，

解得：x＝$\frac{16}{5}$（负值已经舍弃），

∴BG＝4﹣$\frac{16}{5}$＝$\frac{4}{5}$，

在 Rt△EGP 中，GP＝$\sqrt{EP^2-EG^2}=\frac{12}{5}$，

∵GH∥BC，

∴△EGP∽△EBF，

∴ $\frac{EG}{EB}=\frac{GP}{BF}$，

∴ $\frac{\frac{16}{5}}{4}=\frac{\frac{12}{5}}{BF}$，

∴BF＝3．

【点睛】本题考查翻折变换，相似三角形的判定和性质，矩形的性质等知识，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，学会利用参数构建方程解决问题．

4．（2020 年浙江省金华市、丽水市中考数学试题）如图，在△*ABC* 中，*AB*＝$4\sqrt{2}$，∠*B*＝45°，∠*C*＝60°．

（1）求 *BC* 边上的高线长．

（2）点 *E* 为线段 *AB* 的中点，点 *F* 在边 *AC* 上，连结 *EF*，沿 *EF* 将△*AEF* 折叠得到△*PEF*.

①如图 2，当点 P 落在 BC 上时，求 $\angle AEP$ 的度数．

②如图 3，连结 AP，当 $PF\perp AC$ 时，求 AP 的长．

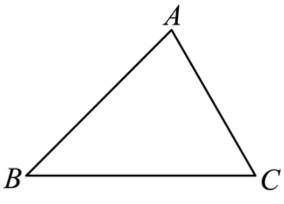


图1

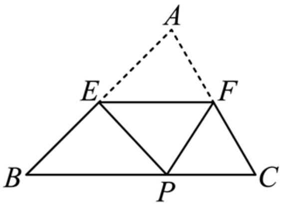


图2

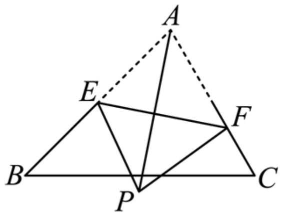


图3

【答案】（1）4;（2）①90°；②$2\sqrt{6}$

【分析】（1）如图 1 中，过点 A 作 AD⊥BC 于 D．解直角三角形求出 AD 即可．

（2）①证明 BE=EP，可得∠EPB=∠B=45°解决问题．

②如图 3 中，由（1）可知：AC=$\frac{AD}{\sin 60^\circ}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，证明△AEF∽△ACB，推出 $\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}$，由此求出 AF 即可解决问题．

【详解】解：（1）如图 1，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，

在 Rt△ABD 中，$AD=AB\cdot\sin 45^\circ=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$=4．

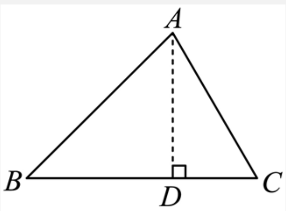


图1

（2）①如图 2，∵△AEF≌△PEF，

∴AE＝EP．

又∵AE＝BE，

∴BE＝EP，

∴∠EPB＝∠B＝45°，

∴∠AEP＝90°．

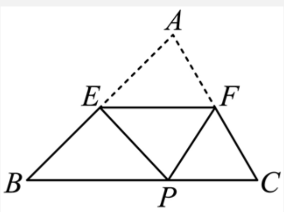


图2

②如图 3，由（1）可知：在 Rt△ADC 中，$AC=\frac{AD}{\sin 60^\circ}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$．

∵$PF\perp AC$，

∴∠PFA＝90°．

∵△AEF≌△PEF，

∴∠*AFE*＝∠*PFE*＝45°，则∠*AFE*＝∠*B*.

又∵∠*EAF*＝∠*CAB*,

∴△*EAF*∽△*CAB*,

∴ $\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}$，即 $\frac{AF}{4\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{8\sqrt{3}}{3}}$，

∴*AF*＝ $2\sqrt{3}$，

在Rt△*AFP*中，*AF*＝*PF*，则*AP*＝ $\sqrt{2}AF=2\sqrt{6}$.

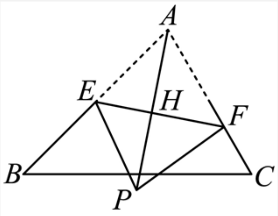
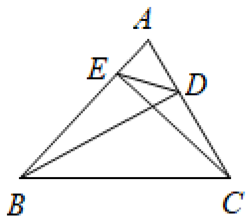


图3

【点睛】本题属于三角形综合题，考查了解直角三角形的应用，翻折变换，全等三角形的性质，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，属于中考常考题型.

5．如图，在$\triangle ABC$中，BD、CE分别是AC、AB边上的高．求证：$\triangle ACB\backsim\triangle AED$．



【答案】见详解

【分析】先证明$\triangle ACE\backsim\triangle ABD$，即有$\frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AB}$，再结合$\angle A=\angle A$，即可证明$\triangle ACB\backsim\triangle AED$.

【详解】∵BD、CE分别是AC、AB边上的高，

∴$\angle AEC=\angle ADB=90°$，

∵$\angle A=\angle A$，

∴$\triangle ACE\backsim\triangle ABD$，

∴$\frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AB}$，

又∵$\angle A=\angle A$，

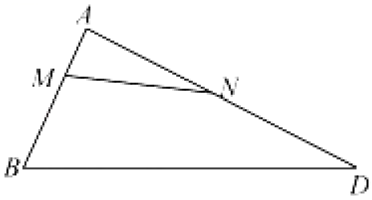
∴$\triangle ACB\backsim\triangle AED$.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定与性质，掌握三角形的判定与性质是解答本题的关键.

6（辽宁省丹东市东港市2021-2022学年九年级上学期期中数学试题）如图，△*ABD*中，∠*A*＝90°，*AB*＝6cm，*AD*＝12cm．某一时刻，动点*M*从点*A*出发沿*AB*方向以1cm/*s*的速度向点*B*匀速运动；同时，动点*N*从点*D*出发沿*DA*方向以2cm/*s*的速度向点*A*匀速运动，运动的时间为*ts*.

（1）求 t 为何值时，△AMN的面积是△ABD面积的$\frac{2}{9}$；

（2）当以点 A，M，N为顶点的三角形与△ABD相似时，求 t 值．



【答案】（1）$t_1=4$，$t_2=2$；（2）$t=3$或$\frac{24}{5}$

【分析】（1）由题意得 $DN=2t$（cm），$AN=$（$12-2t$）cm，$AM=t$cm，根据三角形的面积公式列出方程可求出答案；（2）分两种情况，由相似三角形的判定列出方程可求出 t 的值．

【详解】解：（1）由题意得 $DN=2t$（cm），$AN=$（$12-2t$）cm，$AM=t$cm，

∴△AMN的面积$=\frac{1}{2}AN\bullet AM=\frac{1}{2}\times(12-2t)\times t=6t-t^2$，

∵$\angle A=90°$，$AB=6$cm，$AD=12$cm

∴△ABD的面积为$\frac{1}{2}AB\bullet AD=\frac{1}{2}\times6\times12=36$，

∵△AMN的面积是△ABD面积的$\frac{2}{9}$，

∴$6t-t^2=\frac{2}{9}\times36$，

∴$t^2-6t+8=0$，

解得 $t_1=4$，$t_2=2$，

答：经过 4 秒或 2 秒，△AMN的面积是△ABD面积的$\frac{2}{9}$；

（2）由题意得 $DN=2t$（cm），$AN=$（$12-2t$）cm，$AM=t$cm，

若△AMN∽△ABD，

则有$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AD}$，即$\frac{t}{6}=\frac{12-2t}{12}$，

解得 $t=3$，

若△AMN∽△ADB，

则有$\frac{AM}{AD}=\frac{AN}{AB}$，即$\frac{t}{12}=\frac{12-2t}{6}$，

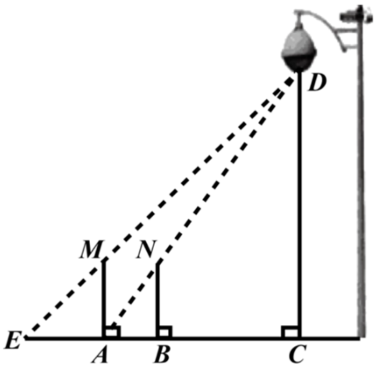
解得 $t=\frac{24}{5}$，

答：当 $t=3$或$\frac{24}{5}$时，以 A、M、N为顶点的三角形与△ABD相似．

【点睛】本题考查了相似三角形的判定，直角三角形的性质和一元二次方程的应用，正确进行分类讨论是解题的关键．

7．一天晚上，李明和张龙利用灯光下的影子长来测量一路灯 D 的高度．如图，当李明走到点 A 处时，张龙测得李

明直立时身高 AM 与影子长 AE 正好相等；接着李明沿 AC 方向继续向前走，走到点 B 处时，李明直立时身高 BN 的影子恰好是线段 AB，并测得 $AB=1.25\text{m}$，已知李明直立时的身高为 1.75m，求路灯的高 CD 的长.（结果精确到 0.1m）.



【答案】路灯的高 CD 的长约为 6.1m

【分析】根据 $AM\perp EC$， $CD\perp EC$， $BN\perp EC$， $EA=MA$ 得到 $MA//CD//BN$，从而得到 $\Delta ABN\backsim\Delta ACD$，利用相似三角形对应边的比相等列出比例式求解即可.

【详解】解：设 CD 长为 x m，

$\because AM\perp EC$， $CD\perp EC$， $BN\perp EC$， $EA=MA$，

$\therefore MA//CD//BN$，

$\therefore EC=CD=x$ m，

$\therefore \Delta ABN\backsim\Delta ACD$，

$\therefore \dfrac{BN}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$， 即 $\dfrac{1.75}{x}=\dfrac{1.25}{x-1.75}$，

解得： $x=6.125\approx 6.1$.

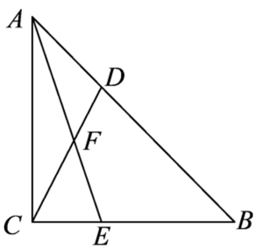
经检验， $x=6.125$ 是原方程的解，且符合题意，

$\therefore$ 路灯高的长 CD 约为 6.1m

【点睛】本题考查了相似三角形的应用，解题的关键是根据已知条件得到平行线，从而证得相似三角形.

【8 字模型】

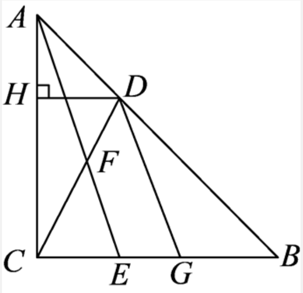
1．如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90°, AC=BC=6$， D 是 AB 上一点，点 E 在 BC 上，连接 CD，AE 交于点 F，若 $\angle CFE=45°, BD=2AD$， 则 $CE=$__________.



【答案】2

【分析】过 D 作 DH 垂直 AC 于 H 点，过 D 作 DG // AE 交 BC 于 G 点，先利用解直角三角形求出 CD 的长，其次利用 $\triangle CDG\backsim\triangle CBD$，求出 CG 的长，得出 BG 的长，最后利用 $\triangle BDG\backsim\triangle BAE$，求出 BE 的长，最后得出答案.

【详解】解：如图：过 D 作 DH 垂直 AC 于 H 点，过 D 作 $DG \parallel AE$ 交 BC 于 G 点，



∵在 Rt△ABC 中，$AC=BC=6$，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=6\sqrt{2}$，

又∵ $BD=2AD$，

∴ $AD=2\sqrt{2}$，

∴在等腰直角三角形 AHD 中，$AH=DH=2$，

∴ $CH=6-2=4$，

在 $Rt\triangle CHD$ 中，$CD=\sqrt{CH^2+DH^2}=2\sqrt{5}$，

∵ $DG \parallel AE$，

∴ $\angle CFE=\angle CDG=45^\circ$，$\angle B=45^\circ$，

∴ $\angle CDG=\angle B$，

又∵ $\angle DCG=\angle BCD$，

∴ $\triangle CDG\backsim\triangle CBD$，

∴ $\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{CG}{CD}$，

∴ $CD^2=CG\cdot CB$，

即 $20=6CG$，

∴ $CG=\dfrac{10}{3}$，

∴ $BG=BC-CG=6-\dfrac{10}{3}=\dfrac{8}{3}$，

又∵ $DG \parallel AE$，

∴ $\triangle BDG\backsim\triangle BAE$，

又∵ $BD=2AD$，

∴ $\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BG}{BE}=\dfrac{2}{3}$，

又 $BG=\dfrac{8}{3}$，

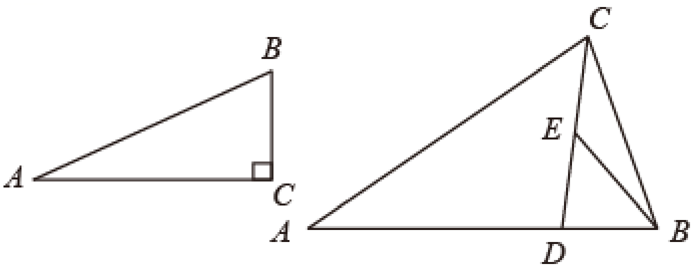
∴ $BE=BG\times\dfrac{3}{2}=4$，

∴ $CE=6-4=2$，

故答案为：2．

【点睛】本题考查勾股定理，等腰直角三角形性质及相似三角形的判定与性质综合，解题关键在于正确做出辅助线，利用相似三角形的性质得出对应边成比例求出答案．

2．（山西省 2021 年中考数学真题）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AB 边上的一点，且 $AD=3BD$，连接 CD 并取 CD 的中点 E，连接 BE，若 $\angle ACD=\angle BED=45°$，且 $CD=6\sqrt{2}$，则 AB 的长为__________．

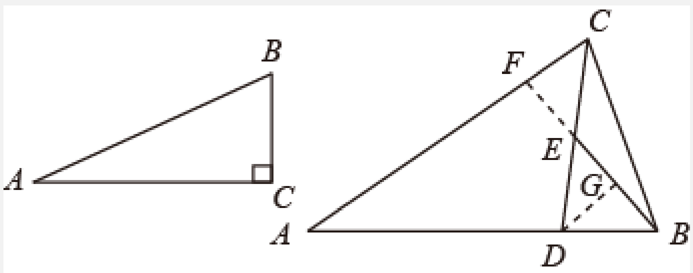


【答案】$4\sqrt{13}$．

【分析】延长 BE 交 AC 于点 F，过 D 点作 $DG\perp BE$ 于点 G，由 $\angle ACD=\angle BED=45°$ 可得此时 $\triangle CEF$ 为等腰直角三角形，E 为 CD 的中点且 $CD=6\sqrt{2}$，则 $CE=DE=3\sqrt{2}$，在等腰 $Rt\triangle CEF$ 中，根据勾股定理求得 CF，EF 长度，由 $BF\perp DG$ 可得 $\triangle EDG\cong\triangle ECF$，即 $EG=EF$，由 $BF\perp AC$，$BF\perp DG$ 可得 $AC\parallel DG$，即 $\triangle BDG\backsim\triangle BAF$，

$\therefore \dfrac{BG}{FG}=\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{1}{3}$，求得，$\therefore AB=4BD=4\sqrt{13}$．

【详解】如下图，延长 BE 交 AC 于点 F，过 D 点作 $DG\perp BE$ 于点 G，



$\because \angle ACD=\angle BED=45°$，$\angle BED=\angle CEF=45°$，

$\therefore \angle EFC=90$，$BF\perp AC$，$\triangle CEF$ 为等腰 $Rt\triangle CEF$．

由题意可得 E 为 CD 的中点，且 $CD=6\sqrt{2}$，

$\therefore CE=DE=3\sqrt{2}$，

在等腰 $Rt\triangle CEF$ 中，$CE=3\sqrt{2}$，

$\therefore CF=EF=3$，

又$\because BF\perp DG$，

在$\triangle ECF$和$\triangle EDG$中，

$$\begin{cases}\angle CFE=\angle DGE=90° \\ \angle CEF=\angle DEG \\ CE=DE\end{cases}$$

$\therefore \triangle EDG \cong \triangle ECF$（AAS）

$\therefore EF = EG = 3$，

$\because BF \perp AC$，$BF \perp DG$，

$\therefore AC // DG$，

$\therefore \frac{BG}{FG} = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{3}$

$FG = EF + EG = 6$，

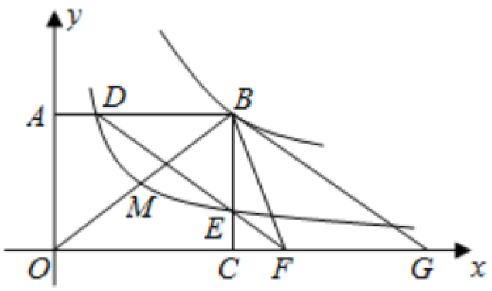
$\therefore BG = 2$，$BD = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$，

$\therefore AB = 4BD = 4\sqrt{13}$．

故答案为：$4\sqrt{13}$．

【点睛】本题考查了等腰直角三角形的性质，勾股定理求对应边的长度，全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定，构造合适的相似三角形，综合运用以上性质是解题的关键．

3．（广东省2020年中考数学试题）如图，点B是反比例函数$y = \frac{8}{x}$（$x > 0$）图象上一点，过点B分别向坐标轴作垂线，垂足为A，C，反比例函数$y = \frac{k}{x}$（$x > 0$）的图象经过OB的中点M，与AB，BC分别相交于点D，E．连接DE并延长交x轴于点F，点G与点O关于点C对称，连接BF，BG．



（1）填空：$k =$__________；

（2）求ΔBDF的面积；

（3）求证：四边形$BDFG$为平行四边形．

【答案】（1）2　　（2）3　　（3）见解析

【分析】（1）根据题意设点B的坐标为（x，$\frac{8}{x}$），得出点M的坐标为（$\frac{x}{2}$，$\frac{4}{x}$），代入反比例函数$y = \frac{k}{x}$（$x > 0$），即可得出k；

（2）连接OD，根据反比例函数系数k的性质可得$S_{\Delta AOD} = \frac{|k|}{2} = 1$，$S_{\Delta AOB} = \frac{|8|}{2} = 4$，可得$S_{\Delta BOD} = 4 - 1 = 3$，根据$OF // AB$，可得点$F$到$AB$的距离等于点$O$到$AB$距离，由此可得出答案；

（3）设$B(x_B, y_B)$，$D(x_D, y_D)$，可得$x_B \cdot y_B = 8$，$x_D \cdot y_D = 2$，根据$y_B = y_D$，可得$x_B = 4x_D$，同理$y_B = 4y_E$，可得$\frac{BE}{EC} = \frac{3}{1}$，$\frac{BD}{AB} = \frac{3}{4}$，证明$\Delta EBD \backsim \Delta ECF$，可得$\frac{CF}{BD} = \frac{CE}{BE} = \frac{1}{3}$，根据$\frac{OC}{BD} = \frac{AB}{BD} = \frac{4}{3}$，得出$\frac{OC}{CF} = \frac{4}{1}$，根据$O$，$G$关于$C$对称，

可得$OC=CG$，$CG=4CF$，$FG=3CF$，可得$BD=FG$，再根据$BD//FG$，即可证明$BDFG$是平行四边形.

【详解】解：(1)∵点 B 在$y=\frac{8}{x}$上，

∴设点 B 的坐标为（x，$\frac{8}{x}$），

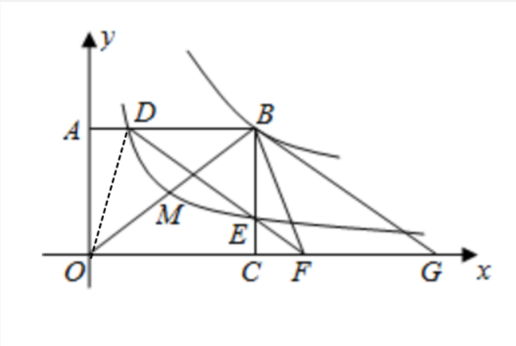
∴OB 中点 M 的坐标为（$\frac{x}{2}$，$\frac{4}{x}$），

∵点 M 在反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$x>0$），

∴k=$\frac{x}{2}$•$\frac{4}{x}$=2，

故答案为：2；

（2）连接OD，则$S_{\Delta AOD}=\frac{|k|}{2}=1$，



，

∵$S_{\Delta AOB}=\frac{|8|}{2}=4$，

∴$S_{\Delta BOD}=4-1=3$，

∵$OF//AB$，

∴点F到AB的距离等于点O到AB距离，

∴$S_{\Delta BDF}=S_{\Delta BDO}=3$；

（3）设$B(x_B,y_B)$，$D(x_D,y_D)$，

$x_B\cdot y_B=8$，$x_D\cdot y_D=2$，

又∵$y_B=y_D$，

∴$x_B=4x_D$，

同理$y_B=4y_E$，

∴$\frac{BE}{EC}=\frac{3}{1}$，$\frac{BD}{AB}=\frac{3}{4}$，

∵$AB//BC$，

∴$\Delta EBD\backsim\Delta ECF$，

∴$\frac{CF}{BD}=\frac{CE}{BE}=\frac{1}{3}$，

$\because \dfrac{OC}{BD}=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{4}{3}$,

$\therefore \dfrac{OC}{CF}=\dfrac{4}{1}$,

$\therefore O$， G 关于 C 对称，

$\therefore OC=CG$，

$\therefore CG=4CF$，

$\therefore FG=CG-CF=4OF-CF=3CF$，

又$\because BD=3CF$，

$\therefore BD=FG$，

又$\because BD//FG$，

$\therefore BDFG$ 是平行四边形.

【点睛】本题考查了反比例函数系数的性质，相似三角形的判定和性质，平行四边形的判定，平行线的性质，灵活运用知识点是解题关键.

4.（安徽省 2020 年中考数学试题）如图 1．已知四边形 $ABCD$ 是矩形．点 E 在 BA 的延长线上． $AE=AD.EC$ 与 BD 相交于点 G，与 AD 相交于点 $F,AF=AB.$

(1) 求证：$BD\perp EC$；

(2) 若 $AB=1$，求 AE 的长；

(3) 如图 2，连接 AG，求证：$EG-DG=\sqrt{2}AG$．

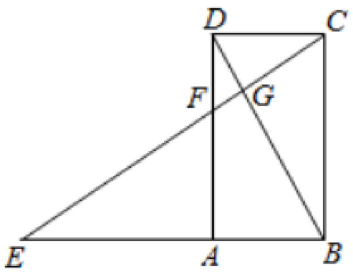


图 1

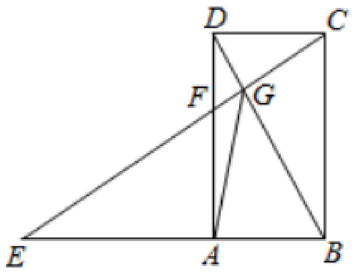


图 2

【答案】(1）见解析；(2）$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$；(3）见解析

【分析】(1）由矩形的形及已知证得△EAF≌△DAB，则有∠E=∠ADB，进而证得∠EGB=90° 即可证得结论；

(2）设 AE=x，利用矩形性质知 AF∥BC，则有 $\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{AF}{BC}$，进而得到 x 的方程，解之即可；

(3）在 EF 上截取 EH=DG，进而证明△EHA≌△DGA，得到∠EAH=∠DAG，AH=AG，则证得△HAG 为等腰直角三角形，即可得证结论.

【详解】(1）∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠BAD=∠EAD=90°，AO=BC，AD∥BC，

在△EAF 和△DAB，

$$\begin{cases}AE=AD\\ \angle EAF=\angle DAB\\ AF=AB\end{cases},$$

∴△EAF≌△DAB(SAS)，

∴∠E=∠BDA，

∵∠BDA+∠ABD=90°，

∴∠E+∠ABD=90°，

∴∠EGB=90°，

∴BG⊥EC；

（2）设 AE=x，则 EB=1+x，BC=AD=AE=x，

∵AF∥BC，∠E=∠E，

∴△EAF∽△EBC，

∴$\frac{EA}{EB}=\frac{AF}{BC}$，又 AF=AB=1，

∴$\frac{x}{1+x}=\frac{1}{x}$即$x^2-x-1=0$，

解得：$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去）

即 AE=$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；

（3）在 EG 上截取 EH=DG，连接 AH，

在△EAH 和△DAG，

$$\begin{cases}AE=AD\\ \angle HEA=\angle GDA\\ EH=DG\end{cases},$$

∴△EAH≌△DAG(SAS)，

∴∠EAH=∠DAG，AH=AG，

∵∠EAH+∠DAH=90°，

∴∠DAG+∠DAH=90°，

∴∠HAG=90°，

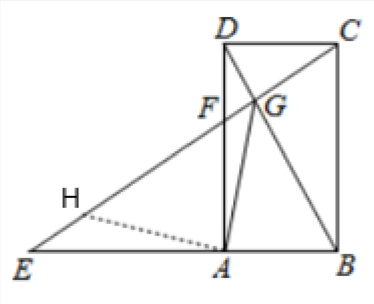
∴△GAH 是等腰直角三角形，

∴$AH^2+AG^2=GH^2$即$2AG^2=GH^2$，

∴GH=$\sqrt{2}$AG，

∵GH=EG-EH=EG-DG，

∴ $EG-DG=\sqrt{2}AG$.



【点睛】本题主要考查了矩形的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、直角定义、相似三角形的判定与性质、解一元二次方程等知识，涉及知识面广，解答的关键是认真审题，提取相关信息，利用截长补短等解题方法确定解题思路，进而推理、探究、发现和计算.

5.（辽宁省鞍山市2021年中考真题数学试卷）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha(0°<\alpha<180°)$，过点$A$作射线$AM$交射线$BC$于点$D$，将$AM$绕点$A$逆时针旋转$\alpha$得到$AN$，过点$C$作$CF\parallel AM$交直线$AN$于点$F$，在$AM$上取点$E$，使$\angle AEB=\angle ACB$.

（1）当AM与线段BC相交时，

①如图1，当$\alpha=60°$时，线段AE，CE和CF之间的数量关系为_____.

②如图2，当$\alpha=90°$时，写出线段AE，CE和CF之间的数量关系，并说明理由.

（2）当$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，AB=5时，若$\triangle CDE$是直角三角形，直接写出AF的长.

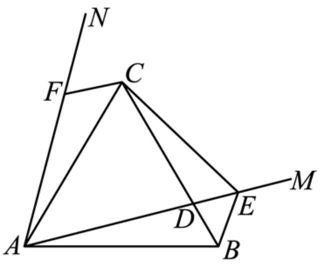


图1

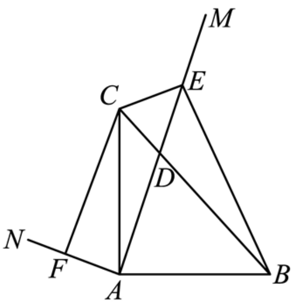
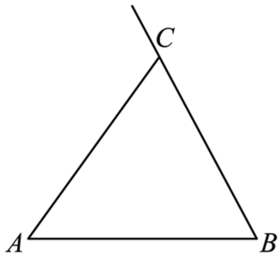


图2



备用图

【答案】（1）①AE=$CF+CE$；②$EC=\sqrt{2}(AE-CF)$，理由见解析；（2）$\frac{5\sqrt{5}}{4}$或$\frac{15}{4}$

【分析】（1）①结论：AE=$CF+CE$．如图1中，作$CT\parallel AF$交AM于T．想办法证明AT=CF，ET=CE，可得结论.

②结论：EC=$\sqrt{2}(AE-CF)$．过点C作$CQ\perp AE$于Q．想办法证明CF=AQ，CE=$\sqrt{2}EQ$，可得结论.

（2）分两种情形：如图3－1中，当$\angle CDE$=90°时，过点B作$BJ\perp AC$于J，过点F作$FK\perp AE$于K．利用勾股定理以及面积法求出CD，再证明FK=CD，可得结论．如图3－2中，当$\angle ECD$=90°时，$\angle DAB$=90°，解直角三角形求出AK，可得结论.

【详解】解：（1）①结论：AE=$CF+CE$.

理由：如图 1 中，作 $CT // AF$ 交 AM 于 T.

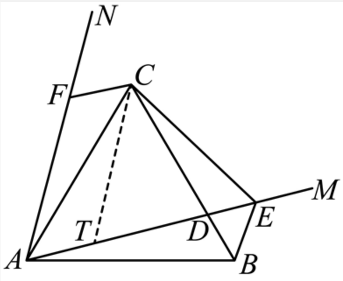


图1

Q $AB=AC$，$\angle BAC=60^\circ$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore CA=CB$，$\angle ACB=60^\circ$，

$\because AF // CT$，$CF // AT$，

$\therefore$ 四边形 $AFCT$ 是平行四边形，

$\therefore CF=AT$，

$\because \angle ADC=\angle BDE$，$\angle DEB=\angle ACD$，

$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle BED$，

$\therefore \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CD}{ED}$，

$\therefore \dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BD}{ED}$，

$\because \angle ADB=\angle CDE$，

$\therefore \triangle ADB \backsim \triangle CDE$，

$\therefore \angle ABD=\angle CED=60^\circ$，

$\because CT // AF$，

$\therefore \angle CTE=\angle FAE=60^\circ$，

$\therefore \triangle CTE$ 是等边三角形，

$\therefore EC=ET$，

$\therefore AE=AT+ET=CF+CE$.

故答案为：$AE=CF+CE$.

②如图 2 中，结论：$EC=\sqrt{2}(AE-CF)$.

理由：过点 C 作 $CQ \perp AE$ 于 Q.

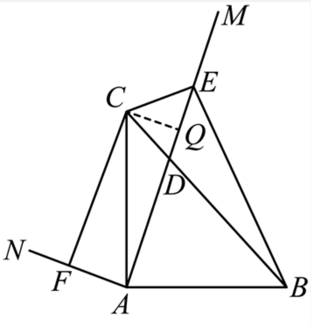


图2

$\because CF//AM$，

$\therefore \angle CFA+\angle MAN=180°$，

$\because \angle MAN=90°$，

$\therefore \angle CFA=\angle FAQ=90°$，

$\because \angle CQA=90°$，

$\therefore$ 四边形 $AFCQ$ 是矩形，

$\therefore CF=AQ$，

$\because \angle ADC=\angle BDE$， $\angle DEB=\angle ACD$，

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle BED$，

$\therefore \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CD}{ED}$，

$\therefore \dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BD}{ED}$，

$\because \angle ADB=\angle CDE$，

$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle CDE$，

$\therefore \angle ABD=\angle CED=45°$，

$\because \angle CQE=90°$，

$\therefore CE=\sqrt{2}EQ$，

$\therefore AE-CF=AE-AQ=EQ$，

$\therefore EC=\sqrt{2}(AE-CF)$．

（2）如图 3－1 中，当 $\angle CDE=90°$ 时，过点 B 作 $BJ\perp AC$ 于 J，过点 F 作 $FK\perp AE$ 于 K.

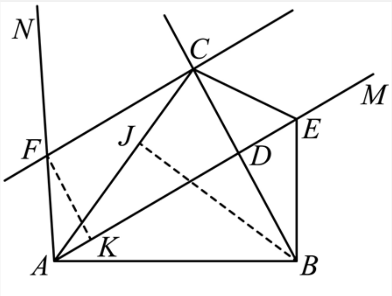


图3-1

在 Rt△ABJ 中，$\tan\angle BAJ=\frac{BJ}{AJ}=\frac{4}{3}$， $AB=5$，

$\therefore AJ=3$， $BJ=4$，

$\because AC=AB=5$，

$\therefore CJ=AC-AJ=5-3=2$，

$\therefore BC=\sqrt{BJ^2+CJ^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

$\because \frac{1}{2}AC\cdot BJ=\frac{1}{2}BC\cdot AD$，

$\therefore AD=\frac{5\times 4}{2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$，

$\therefore CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$，

$\because FK\perp AD$，

$\therefore \angle CDE=\angle FKD=90^\circ$，

$\therefore CD\parallel FK$，

$\because CF\parallel DK$，

$\therefore$ 四边形 $CDKF$ 是平行四边形，

$\because \angle FKD=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $CDKF$ 是矩形，

$\therefore FK=CD=\sqrt{5}$，

$\because \tan\angle FAK=\tan\angle CAB=\frac{4}{3}$，

$\therefore \frac{FK}{AK}=\frac{4}{3}$，

$\therefore AK=\frac{3}{4}\sqrt{5}$，

$\therefore AF=\sqrt{AK^2+FK^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$．

如图 3－2 中，当 $\angle ECD=90^\circ$ 时，同理可得：

$\angle DAB=\angle EAC+\angle CAB=\angle EBC+\angle CEB=90^\circ$，

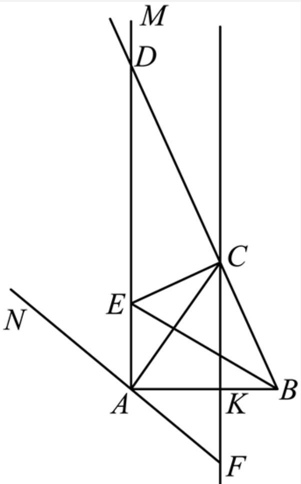


图3-2

$\because CF//AM$，

$\therefore \angle AKF=\angle DAB=90°$，

在 Rt△ACK 中，$\tan\angle CAK=\dfrac{CK}{AK}=\dfrac{4}{3}$，$AC=5$，

$\therefore CK=4$，$AK=3$，

$\because \angle MAN=\angle CAB$，

$\therefore \angle CAN=\angle DAB=90°$，

$\therefore \angle CAB+\angle BAF=90°$，$\angle BAF+\angle AFK=90°$，

$\therefore \angle AFK=\angle CAB$，

$\therefore \tan\angle AFK=\dfrac{AK}{FK}=\dfrac{4}{3}$，

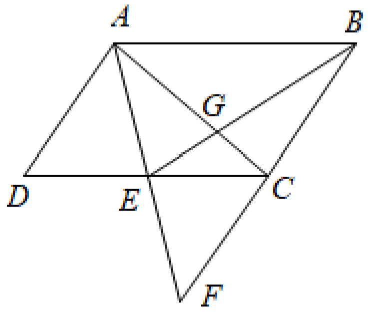
$\therefore FK=\dfrac{9}{4}$，

$\therefore AF=\sqrt{AK^2+KF^2}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{9}{4}\right)^2}=\dfrac{15}{4}$．

综上所述，满足条件的 AF 的值为$\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$或$\dfrac{15}{4}$．

【点睛】此题是几何变换综合题．考查了等边三角形的判定及性质，平行四边形的判定及性质，相似三角形的判定及性质，勾股定理，锐角三角函数，此题是一道几何综合题，掌握各知识点并掌握推理能力是解题的关键．

6．（四川省广元市 2021 年中考数学试题）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 DC 边的中点，连接 AE，若 AE 的延长线和 BC 的延长线相交于点 F.



（1）求证：$BC = CF$；

（2）连接 AC 和 BE 相交于点为 G，若$\triangle GEC$的面积为 2，求平行四边形 $ABCD$ 的面积.

【答案】（1）证明见解析；（2）24.

【分析】（1）根据 E 是边 DC 的中点，可以得到 $DE = CE$，再根据四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可以得到 $\angle ADE = \angle ECF$，再根据 $\angle AED = \angle CEF$，即可得到$\triangle ADE \cong \triangle ECF$，则答案可证；

（2）先证明$\triangle CEG \sim \triangle ABG$，根据相似三角形的性质得出 $S_{\triangle ABG} = 8$，$\frac{AG}{GC} = \frac{AB}{CE} = \frac{1}{2}$，进而得出 $S_{\triangle BGC} = 4$，由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABG} + S_{\triangle BCG}$ 得 $S_{\triangle ABC} = 12$，则答案可解.

【详解】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD // BC$，$AD = BC$，

∴ $\angle ADE = \angle ECF$，

∵点 E 为 DC 的中点，

∴ $DE = CE$，

在$\vee ADE$ 和$\triangle ECF$ 中

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle ECF \\ DE = CE \\ \angle AED = \angle CEF \end{cases}$$

∴ $\triangle ADE \cong \triangle ECF(ASA)$，

∴ $AD = CF$，

∴ $BC = CF$；

（2）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 为 DC 的中点，

∴ $AB // DC$，$AB = 2EC$，

∴ $\angle GEC = \angle ABG$，$\angle GCE = \angle GAB$，

∴ $\triangle CEG \sim \triangle ABG$，

∵$\triangle GEC$ 的面积为 2，

∴ $\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle CEG}} = \left(\frac{AB}{CE}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$，即 $S_{\triangle ABG} = 4S_{\triangle CEG} = 4 \times 2 = 8$，

$\because \triangle CEG \sim \triangle ABG$

$\therefore \dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AB}{CE}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore S_{\triangle BGC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABG}=\dfrac{1}{2}\times 8=4$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABG}+S_{\triangle BCG}=8+4=12$,

$\therefore S_{\square ABCD}=2S_{\triangle ABC}=2\times 12=24$.

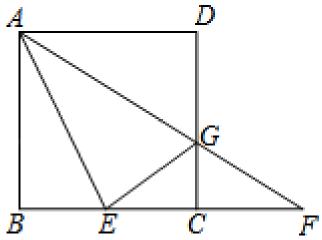
【点睛】本题考查平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定和性质，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

【母子型】(含射影定理)

1.(安徽省阜阳市阜阳实验中学2021-2022学年九年级上学期期中数学试题)如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 边上，连接 AE，$\angle DAE$ 的平分线 AG 与 CD 边交于点 G，与 BC 的延长线交于点 F. 设 $\dfrac{CE}{EB}=\lambda$（$\lambda>0$）.

(1)若 $AB=2$，$\lambda=1$，求线段 CF 的长为________；

(2)连接 EG，若 $EG\perp AF$，则 λ 的值为_______.



【答案】 $\sqrt{5}-1$ $\dfrac{1}{3}$

【分析】(1)根据 $AB=2$，$\lambda=1$，可以得到 BE、CE 的长，然后根据正方形的性质，可以得到 AE 的长，再根据平行线的性质和角平分线的性质，可以得到 EF 的长，从而可以得到线段 CF 的长；

(2)证明△ADG≌△FGC，得出点 G 为 CD 边的中点，根据三角形相似，可以得到 CE 和 EB 的比值，从而可以得到 λ 的值.

【详解】解：(1)∵在正方形 $ABCD$ 中，$AD// BC$，

∴$\angle DAG=\angle F$，

又∵AG 平分$\angle DAE$，

∴$\angle DAG=\angle EAG$，

∴$\angle EAG=\angle F$，

∴$EA=EF$，

∵$AB=2$，$\angle B=90°$，点 E 为 BC 的中点，

∴$BE=EC=1$，

∴$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{5}$，

∴$EF=\sqrt{5}$，

∴$CF=EF-EC=\sqrt{5}-1$；

故答案为：$\sqrt{5}-1$；

（2）证明：∵$EA=EF$，$EG\perp AF$，

∴$AG=FG$，

在△ADG和△FCG中

$$\begin{cases}\angle D=\angle GCF\\ \angle AGD=\angle FGC\\ AG=FG\end{cases},$$

∴△$ADG\cong$△FCG（AAS），

∴$DG=CG$，

设$CD=2a$，则$CG=a$，

$CF=DA=2a$，

∵$EG\perp AF$，$\angle GCF=90°$，

∴$\angle EGC+\angle CGF=90°$，$\angle F+\angle CGF=90°$，$\angle ECG=\angle GCF=90°$，

∴$\angle EGC=\angle F$，

∴△EGC∽△GFC，

∴$\dfrac{EC}{GC}=\dfrac{GC}{FC}$，

∵$GC=a$，$FC=2a$，

∴$\dfrac{GC}{FC}=\dfrac{1}{2}$，

∴$\dfrac{EC}{GC}=\dfrac{1}{2}$，

∴$EC=\frac{1}{2}a$，$BE=BC-EC=2a-\frac{1}{2}a=\dfrac{3}{2}a$，

∴$\lambda=\dfrac{CE}{EB}=\dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}a}=\dfrac{1}{3}$；

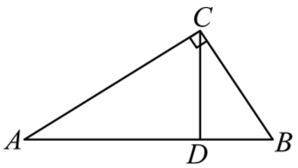
故答案为：$\dfrac{1}{3}$．

【点睛】本题考查正方形的性质、相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理，解答本题的关键是明确题意，熟练运用相关性质进行推理解答．

2．（江苏省南京市联合体2021-2022学年九年级上学期期末数学试题）如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，点D在AB上，且$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$．

（1）求证 △ACD∽△ABC;

（2）若$AD=3$，$BD=2$，求CD的长．



【答案】（1）见解析；（2）$\sqrt{6}$

【分析】（1）根据相似三角形的判定两边成比例且夹角相等的两个三角形相似，即可得出$\triangle ACD\sim\triangle ABC$

（2）由$\triangle ACD\sim\triangle ABC$得$\angle ADC=\angle ACB=90°$，$\angle ACD=\angle B$，推出$\triangle ACD\sim\triangle CBD$，由相似三角形的性质得

$\frac{CD}{AD}=\frac{BD}{CD}$，即可求出$CD$的长．

【详解】（1）∵$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$，　$\angle A=\angle A$，

∴$\triangle ACD\sim\triangle ABC$；

（2）∵$\triangle ACD\sim\triangle ABC$，

∴$\angle ADC=\angle ACB=90°$，$\angle ACD=\angle B$，

∴$\angle CDB=180°-90°=90°=\angle ACD$，

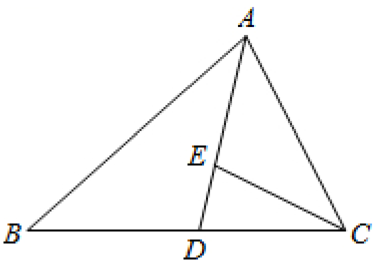
∴$\triangle ACD\sim\triangle CBD$，

∴$\frac{CD}{AD}=\frac{BD}{CD}$，即$CD^2=AD\cdot BD=3\times2=6$，

∴$CD=\sqrt{6}$．

【点睛】本题考查相似三角形的判定与性质，掌握相似三角形的判定定理与性质是解题的关键．

3．（上海市金山初级中学2021-2022学年九年级上学期第一次月考数学试题）如图，在△ABC中，D是BC上的点，E是AD上一点，且$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{CE}$，$\angle BAD=\angle ECA$.



（1）求证：$AC^2=BC\cdot CD$;

（2）若AD是△ABC的中线，求$\frac{CE}{AC}$的值．

【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】（1）首先利用相似三角形的判定得出$\triangle BAD\backsim\triangle ACE$，得$\angle B=\angle EAC$，进而求出$\triangle ABC\backsim\triangle DAC$，再利用相似三角形的性质得出答案即可；

（2）由$\triangle BAD\backsim\triangle ACE$可证$\angle CDE=\angle CED$，进而得出$CD=CE$，再由（1）可证$AC=\sqrt{2}CD$，由此即可得出线段之间关系．

【详解】（1）证明：∵$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{CE}$，$\angle BAD=\angle ECA$，

$\therefore \Delta BAD \backsim \Delta ACE$，

$\therefore \angle B = \angle EAC$，

$\because \angle ACB = \angle DCA$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DAC$，

$\therefore \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{BC}{AC}$，

$\therefore AC^2 = BC \bullet CD$．

（2）解：$\because \vartriangle BAD \backsim \vartriangle ACE$，

$\therefore \angle BDA = \angle AEC$，

$\therefore \angle CDE = \angle CED$，

$\therefore CD = CE$，

$\because$ AD是$\triangle ABC$的中线，

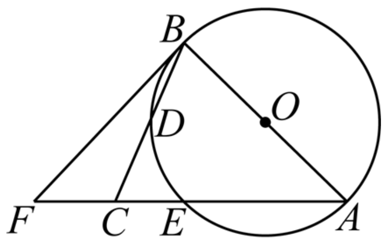
$\therefore BC = 2BD = 2CD$，

$\therefore AC^2 = BC \bullet CD = 2CD^2$，即：$AC = \sqrt{2}CD$，

$\therefore \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{CD}{\sqrt{2}CD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

【点睛】此题主要考查了相似三角形的判定与性质以及重心的性质等知识，根据已知得出$\vartriangle BAD \backsim \vartriangle ACE$是解题关键．

4（辽宁省葫芦岛市连山区2020-2021学年九年级上学期期末数学试题）如图：ΔABC中，$AB = AC$，以AB为直径作$\odot O$交BC于点D，交AC于点E，点F在AC的延长线上，$\angle CBF = \dfrac{1}{2}\angle BAC$．



（1）求证：直线BF是$\odot O$的切线；

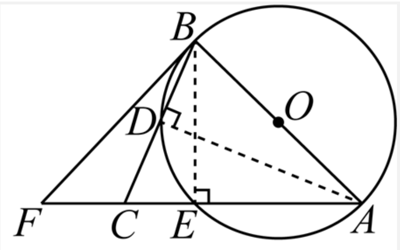
（2）若$FC = 2$，$BF = 6$，求CE的长．

【答案】（1）见解析；（2）1.6

【分析】（1）连接AD，根据直角所对圆周角是直角可得∠BAD与ABD的和是90°，再根据等腰三角形的性质可得∠BAD是∠BAC的一半，结合已知条件即可得到结论；

（2）连接BE，设AC=m，在Rt△ABF中由勾股定理即可得到AB和AC的长，再证$\Delta ABE \sim \Delta AFB$，得到AE的长，即可得到CE的长；

【详解】（1）证明：连接AD，



∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ADB = 90°$，

∴ $\angle BAD + \angle ABD = 90°$，

∵ $AB = AC$，

∴ $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC$，

∵ $\angle CBF = \frac{1}{2}\angle BAC$，

∴ $\angle CBF = \angle BAD$，

∴ $\angle CBF + \angle ABD = 90°$，

∴ $\angle ABF = 90°$，即 $BF \perp OB$，

∵ OB 是⊙O 的半径，

∴ BF 是⊙O 的切线.

（2）设 $AB = AC = m$，则 $AF = AC + CF = m + 2$，

在 $Rt\Delta ABF$ 中，

∵ $BF^2 + AB^2 = AF^2$，

∴ $6^2 + m^2 = (m+2)^2$，解得 $m = 8$，

∴ $AB = AC = 8$， $AF = 8 + 2 = 10$，

连接 BE，

∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ $\angle AEB = 90°$，

∴ $\angle AEB = \angle ABF = 90°$，

又∵ $\angle BAE = \angle FAB$，

∴ $\Delta ABE \sim \Delta AFB$，

∴ $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$，

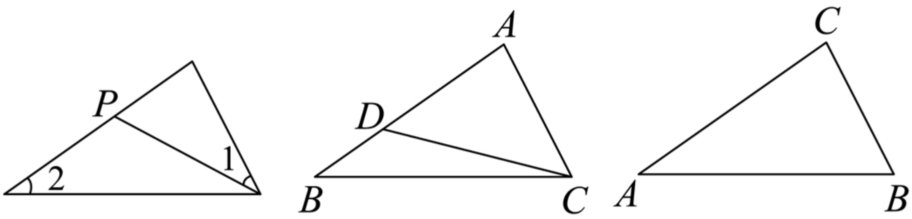
∴ $AE = \frac{AB^2}{AF} = \frac{8^2}{10} = 6.4$

∴ $CE = AC - AE = 8 - 6.4 = 1.6$．

【点睛】本题考查圆周角定理、切线的判定，相似三角形的判定和性质、勾股定理、等腰三角形的性质等知识，综

合性强，熟练掌握圆周角定理，证明三角形相似，由勾股定理得出方程是解题的关键.

5.（江苏省苏州工业园区星海实验中学2021-2022学年八年级下学期期中考试数学试题）定义：如图，若点P在三角形的一条边上，且满足$\angle 1=\angle 2$，则称点P为这个三角形的“理想点”.



图①　　图②

(1)如图①，若点D是$\triangle ABC$的边AB的中点，$AC=2\sqrt{2}$，$AB=4$，试判断点D是不是$\triangle ABC$的“理想点”，并说明理由；

(2)如图②，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AB=5$，$AC=4$，若点D是$\triangle ABC$的“理想点”，求CD的长.

【答案】(1) D为$\triangle ABC$的理想点, 理由见解析

(2) $\frac{12}{5}$或$\frac{9}{4}$

【分析】（1）由已知可得$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}$，从而$\Delta ACD\backsim\Delta ABC$，$\angle ACD=\angle B$，可证点$D$是$\Delta ABC$的“理想点”；

（2）由D是ΔABC的“理想点”，分三种情况：当D在AB上时，CD是AB边上的高，根据面积法可求CD长度；当D在AC上时，$\Delta BDC\backsim\Delta ABC$，对应边成比例即可求$CD$长度；$D$不可能在$BC$上.

（1）

解：点D是ΔABC的“理想点”，理由如下：

$\because D$是AB中点，$AB=4$，

$\therefore AD=BD=2$，$AD\cdot AB=8$，

$\because AC=2\sqrt{2}$，

$\therefore AC^2=8$，

$\therefore AC^2=AD\cdot AB$，

$\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}$，

$\because \angle A=\angle A$，

$\therefore \Delta ACD\backsim\Delta ABC$，

$\therefore \angle ACD=\angle B$，

$\therefore$点D是ΔABC的“理想点”；

（2）

①D在AB上时，如图：