P66 ： 8.某部门有 3 个生产同类产品的工厂（产地）,生产的产品由 4 个销售点出售，各工厂 A_1 ， A_2 ，A_3 的生产量、各销售点 B_1 ，B_2 ，B_3 ，B_4 的销售量（假定单位为 t ）以及各工厂到销售点的单位运价（元/t ）示于下表中，问如何调运才能使总运费最小？

表

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4	11	16
A_2	2	10	3	9	10
A_3	8	5	11	6	22
销量	8	14	12	14	48

解：一、该运输问题的数学模型为：

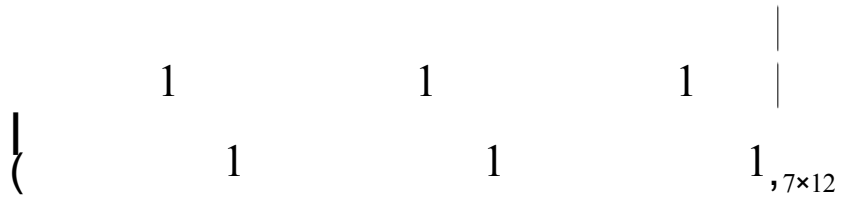
$$\min z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 4x_{11} + 12x_{12} + 4x_{13} + 11x_{14} + 2x_{21}$$

$$+10x_{22} + 3x_{23} + 9x_{24} + 8x_{31} + 5x_{32} + 11x_{33} + 6x_{34}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 16 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 22 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 8 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 14 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 12 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 14 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \end{pmatrix}$$



可以证明：约束矩阵的秩为 r (A)= 6. 从而基变量的个数为 6.

二、给出运输问题的初始可行解（初始调运方案）

1. 最小元素法

思想：优先满足运价（或运距）最小的供销业务。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4	11	16
A_2	8　2	10	3	9	10　8　2
A_3	8	5	11	6	22
销量	8	14	12	14	48

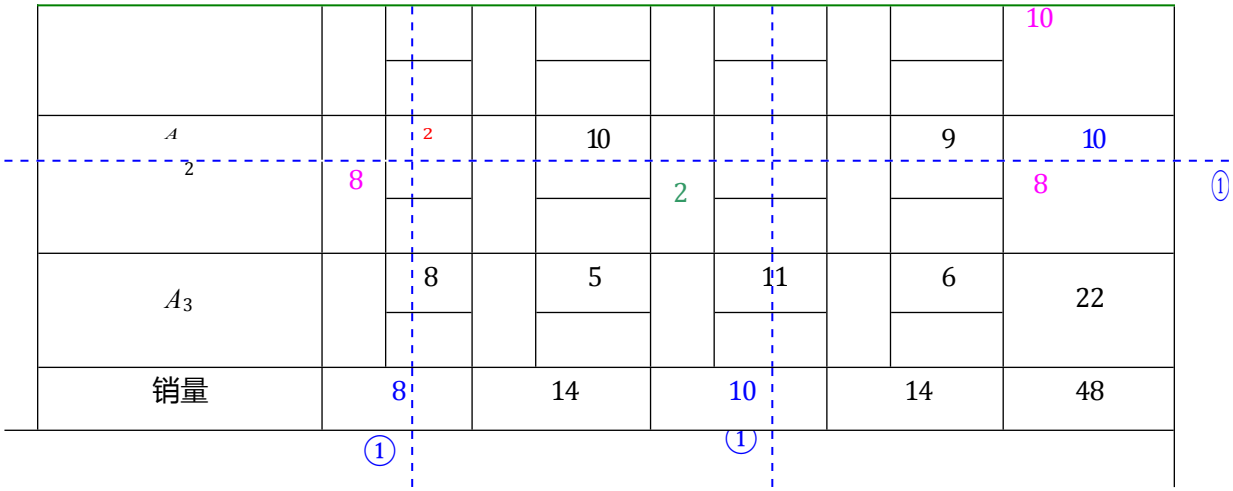
①

销地

产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
	4	12	4	11	
A_1					16
A_2	8　2	10	2　3	9	10　8 ①
	8	5	11	6	
A_3					22
销量	8 ①	14	10	14	48

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	10　4　3	11	16　6

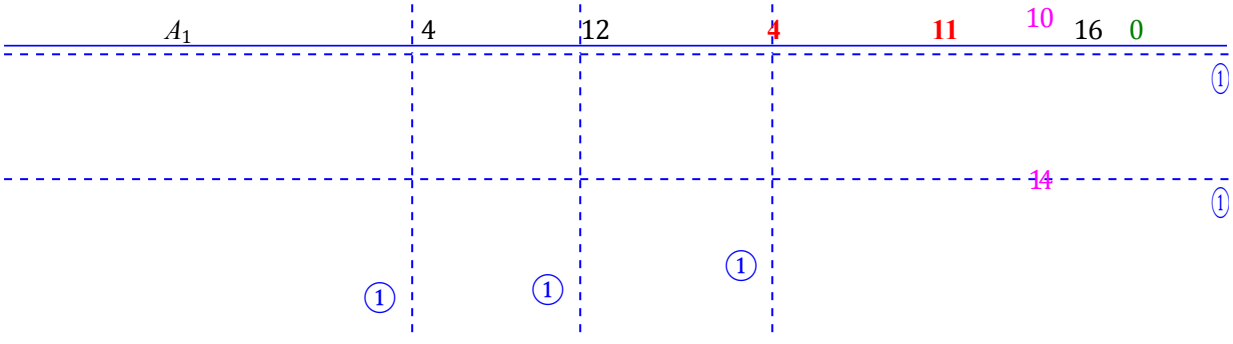
3


10
A2
2
10
9
10
8
2
8
1
A3
8
5
11
6
22
销量
8
14
10
14
48
1
1

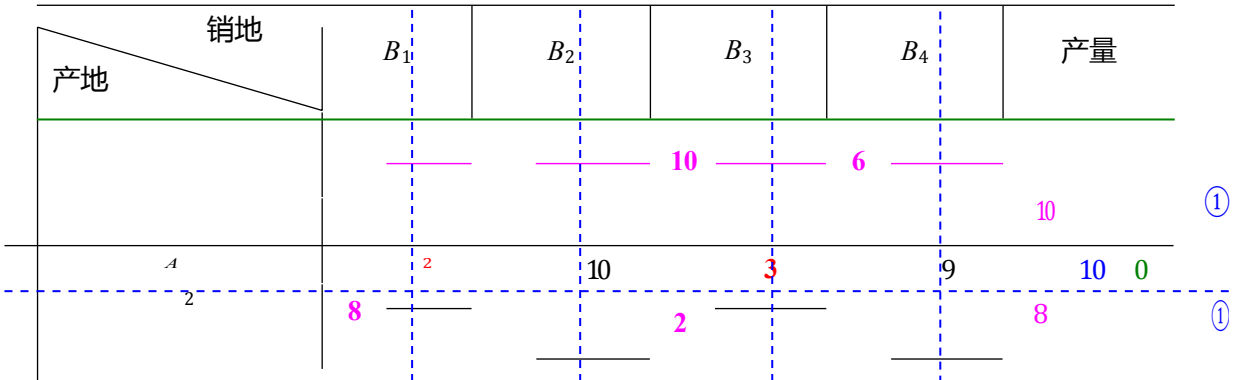
销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4	11	16
A_2	2	10	3	9	10



销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4	11	16
A_2	2	10	3	9	10



销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4	11	16
A_2	2	10	3	9	10



A_3	8	14	5		11	8	6	22 0
								14
销量	8	14		10		14 0		48

此时得到一个初始调运方案（初始可行解）：

x_{13} = 10, x_{14} = 6, x_{21} = 8, x_{23} = 2, x_{32} = 14, x_{34} = 8,

其余（非基）变量全等于零。此解满足所有约束条件，且基变量（非零变量）的个数为 6（等于 m+n-1=3+4-1=6).

总运费为（目标函数值）

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}=10\times4+6\times11+8\times2+2\times3+14\times5+8\times6=246$$

2. 伏格尔(Vogel)法

伏格尔法的基本思想：运输表中各行各列的最小运价与次小运价之差值（罚数）应尽可能地小。或者说：优先供应罚数最大行（或列）中最小运费的方格，以避免将运量分配到该行（或该列）次小运距的方格中。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	4	12	4	11	16	0
A_2	2	10	3	9	10	1
A_3	8	5	11	6	22	1
销量	8	14	12	14	48	
列差额	2	**5**	1	3		

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	4	12	4	11	16	0
A_2	2	10	3	9	10	1
A_3	8	14 5	11	6	22 8 14	1→2
销量	8	14	12	14	48	
列差额	2	**5**	1	3		

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	4	12	4	11	16	0
A_2	2	10	3	9	10	1
A_3	8	5	11	6	0	
		14		8	22 14	1
销量	8	14	12	14	48	
列差额	2	**5**	1	**3**		

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	4	12	4	11	16	0
A_2	2	10	3	9	10 2	1
A_3	8	5	11	6	0	
销量	8	14	12	14	48	
列差额	**2**	**5**	1	**3**		

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	4	12	4	11	16 4	7
A_2	2	10	3	9	10 0	6
A_3	8	5	11	6	0	
销量	8	14	12	14	48	
列差额	**2**	**5**	1	**3**		

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	4	12	4	11	16 0	7
A_2	2	10	3	9	10 0	6

A_3	8	14	5	11	6	22
销量	8	14	12	14 0	48	
列差额	**2**	**5**	1	**3**		

此时得到一个初始调运方案（初始可行解）：$x_{13}=12, x_{14}=4, x_{21}=8, x_{24}=2, x_{32}=14, x_{34}=8$

其余（非基）变量全等于零。此解满足所有约束条件，且基变量（非零变量）的个数为 6（等于 m+n-1=3+4-1=6）。

总运费为（目标函数值）：

$$Z=\sum_{}^{3}\sum_{}^{4}c_{ij}x_{ij}=12\times4+4\times11+8\times2+2\times9+14\times5+8\times6=244$$

三、解的最优性检验

□ 闭回路法（以下的闭回路都是顺时针方向）
看非基变量的检验数是否满足$\sigma_{ij}\geq0$.

（1）首先对用最小元素法所确定的初始基本可行解进行检验。参见前面的计算结果，可知非基变量分别为：x_{11} ，x_{12} ，x_{22} ，x_{24} ，x_{31} ，x_{33} 。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	X_{11} 4	12	**10** 4	**6** 11	16
A_2	**8** 2	10	**2** 3	9	10
A_3	8	**14** 5	11	**8** 6	22
销量	8	14	12	14	48

$\sigma_{11}=C_{11}+C_{23}-(C_{13}+C_{21})=4+3-(4+2)=1$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	X_{12} 12	~~10~~ 4	**6** 11	16
A_2	**8** 2	10	**2** 3	9	10
A_3	8	**14** 5	11	**8** 6	22
销量	8	14	12	14	48

$\sigma_{12}=C_{12}+C_{34}-(C_{14}+C_{32})=12+6-(11+5)=2$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	**10** 4	**6** 11	16
A_2	**8** 2	X_{22} 10	**2** 3	9	10
A_3	8	**14** 5	11	**8** 6	22
销量	8	14	12	14	48

$\sigma_{22}= C_{22} + C_{13} + C_{34} - (C_{23} + C_{14} + C_{32}) = 10 + 4 + 6 - (3 + 11 + 5) = 20 - 19 = 1$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	X_{11} 4	12	**10** 4	**6** 11	16
A_2	**8** 2	10	**2** 3	X_{24} 9	10
A_3	8	**14** 5	11	**8** 6	22
销量	8	14	12	14	48

$\sigma_{24} = C_{24} + C_{13} - (C_{14} + C_{23}) = 9 + 4 - (11 + 3) = -1$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	**10** 4	**6** 11	16
A_2	**8** 2	10	**2** 3	9	10
A_3	X_{31} 8	**14** 5	11	**8** 6	22
销量	8	14	12	14	48

$\sigma_{31} = C_{31} + C_{14} + C_{23} - (C_{34} + C_{13} + C_{21}) = 8 + 11 + 3 - (6 + 4 + 2) = 22 - 12 = 10$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	**10** 4	**6** 11	16
A_2	**8** 2	10	**2** 3	9	10

A_3		8	**14**	5	X_{33}	11	**8**	6	22
销量	8		14		12		14		48

$\sigma_{33} = C_{33} + C_{14} - (C_{13} + C_{34}) = 11 + 11 - (4 + 6) = 12$

由于 $\sigma_{24} = C_{24} + C_{13} - (C_{14} + C_{23}) = 9 + 4 - (11 + 3) = -1 < 0$ ，所以当前方案不是最优方案。

（2）然后对用伏格尔法所确定的初始基本可行解进行检验。参见前面的计算结果，可知非基变量分别为：x_{11} ，x_{12} ，x_{22} ，x_{23} ，x_{31} ，x_{33}。（伏格尔法）

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	X_{11} 4	12	12 4	4 11	16
A_2	8 2	10	3	2 9	10
A_3	8	14 5	11	8 6	22
销量	8	14	12	14	48

$\sigma_{11} = C_{11} + C_{24} - (C_{14} + C_{21}) = 4 + 9 - (11 + 2) = 0$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	X_{12} 12	12 4	4 11	16
A_2	8 2	10	3	2 9	10
A_3	8	14 5	11	8 6	22
销量	8	14	12	14	48

$\sigma_{12} = C_{12} + C_{34} - (C_{14} + C_{31}) = 12 + 6 - (11 + 5) = 2$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	12 4	4 11	16
A_2	8 2	X_{22} 10	3	2 9	10

A_3		8	14	5		11	8	6	22
销量	8		14		12		14		48

$\sigma_{22} = C_{22} + C_{34} - (C_{24} + C_{32}) = 10 + 6 - (9 + 5) = 16 - 14 = 2$

销地 / 产地	B_1		B_2		B_3		B_4		产量
A_1		4		12	12	4	4	11	16
A_2	8	2		10	X_{23}	3	2	9	10
A_3		8	14	5		11	8	6	22
销量	8		14		12		14		48

$\sigma_{23} = C_{23} + C_{14} - (C_{13} + C_{24}) = 3 + 11 - (4 + 9) = 14 - 13 = 1$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	12 4	4 11	16
A_2	8 2	10	3	2 9	10
A_3	X_{31} 8	14 5	11	8 6	22
销量	8	14	12	14	48

$\sigma_{31} = C_{31} + C_{24} - (C_{21} + C_{34}) = 8 + 9 - (2 + 6) = 17 - 8 = 9$

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	12 4	4 11	16
A_2	8 2	10	3	2 9	10
A_3	8	14 5	X_{33} 11	8 6	22
销量	8	14	12	14	48

$\sigma_{33} = C_{33} + C_{14} - (C_{13} + C_{34}) = 11 + 11 - (4 + 6) = 22 - 10 = 12$

由于所有非基变量的检验数都大于零，说明当前方案是最优方案，最优解为：

$x_{11}=12$ ，$x_{14}=4$ ，$x_{21}=8$ ，$x_{24}=2$ ，$x_{32}=14$ ，$x_{34}=8$ 。

2 位势法

（1）首先对用最小元素法所确定的初始基本可行解进行检验。参见前面的计算结果，可知基变量分别为：x_{13} ，x_{14} ，x_{21} ，x_{23} ，x_{32} ，x_{34} 。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	**10** 4	**6** 11	16
A_2	**8** 2	10	**2** 3	9	10

A_3		8	**14**	5		11	**8**	6	22
销量	8		14		12		14	48

构造方程组：

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = c_{13} = 4 \\ u_1 + v_4 = c_{14} = 11 \\ u_2 + v_1 = c_{21} = 2 \\ u_2 + v_3 = c_{23} = 3 \end{cases}$$

$u_3 + v_2 = c_{32} = 5$

$u_3 + v_4 = c_{34} = 6$

令自由变量 $u_1 = 0$ ，将其代入方程组，得：

$u_1 = 0$ ，$v_3 = 4$ ，$v_4 = 11$ ，$u_3 = -5$ ，$v_2 = 10$ ，$u_2 = -1$ ，$v_1 = 3$ ，将其代入非基变量检验数：$\sigma_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ ，得：

$\sigma_{11} = C_{11} - (u_1 + v_1) = 4 - (0 + 3) = 1$

$\sigma_{12} = C_{12} - (u_1 + v_2) = 12 - (0 + 10) = 2$

$\sigma_{22} = C_{22} - (u_2 + v_2) = 10 - (-1 + 10) = 1$

$\sigma_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) = 9 - (-1 + 11) = -1$

$\sigma_{31} = C_{31} - (u_3 + v_1) = 8 - (-5 + 3) = 10$

$\sigma_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) = 11 - (-5 + 4) = 12$

与闭回路法计算的结果相同。

（2）然后对用伏格尔法所确定的初始基本可行解进行检验。参见前面的计算结果，可知基变量分别为：x_{13} ，x_{14} ，x_{21} ，x_{24} ，x_{32} ，x_{34} 。

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	12 4	4 11	16
A_2	8 2	10	3	2 9	10
A_3	8	14 5	11	8 6	22
销量	8	14	12	14	48

构造方程组：

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = c_{13} = 4 \\ u_1 + v_4 = c_{14} = 11 \\ u_2 + v_1 = c_{21} = 2 \\ u_2 + v_4 = c_{24} = 9 \\ u_3 + v_2 = c_{32} = 5 \\ u_3 + v_4 = c_{34} = 6 \end{cases}$$

令自由变量 $u_1 = 0$ ，将其代入方程组，得：

$u_1 = 0$ ，$v_3 = 4$ ，$v_4 = 11$ ，$u_3 = -5$ ，$v_2 = 10$ ，$u_2 = -2$ ，$v_1 = 4$ ，将其代入非基变量检验数：$\sigma_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ ，得：

$\sigma_{11} = C_{11} - (u_1 + v_1) = 4 - (0 + 4) = 0$

$\sigma_{12}=C_{12}-(u_1+v_2)=12-(0+10)=2$

$\sigma_{22}=C_{22}-(u_2+v_2)=10-(-2+10)=2$

$\sigma_{23}=C_{23}-(u_2+v_3)=3-(-2+4)=-1$

$\sigma_{31}=C_{31}-(u_3+v_1)=8-(-5+4)=9$

$\sigma_{33}=C_{33}-(u_3+v_3)=11-(-5+4)=12$

与闭回路法计算的结果相同。

四、解的改进（用闭回路法调整）

在使用最小元素法求得的初始方案中，由于 $\sigma_{24}<0$ ，说明当前方案不是最优，需要改进或调整。见表 1 中非基变量 x_{24}所在的闭回路，调整量为 $\varepsilon=\min\{2,6\}=2$ 。调整过程见表 2 ：

表 1

销地 / 产地	B_1		B_2		B_3		B_4		产量
A_1		4		12	**10**	4	**6**	11	16
A_2	**8**	2		10	**2**	3		9	10
A_3		8	**14**	5		11	**8**	6	22

表 2

销地 / 产地	B_1		B_2		B_3		B_4		产量
A_1		4		12	**10+2**	4	**6-2**	11	16
A_2	**8**	2		10	**2-2**	3	**0**+2	9	10
A_3		8	**14**	5		11	**8**	6	22

表 3

销地 / 产地	B_1		B_2		B_3		B_4		产量
A_1		4		12	**12**	4	**4**	11	16
A_2	**8**	2		10		3	**2**	9	10
A_3		8	**14**	5		11	**8**	6	22

调整后的结果如表 3 所示，此结果正好与使用伏格尔法求得的结果相同，因此最优性检验过程同前，由于非基变量的检验系数都大于等于零，因此该方案是最优方案，最优解为：

$x_{13}=12$ ，$x_{14}=4$ ，$x_{21}=8$ ，$x_{24}=2$ ，$x_{32}=14$ ，$x_{34}=8$ 。将最优解代入到目标函数中，得总运费为（目标函数值）：

$$\max Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}=12\times4+4\times11+8\times2+2\times9+14\times5+8\times6=244$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/577040052034010012