

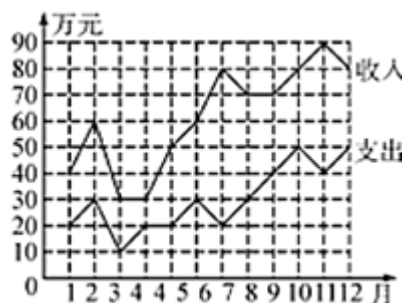
湖南省岳阳市达标名校 2023-2024 学年高考数学全真模拟密押卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 某网店 2019 年全年的月收支数据如图所示，则针对 2019 年这一年的收支情况，下列说法中错误的是（ ）



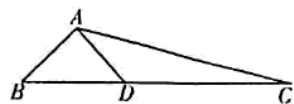
- A. 月收入的极差为 60 B. 7 月份的利润最大
C. 这 12 个月利润的中位数与众数均为 30 D. 这一年的总利润超过 400 万元

2. 设 m, n 是空间两条不同的直线, α, β 是空间两个不同的平面, 给出下列四个命题:

- ①若 $m // \alpha, n // \beta, \alpha // \beta$, 则 $m // n$;
②若 $\alpha \perp \beta, m \perp \beta, m \not\subset \alpha$, 则 $m // \alpha$;
③若 $m \perp n, m \perp \alpha, \alpha // \beta$, 则 $n // \beta$;
④若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, m // \alpha, m \perp l$, 则 $m \perp \beta$. 其中正确的是 ()

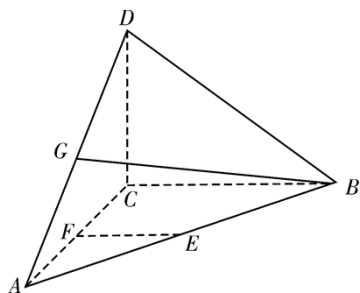
- A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ③④

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp AB, \vec{BD} = x\vec{AB} + y\vec{AC} (x, y \in \mathbb{R}), |\vec{AD}| = 2$, 且 $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = 12$, 则 $2x + y =$ ()



- A. 1 B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{3}{4}$

4. 如图, 在三棱锥 $D-ABC$ 中, $DC \perp$ 平面 $ABC, AC \perp BC, AC = BC = CD = 2, E, F, G$ 分别是棱 AB, AC, AD 的中点, 则异面直线 BG 与 EF 所成角的余弦值为



- A. 0 B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$ ，过左焦点 F_1 作斜率为 1 的直线交双曲线 C 的右支于点 P ，若线段 PF_1 的中点在圆 $O: x^2 + y^2 = c^2$ 上，则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $2\sqrt{2} + 1$

6. 函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{2\pi}{3})$ 的对称轴不可能为 ()

- A. $x = -\frac{5\pi}{6}$ B. $x = -\frac{\pi}{3}$ C. $x = \frac{\pi}{6}$ D. $x = \frac{\pi}{3}$

7. “十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献.十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为 f ，则第八个单音的频率为

- A. $\sqrt[3]{2}f$ B. $\sqrt[3]{2^2}f$
C. $\sqrt[12]{2^5}f$ D. $\sqrt[12]{2^7}f$

8. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 且 $a > b$ ，则下列不等式成立的是 ()

- A. $c - a < c - b$ B. $ac^2 > bc^2$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\frac{b}{a} < 1$

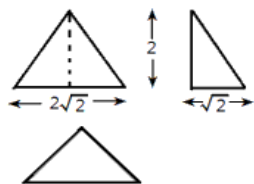
9. 已知集合 $A = \{1, 3, \sqrt{m}\}$ ， $B = \{1, m\}$ ，若 $A \cup B = A$ ，则 $m =$ ()

- A. 0 或 $\sqrt{3}$ B. 0 或 3 C. 1 或 $\sqrt{3}$ D. 1 或 3

10. 已知复数 z 满足 $z - \bar{z} = 0$ ，且 $z \cdot \bar{z} = 9$ ，则 $z =$ ()

- A. 3 B. $3i$ C. ± 3 D. $\pm 3i$

11. 已知棱锥的三视图如图所示，其中俯视图是等腰直角三角形，则该三棱锥的四个面中，最大面积为 ()



- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{6}$

12. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan \alpha = \frac{\cos 2\beta}{1 - \sin 2\beta}$, 则 ()

- A. $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ B. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$
C. $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ D. $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $P(1,1)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 内一定点，经过 P 引一条弦，使此弦被 P 点平分，则此弦所在的直线方程为 _____.

14. 若 $a = \log_2 3, b = \log_3 2$, 则 $ab =$ _____, $\lg a + \lg b =$ _____.

15. (5 分) 国家禁毒办于 2019 年 11 月 5 日至 12 月 15 日在全国青少年毒品预防教育数字化网络平台上开展 2019 年全国青少年禁毒知识答题活动，活动期间进入答题专区，点击“开始答题”按钮后，系统自动生成 20 道题. 已知某校高二年级有甲、乙、丙、丁、戊五位同学在这次活动中答对的题数分别是 17, 20, 16, 18, 19，则这五位同学答对题数的方差是 _____.

16. 过圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 的圆心且与直线 $2x + 3y = 0$ 垂直的直线方程为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 班主任为了对本班学生的考试成绩进行分析，决定从本班 24 名女同学，18 名男同学中随机抽取一个容量为 7 的样本进行分析。

(1) 如果按照性别比例分层抽样，可以得到多少个不同的样本？(写出算式即可，不必计算出结果)

(2) 如果随机抽取的 7 名同学的数学，物理成绩(单位：分)对应如下表：

学生序号 i	1	2	3	4	5	6	7
数学成绩 x_i	60	65	70	75	85	87	90
物理成绩 y_i	70	77	80	85	90	86	93

①若规定 85 分以上(包括 85 分)为优秀，从这 7 名同学中抽取 3 名同学，记 3 名同学中数学和物理成绩均为优秀的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列和数学期望；

②根据上表数据，求物理成绩 y 关于数学成绩 x 的线性回归方程(系数精确到 0.01)；若班上某位同学的数学成绩为 96 分，预测该同学的物理成绩为多少分？

附：线性回归方程 $\hat{y} = bx + a$ ，

其中 $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $a = \bar{y} - b\bar{x}$ 。

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
76	83	812	526

18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，将曲线 $C_1: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 通过伸缩变换 $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$ ，得到曲线 C_2 ，

设直线 $l: \begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = \sqrt{3} + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 C_2 相交于不同两点 A, B 。

- (1) 若 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，求线段 AB 的中点 M 的坐标；
- (2) 设点 $P(2, \sqrt{3})$ ，若 $|PA| \cdot |PB| = |OP|^2$ ，求直线 l 的斜率。

19. (12 分) 以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程是 $\rho \cos^2 \theta - 4 \sin \theta = 0$ ，直线 l_1 和直线 l_2 的极坐标方程分别是 $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbf{R}$) 和 $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ($\rho \in \mathbf{R}$)，其中 $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)。

- (1) 写出曲线 C 的直角坐标方程；
- (2) 设直线 l_1 和直线 l_2 分别与曲线 C 交于除极点 O 的另外点 A, B ，求 $\triangle OAB$ 的面积最小值。

20. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \varphi, \\ y = t \sin \varphi, \end{cases}$ (t 为参数)，直线 l_2 的参数方程为

$\begin{cases} x = t \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \\ y = t \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \end{cases}$ ，(t 为参数)。以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为

$\rho \sin^2 \theta = \cos \theta$ 。

- (I) 求 l_1, l_2 的极坐标方程和 C 的直角坐标方程；
- (II) 设 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点 (与原点 O 不重合)，求 $|OA| \cdot |OB|$ 的最小值。

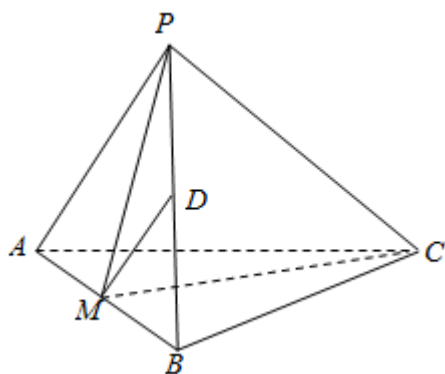
21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{b}{x}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 且对任意 $x > 0$, 都有 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

(I) 用含 a 的表达式表示 b ;

(II) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 求出 a 的取值范围, 并证明 $f\left(\frac{a^2}{2}\right) > 0$;

(III) 在 (II) 的条件下, 判断 $y = f(x)$ 零点的个数, 并说明理由.

22. (10 分) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp PC$, M 是 AB 的中点, 点 D 在 PB 上, $MD \parallel$ 平面 PAC , 平面 $PAB \perp$ 平面 PMC , $\triangle CPM$ 为锐角三角形, 求证:



(1) D 是 PB 的中点;

(2) 平面 $ABC \perp$ 平面 PMC .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

直接根据折线图依次判断每个选项得到答案.

【详解】

由图可知月收入的极差为 $90 - 30 = 60$, 故选项 A 正确;

1 至 12 月份的利润分别为 20, 30, 20, 10, 30, 30, 60, 40, 30, 30, 50, 30, 7 月份的利润最高, 故选项 B 正确;

易求得总利润为 380 万元, 众数为 30, 中位数为 30, 故选项 C 正确, 选项 D 错误.

故选: D.

【点睛】

本题考查了折线图，意在考查学生的理解能力和应用能力.

2、C

【解析】

根据线面平行或垂直的有关定理逐一判断即可.

【详解】

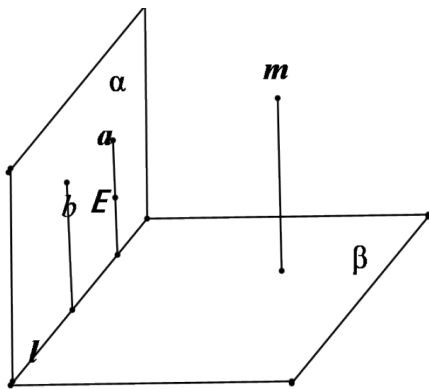
解：①： m 、 n 也可能相交或异面，故①错

②： 因为 $\alpha \perp \beta$ ， $m \perp \beta$ ，所以 $m \subset \alpha$ 或 $m // \alpha$ ，

因为 $m \not\subset \alpha$ ，所以 $m // \alpha$ ，故②对

③： $n // \beta$ 或 $n \subset \beta$ ，故③错

④： 如图



因为 $\alpha \perp \beta$ ， $\alpha \cap \beta = l$ ，在内 α 过点 E 作直线 l 的垂线 a ，

则直线 $a \perp \beta$ ， $a \perp l$

又因为 $m // \alpha$ ，设经过 m 和 α 相交的平面与 α 交于直线 b ，则 $m // b$

又 $m \perp l$ ，所以 $b \perp l$

因为 $a \perp l$ ， $b \perp l$ ， $b \subset \alpha, a \subset \alpha$

所以 $b // a // m$ ，所以 $m \perp \beta$ ，故④对.

故选：C

【点睛】

考查线面平行或垂直的判断，基础题.

3、C

【解析】

由题可 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 12$, 所以将已知式子中的向量用 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示, 可得到的 x, y 关系, 再由 B, D, C 三点共线, 又得到一个关于 x, y 的关系, 从而可求得答案

【详解】

由 $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则

$\overrightarrow{AD} = (x+1)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot [(x+1)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}] = (x+1)\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, 即 $4 = 12y$, 所以 $y = \frac{1}{3}$,

又 B, D, C 共线, 则 $x+1+y=1$, $x = -\frac{1}{3}$, $2x+y = -\frac{1}{3}$.

故选: C

【点睛】

此题考查的是平面向量基本定理的有关知识, 结合图形寻找各向量间的关系, 属于中档题.

4、B

【解析】

根据题意可得 $BC \perp$ 平面 ACD , $EF \parallel BC$, 则 $\angle CBG$ 即异面直线 BG 与 EF 所成的角, 连接 CG , 在 $\text{Rt}\triangle CBG$ 中,

$\cos \angle CBG = \frac{BC}{BG}$, 易得 $BD = AD = AB = 2\sqrt{2}$, 所以 $BG = \sqrt{6}$, 所以 $\cos \angle CBG = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 故选 B.

5、C

【解析】

设线段 PF_1 的中点为 A , 判断出 A 点的位置, 结合双曲线的定义, 求得双曲线的离心率.

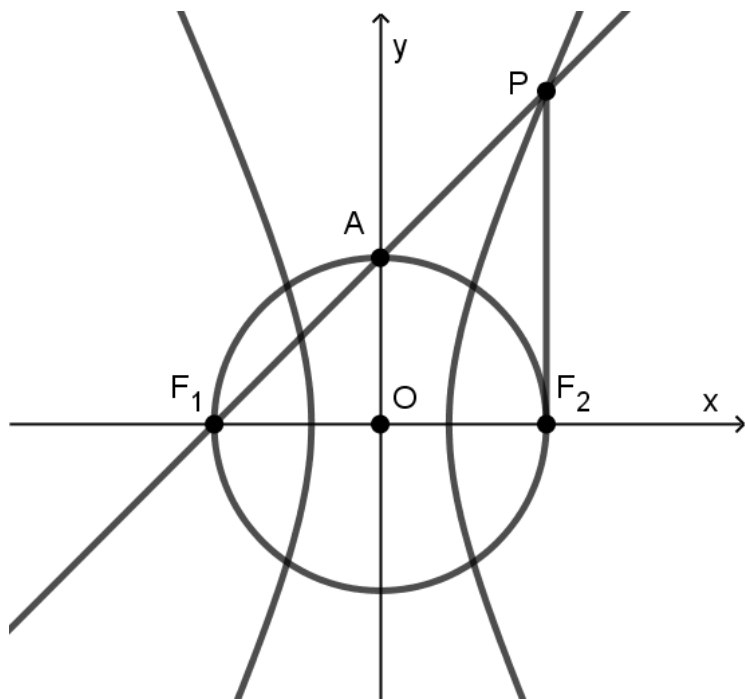
【详解】

设线段 PF_1 的中点为 A , 由于直线 F_1P 的斜率是 1, 而圆 $O: x^2 + y^2 = c^2$, 所以 $A(0, c)$. 由于 O 是线段 F_1F_2 的中点,

所以 $|PF_2| = 2|OA| = 2c$, 而 $|PF_1| = 2|AF_1| = 2 \times \sqrt{2}c = 2\sqrt{2}c$, 根据双曲线的定义可知 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 即

$2\sqrt{2}c - 2c = 2a$, 即 $\frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{2}-2} = \sqrt{2} + 1$.

故选: C



【点睛】

本小题主要考查双曲线的定义和离心率的求法，考查直线和圆的位置关系，考查数形结合的数学思想方法，属于中档题.

6、D

【解析】

由条件利用余弦函数的图象的对称性，得出结论.

【详解】

对于函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ，令 $2x + \frac{2\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ，

当 $k = -1, 0, 1$ 时，函数的对称轴为 $x = -\frac{5\pi}{6}$ ， $x = -\frac{\pi}{3}$ ， $x = \frac{\pi}{6}$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查余弦函数的图象的对称性，属于基础题.

7、D

【解析】

分析：根据等比数列的定义可知每一个单音的频率成等比数列，利用等比数列的相关性质可解.

详解：因为每一个单音与前一个单音频率比为 $\sqrt[3]{2}$ ，

所以 $a_n = \sqrt[3]{2}a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}_+)$ ，

又 $a_1 = f$, 则 $a_8 = a_1 q^7 = f(\sqrt[12]{2})^7 = \sqrt[12]{2^7} f$

故选 D.

点睛: 此题考查等比数列的实际应用, 解决本题的关键是能够判断单音成等比数列. 等比数列的判断方法主要有如下两种:

(1) 定义法, 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($q \neq 0, n \in N^*$) 或 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ ($q \neq 0, n \geq 2, n \in N^*$), 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 等比中项公式法, 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n \neq 0$ 且 $a_{n-1}^2 = a_n \cdot a_{n-2}$ ($n \geq 3, n \in N^*$), 则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

8、A

【解析】

A 项, 由 $a > b$ 得到 $-a < -b$, 则 $c - a < c - b$, 故 A 项正确;

B 项, 当 $c = 0$ 时, 该不等式不成立, 故 B 项错误;

C 项, 当 $a = 1, b = -2$ 时, $1 > -\frac{1}{2}$, 即不等式 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立, 故 C 项错误;

D 项, 当 $a = -1, b = -2$ 时, $\frac{b}{a} = 2 > 1$, 即不等式 $\frac{b}{a} < 1$ 不成立, 故 D 项错误.

综上所述, 故选 A.

9、B

【解析】

因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$, 所以 $m = 3$ 或 $m = \sqrt{m}$.

若 $m = 3$, 则 $A = \{1, 3, \sqrt{3}\}, B = \{1, 3\}$, 满足 $A \cup B = A$.

若 $m = \sqrt{m}$, 解得 $m = 0$ 或 $m = 1$. 若 $m = 0$, 则 $A = \{1, 3, 0\}, B = \{1, 3, 0\}$, 满足 $A \cup B = A$. 若 $m = 1$,

$A = \{1, 3, 1\}, B = \{1, 1\}$ 显然不成立, 综上 $m = 0$ 或 $m = 3$, 选 B.

10、C

【解析】

设 $z = a + bi$, 则 $\bar{z} = a - bi$, 利用 $z - \bar{z} = 0$ 和 $z \cdot \bar{z} = 9$ 求得 a, b 即可.

【详解】

设 $z = a + bi$, 则 $\bar{z} = a - bi$,

因为 $z - \bar{z} = 0$, 则 $(a + bi) - (a - bi) = 2bi = 0$, 所以 $b = 0$,

又 $z \cdot \bar{z} = 9$, 即 $a^2 = 9$, 所以 $a = \pm 3$,

所以 $z = \pm 3$,

故选:C

【点睛】

本题考查复数的乘法法则的应用,考查共轭复数的应用.

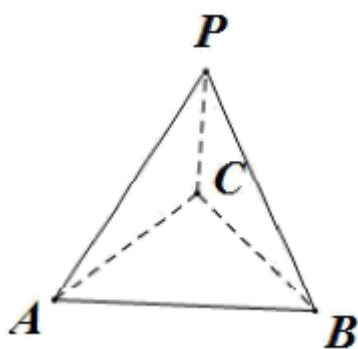
11、 B

【解析】

由三视图可知,该三棱锥如图,其中底面 ABC 是等腰直角三角形, $PC \perp$ 平面 ABC ,结合三视图求出每个面的面积即可.

【详解】

由三视图可知,该三棱锥如图所示:



其中底面 ABC 是等腰直角三角形, $PC \perp$ 平面 ABC ,

由三视图知, $PC = 2, AB = 2\sqrt{2}$,

因为 $PC \perp BC, PC \perp AC, AC = BC, AC \perp CB$,

所以 $AC = BC = 2, PA = PB = AB = 2\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle PAC} = S_{\triangle PCB} = S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$,

因为 $\triangle PAB$ 为等边三角形,

所以 $S_{\triangle PAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$,

所以该三棱锥的四个面中,最大面积为 $2\sqrt{3}$.

故选: B

【点睛】

本题考查三视图还原几何体并求其面积;考查空间想象能力和运算求解能力;三视图正确还原几何体是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

12、 C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/577014042032006101>