主干回顾　夯基固源

考点研析　题组冲关

素能提升　学科培优

课时规范训练

第9课时　圆锥曲线的综合问题

考纲•点击　高考指数:★★★★★

1. 掌握解决直线与椭圆、抛物线的位置关系的思想方法.

2. 掌握与圆锥曲线有关的最值、定值(点)、参数范围等问题.

1．直线与圆锥曲线的位置关系的判断方法

判断直线与圆锥曲线的位置关系，通常是将直线方程与圆锥曲线方程联立，消去一个变量得到关于x(或y)的一元方程：$ax^2+bx+c=0$(或$ay^2+by+c=0$).

(1)当$a\neq0$，可考虑一元二次方程的判别式Δ，有

①$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与圆锥曲线__相交__；

②$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与圆锥曲线__相切__；

③$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与圆锥曲线__相离__；

(2)当$a=0$，$b\neq 0$时，即得到一个一元一次方程，则直线l与圆锥曲线E相交，且只有一个交点，

①若E为双曲线，则直线l与双曲线的渐近线的位置关系是__平行__；

②若E为抛物线，则直线l与抛物线的对称轴的位置关系是__平行或重合__.

2．圆锥曲线的弦长

(1)圆锥曲线的弦长

直线与圆锥曲线相交有两个交点时，这条直线上以这两个交点为端点的线段叫作圆锥曲线的弦(就是连接圆锥曲线上任意两点所得的线段)，线段的长就是弦长．

(2)圆锥曲线的弦长的计算

设斜率为$k(k\neq 0)$的直线l与圆锥曲线C相交于A，B两点，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot|y_1-y_2|$.(抛物线的焦点弦长$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\theta}$，$\theta$为弦$AB$所在直线的倾斜角).

3．圆锥曲线的中点弦问题

遇到中点弦问题常用“韦达定理”或“点差法”求解．在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，以$P(x_0，y_0)$为中点的弦所在直线的斜率$k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$；在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，以$P(x_0，y_0)$为中点的弦所在直线的斜率$k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$；在抛物线$y^2=2px(p>0)$中，以$P(x_0，y_0)$为中点的弦所在直线的斜率$k=\frac{p}{y_0}$.

[基础自测]

1．(教材改编题)直线$y=kx-k+1$与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的位置关系为(　　)

A．相交　　B．相切

C．相离　　D．不确定

解析：直线$y=kx-k+1=k(x-1)+1$恒过定点$(1,1)$，而$(1,1)$点在椭圆内部，故直线与椭圆相交.

答案：A

2．(2016·**泉州质检**)“直线与双曲线相切”是“直线与双曲线只有一个公共点”的(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

解析：与渐近线平行的直线也与双曲线只有一个公共点．

答案：A

3．已知双曲线$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$的右焦点为$F$，若过点$F$的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则此直线斜率的取值范围是(　　)

A.$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　B．$(-\sqrt{3}，\sqrt{3})$

C.$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　D．$[-\sqrt{3}，\sqrt{3}]$

解析： 由$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$可得双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，过点$F$分别作两条渐近线的平行线$l_1$和$l_2$，由图形得知，符合题意的直线斜率的取值范围为

$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.故选C.

答案： C

4．直线$y=mx+1$与椭圆$x^2+4y^2=1$有且只有一个交点，则$m^2=$________.

解析：直线$y=mx+1$与椭圆$x^2+4y^2=1$联立，消去y得：$(1+4m^2)x^2+8mx+3=0$.

又因为其$\Delta=(8m)^2-12(1+4m^2)=16m^2-12=0$，解得：$m^2=\frac{3}{4}$.

答案：$\frac{3}{4}$

5．抛物线$y^2=4x$被直线$y=2x+k$截得的弦长为$3\sqrt{5}$，则k值为

________．

解析：直线方程与抛物线方程联立，消去y得：$4x^2-4(1-k)x+k^2=0$，

所以$x_1+x_2=1-k$，$x_1x_2=\frac{k^2}{4}$.

依题意得：$3\sqrt{5}=\sqrt{1+2^2}|x_1-x_2|$，

即$9=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(1-k)^2-k^2$，

解得：$k=-4$.

答案：-4

考点一　直线与圆锥曲线的位置关系

[例1]　(2014·高考北京卷)已知椭圆C：$x^2+2y^2=4$.

(1)求椭圆C的离心率；

(2)设O为原点，若点A在椭圆C上，点B在直线$y=2$上，且$OA\perp OB$，试判断直线AB与圆$x^2+y^2=2$的位置关系，并证明你的结论.

审题视点　(1)利用离心率公式直接求解；(2)求直线AB的方程，利用原点到直线AB的距离判断直线与圆的位置关系.

解　(1)由题意，椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

所以$a^2=4$，$b^2=2$，

从而$c^2=a^2-b^2=2$.

因此$a=2$，$c=\sqrt{2}$.

故椭圆C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)直线AB与圆$x^2+y^2=2$相切．证明如下：

设点A，B的坐标分别为$(x_0，y_0)$，$(t,2)$，其中$x_0\neq 0$.

因为$OA\perp OB$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即$tx_0+2y_0=0$，解得$t=-\frac{2y_0}{x_0}$.

当$x_0=t$时，$y_0=-\frac{t^2}{2}$，代入椭圆C的方程，得$t=\pm\sqrt{2}$，

故直线AB的方程为$x=\pm\sqrt{2}$，圆心O到直线AB的距离$d=\sqrt{2}$.

此时直线AB与圆$x^2+y^2=2$相切.

当$x_0\neq t$时，直线AB的方程为$y-2=\dfrac{y_0-2}{x_0-t}(x-t)$.

即$(y_0-2)x-(x_0-t)y+2x_0-ty_0=0$.

圆心O到直线AB的距离

$$d=\frac{|2x_0-ty_0|}{\sqrt{(y_0-2)^2+(x_0-t)^2}}$$

又$x_0^2+2y_0^2=4$，$t=-\dfrac{2y_0}{x_0}$，故

$$d=\frac{\left|2x_0+\dfrac{2y_0^2}{x_0}\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+\dfrac{4y_0^2}{x_0^2}+4}}=\frac{\left|\dfrac{4+x_0^2}{x_0}\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^4+8x_0^2+16}{2x_0^2}}}=\sqrt{2}.$$

此时直线AB与圆$x^2+y^2=2$相切.

方法总结

在讨论直线和圆锥曲线的位置关系时，先联立方程组，再消去x(或y)，得到关于y(或x)的方程，如果是直线与圆或椭圆，则所得方程一定为一元二次方程；如果是直线与双曲线或抛物线，则需讨论二次项系数等于零和不等于零两种情况，只有二次方程才有判别式，另外还应注意斜率不存在的情形.

题组冲关

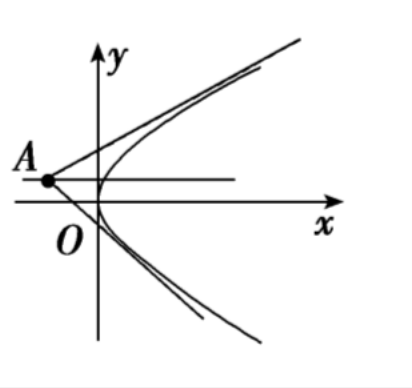
强化训练 提升考能

1．(2016·深圳模拟)过点A的直线l与抛物线$y^2=2x$有且只有一个公共点，这样的直线l的条数是(　　)

A．0或1　　B．1或2

C．0或1或2　　D．1或2或3

解析：①当A在抛物线的外部时，共有三条直线与抛物线只有一个公共点(有两条是切线，一条与抛物线的对称轴平行，如图)；②可以想象，当A在抛物线上时，有两条直线与抛物线只有一个公共点；③当A在抛物线的内部时，只有一条直线与抛物线只有一个公共点．故选D.



答案：D

2．(2015·**高考湖南卷**)已知抛物线C_1：$x^2=4y$的焦点F也是椭圆C_2：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点，$C_1$与$C_2$的公共弦的长为$2\sqrt{6}$.过点$F$的直线$l$与$C_1$相交于$A$，$B$两点，与$C_2$相交于$C$，$D$两点，且$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$同向.

(1)求C_2的方程；

(2)若$|AC|=|BD|$，求直线l的斜率.

解：(1)由C_1：$x^2=4y$知其焦点F的坐标为$(0,1)$．因为F也是椭圆C_2的一个焦点，所以$a^2-b^2=1$.①

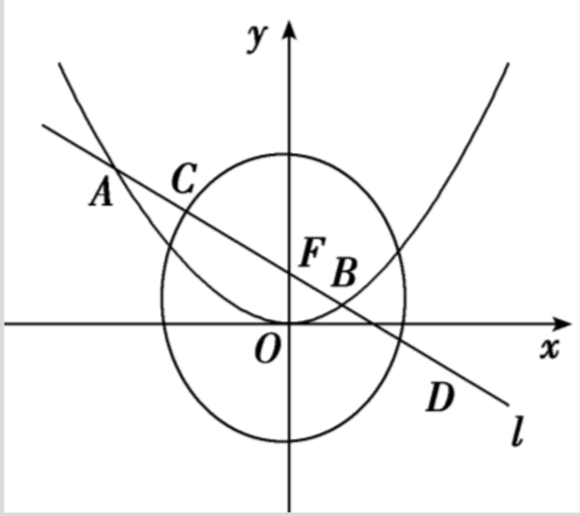
又C_1与C_2的公共弦的长为$2\sqrt{6}$，C_1与C_2都关于y轴对称，且C_1的方程为$x^2=4y$,

由此易知C_1与C_2的公共点的坐标为$\left(\pm\sqrt{6},\ \frac{3}{2}\right)$，所以$\frac{9}{4a^2}+\frac{6}{b^2}=1$.②

联立①②，得$a^2=9$，$b^2=8$.

故C_2的方程为$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{8}=1$.

(2)如图，设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$.



因$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$同向，且$|AC|=|BD|$，所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，从而$x_3-x_1=x_4-x_2$，即$x_1-x_2=x_3-x_4$，于是

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(x_3+x_4)^2-4x_3x_4$.③

设直线l的斜率为k，则l的方程为$y=kx+1$.

由$\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2=4y, \end{cases}$ 得$x^2-4kx-4=0$.

而x_1，x_2是方程的两根，

所以$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$.④

由$\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{9}=1, \end{cases}$ 得$(9+8k^2)x^2+16kx-64=0$.

而x_3，x_4是此方程的两根，

所以$x_3+x_4=-\dfrac{16k}{9+8k^2}$，$x_3x_4=-\dfrac{64}{9+8k^2}$.⑤

将④⑤代入③，

得$16(k^2+1)=\dfrac{16^2k^2}{(9+8k^2)^2}+\dfrac{4\times 64}{9+8k^2}$，

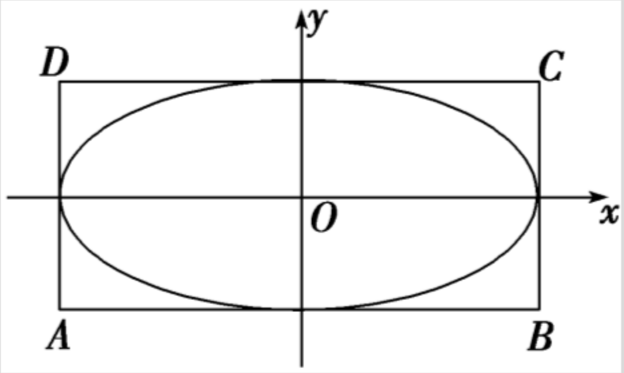
即$16(k^2+1)=\dfrac{16^2\times 9(k^2+1)}{(9+8k^2)^2}$，

所以$(9+8k^2)^2=16\times 9$，

解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，即直线l的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

考点二　圆锥曲线中的最值(或取值范围)问题

[例2]　如图，椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，直线$x=\pm a$和$y=\pm b$所围成的矩形$ABCD$的面积为8.



(1)求椭圆M的标准方程；

(2)设直线：l：$y=x+m(m\in\mathbf{R})$与椭圆M有两个不同的交点P，Q，l与矩形$ABCD$有两个不同的交点S，T.求$\frac{|PQ|}{|ST|}$的最大值及取得最大值时m的值.

审题视点　(1)利用离心率，矩形面积及椭圆中a，b，c的关系列方程组求解；(2)直线和椭圆方程联立方程组，表示出$|PQ|$和$|ST|$后，求出$\frac{|PQ|}{|ST|}$的解析式，求其最值即可.

解　(1)设椭圆M的半焦距为c，由题意知

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ 4ab=8, \end{cases}$$

所以$a=2$，$b=1$.

因此椭圆M的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=x+m\end{cases}$整理得

$5x^2+8mx+4m^2-4=0.$

由$\Delta=64m^2-80(m^2-1)=80-16m^2>0$,

得$-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$.

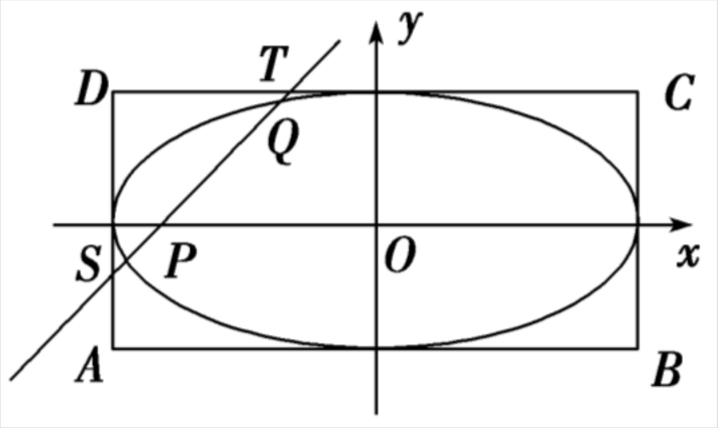
设$P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$,

则$x_1+x_2=-\dfrac{8m}{5}$，$x_1x_2=\dfrac{4(m^2-1)}{5}$,

所以$|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\frac{4}{5}\sqrt{2(5-m^2)}(-\sqrt{5}<m<\sqrt{5})$.



线段CD的方程为$y=1(-2\leqslant x\leqslant 2)$，线段$AD$的方程为$x=-2(-1\leqslant y\leqslant 1)$.

①不妨设点S在AD边上，T在CD边上，可知$1\leqslant m<\sqrt{5}$，$S(-2，m-2)$，$D(-2,1)$,

所以$|ST|=\sqrt{2}|SD|=\sqrt{2}[1-(m-2)]=\sqrt{2}(3-m)$,

因此$\dfrac{|PQ|}{|ST|}=\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{5-m^2}{(3-m)^2}}$.

令$t=3-m(1\leqslant m<\sqrt{5})$,

则$m=3-t$，$t\in(3-\sqrt{5}，2]$,

所以$\frac{|PQ|}{|ST|}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{5-(3-t)^2}{t^2}}=\frac{4}{5}\sqrt{-\frac{4}{t^2}+\frac{6}{t}-1}$

$=\frac{4}{5}\sqrt{-4\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{4}}$.

由于$t\in(3-\sqrt{5}, 2]$，所以$\frac{1}{t}\in\left[\frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$，

因此当$\frac{1}{t}=\frac{3}{4}$，即$t=\frac{4}{3}$时，$\frac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，此时$m=\frac{5}{3}$.

②不妨设点S在AB边上，T在CD边上，此时$-1\leqslant m\leqslant 1$，

因此$|ST|=\sqrt{2}|AD|=2\sqrt{2}$，此时$\frac{|PQ|}{|ST|}=\frac{2}{5}\sqrt{5-m^2}$，

所以当$m=0$时，$\frac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

③不妨设点S在AB边上，T在BC边上$-\sqrt{5}<m\leqslant -1$，

由椭圆和矩形的对称性知$\frac{|PQ|}{|ST|}$的最大值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，此时$m=-\frac{5}{3}$.

综上所述，当$m=\pm\frac{5}{3}$或$m=0$时，$\frac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.