

常用函数傅里叶变换应用举例

1,

- 计算  $\frac{1}{|b|} \text{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos 2\pi f_0 x$  :

- 利用卷积定理和上述常用函数傅里叶变换可得:

$$F\left\{\frac{1}{|b|} \text{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos 2\pi f_0 x\right\} = \frac{1}{|b|} F\left\{\text{sinc}\left(\frac{x}{b}\right)\right\} F\{\cos 2\pi f_0 x\}$$

$$= \text{rect}(bf_x) [\delta(f_x - f_0) + \delta(f_x + f_0)] = \begin{cases} 0 & \frac{1}{b} < 2f_0 \\ \delta(f_x - f_0) + \delta(f_x + f_0) & \frac{1}{b} > 2f_0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{|b|} \text{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos 2\pi f_0 x = F^{-1}\left\{F\left\{\frac{1}{|b|} \text{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos 2\pi f_0 x\right\}\right\}$$

$$= F\{\delta(f_x - f_0) + \delta(f_x + f_0)\}$$

$$= \cos 2\pi f_0 x \quad \frac{1}{b} > 2f_0$$

44

2,

- 若实常数  $|b| < |a|$

- 试计算

$$\text{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = |b| \text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$$

计算:

$$F^{-1}\left\{F\left\{\text{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}\right\} =$$

$$F^{-1}\left\{F\left\{\text{sinc}\left(\frac{x}{b}\right)\right\} F\left\{\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}\right\} =$$

$$F^{-1}\{ab | \text{rect}(bf_x) \text{rect}(af_x)\} =$$

$$F^{-1}\{a|b| \text{rect}(af_x)\} =$$

$$|b| \text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$$

1.3 对一个空间不变线性系统，脉冲响应为

$$h(x, y) = \text{sinc}(x) \text{sinc}(y)$$

试用频域方法对下面每一个输入  $f_i(x, y)$ ，求其输出  $g_i(x, y)$ 。(必要时，可取合理近似)

(1)  $f(x, y) = \cos(\pi x)$

$$g(x, y) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x, y) h(x, y)\}\} = \mathcal{F}\{\cos(\pi x) \delta(y)\}$$

答：

$$\mathcal{F}\{\cos(\pi x) \text{rect}\left(\frac{f}{x}\right)\} = \mathcal{F}\{\cos(\pi x)\} \cos(\pi x)$$

(2)  $f(x, y) = \cos(\pi x) \text{rect}\left(\frac{x}{x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y}\right)$

答：

$$g(x, y) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x, y) h(x, y)\}\} = \mathcal{F}\{\cos(\pi x) \text{rect}\left(\frac{x}{x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y}\right) \delta(y)\}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\pi x) \text{sinc}\left(\frac{75f}{x}\right) \text{sinc}\left(\frac{f}{y}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y}\right)\}$$

(3)  $f(x, y) = \cos(\pi x) \text{rect}\left(\frac{x}{x}\right)$

$$g(x, y) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{\cos(\pi x) \text{rect}\left(\frac{x}{x}\right) \delta(y)\}\}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\pi x) \text{sinc}\left(\frac{75f}{x}\right) \delta\left(\frac{f}{y}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{x}\right)\}$$

答：

$$\mathcal{F}\{\delta(x) \delta\left(\frac{f}{x}\right) \delta\left(\frac{f}{y}\right) \text{sinc}\left(\frac{75f}{x}\right) \delta\left(\frac{f}{y}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{x}\right)\}$$

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}\left(\frac{75f}{x}\right) \delta\left(\frac{f}{y}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{x}\right)\} = \mathcal{F}\{\text{sinc}\left(\frac{75f}{x}\right) \delta\left(\frac{f}{y}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{x}\right)\}$$

(4)  $f(x, y) = \text{comb}(x) \text{rect}(x) \text{rect}(y)$

答：

$$g(x,y) = F_x \text{comb}\left(\frac{x}{3}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{50}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{50}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{50}\right)$$

$$F_x \text{comb}\left(\frac{f_x}{3}\right) \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \text{sinc}\left(\frac{f_x}{50}\right) \text{sinc}\left(\frac{f_y}{50}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y}{50}\right)$$

$$F_x = \delta\left(\frac{f_x}{3}\right) \cdot \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \cdot \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \cdot \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \cdot \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y}{50}\right)$$

$$F_x = 0.25 \delta\left(\frac{f_x}{3}\right) \cdot \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \cdot \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \cdot \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \cdot \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \cdot \delta\left(\frac{f_x}{50}\right) \cdot \cos(2\pi x) \cdot \cos(6\pi x)$$

- 给定一个不变线性系统，输入函数是有限延伸的三角波

$$g(x) = \left[ \frac{1}{3} \text{comb}\left(\frac{x}{3}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{50}\right) \right] * \Lambda(x)$$

对下列传递函数，用图解法确定系统输入函数的频谱，传递函数、输出函数的频谱，以及系统的输出。

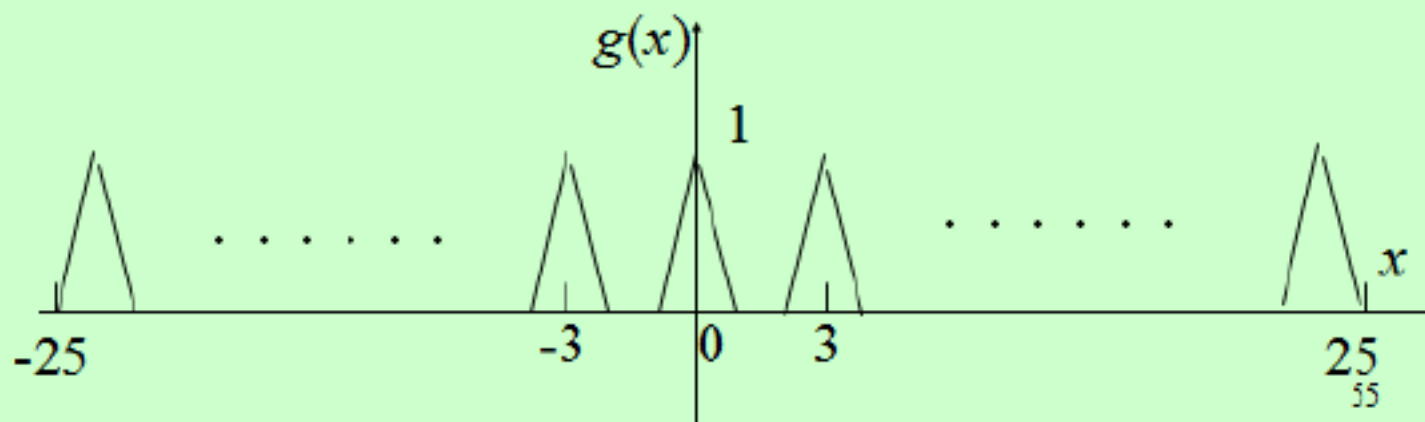
$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) - \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$$

输入:  $g(x) = \left[ \frac{1}{3} \text{comb}\left(\frac{x}{3}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{50}\right) \right] * \Lambda(x)$

间隔为3的  
脉冲阵列，  
基频为1/3

在有限空间  
区域不为零，  
 $|x| < 25$

三角波，  
底宽为2



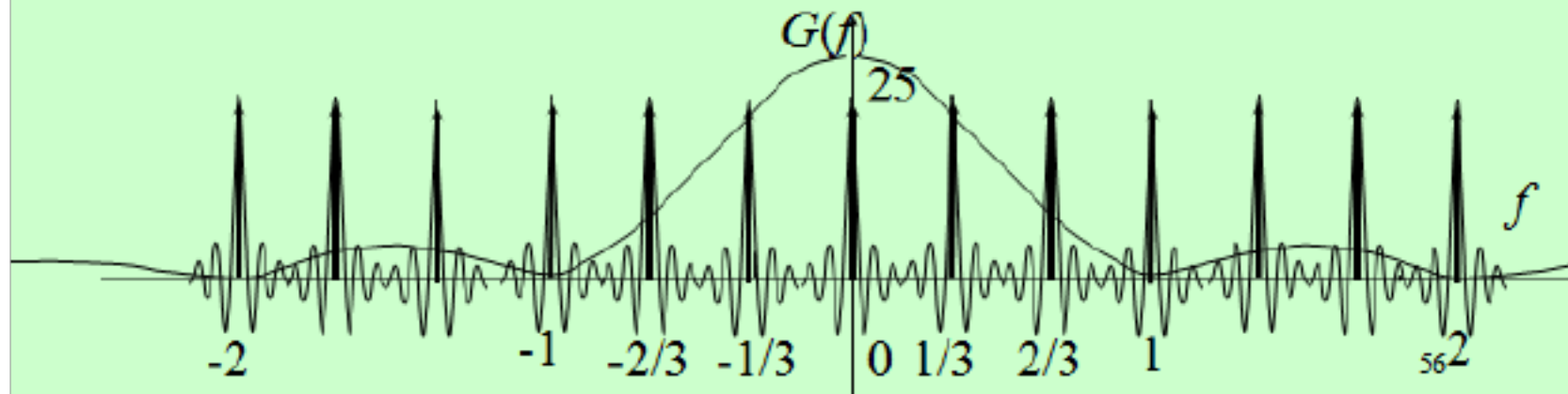
输入:  $g(x) = \left[ \frac{1}{3} \text{comb}\left(\frac{x}{3}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{50}\right) \right] * \Lambda(x)$

输入  
频谱:  $G(f) = 50 \left[ \text{comb}(3f) * \text{sinc}(50f) \right] \bullet \text{sinc}^2(f)$

↑  
间隔为1/3  
的脉冲阵列

↑  
窄带谱,  
半宽1/50

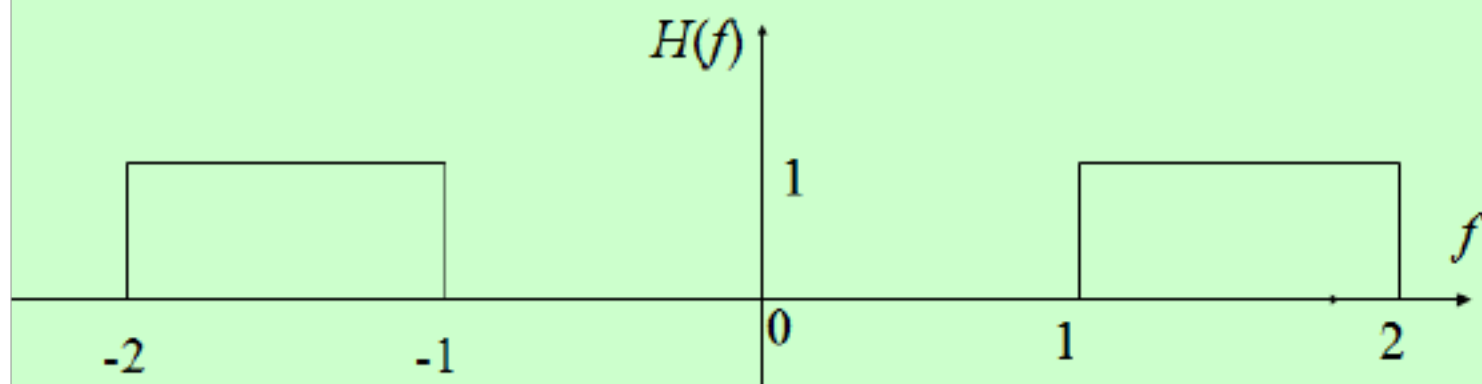
↑  
包络,  
半宽为1



传递  
函数

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) - \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$= \text{rect}(f - 1.5) + \text{rect}(f + 1.5)$$



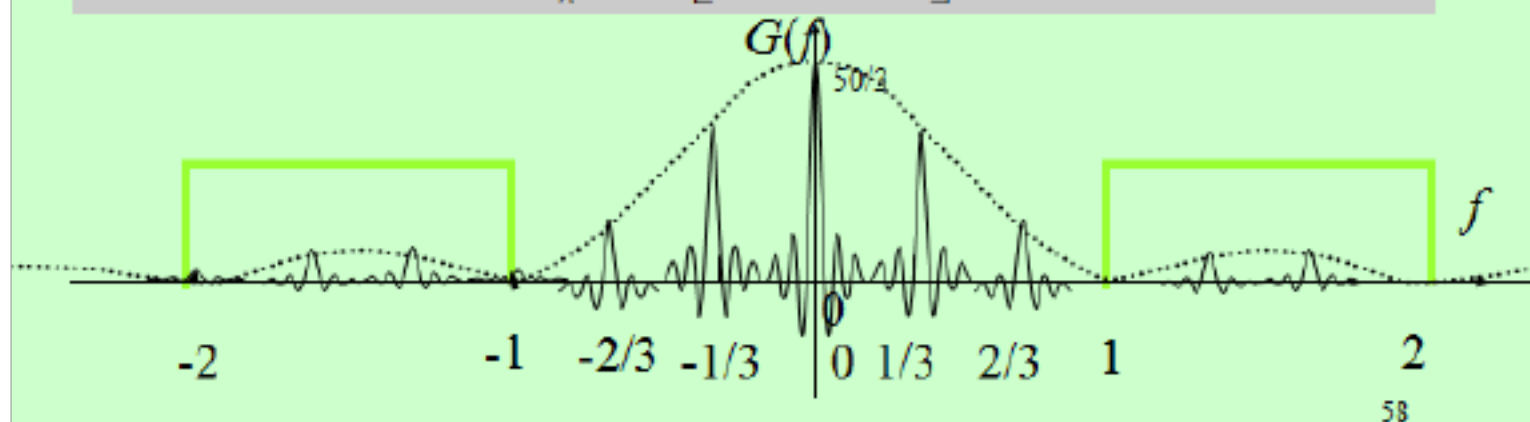
## 二维线性不变系统

$$H(f) = \text{rect}(f - 1.5) + \text{rect}(f + 1.5)$$

$$G(f) = \frac{50}{3} [3\text{comb}(3f) * \text{sinc}(50f)] \bullet \text{sinc}^2(f)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{3}\right) = \frac{50}{3} \text{sinc}^2(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left[50\left(f - \frac{n}{3}\right)\right]$$

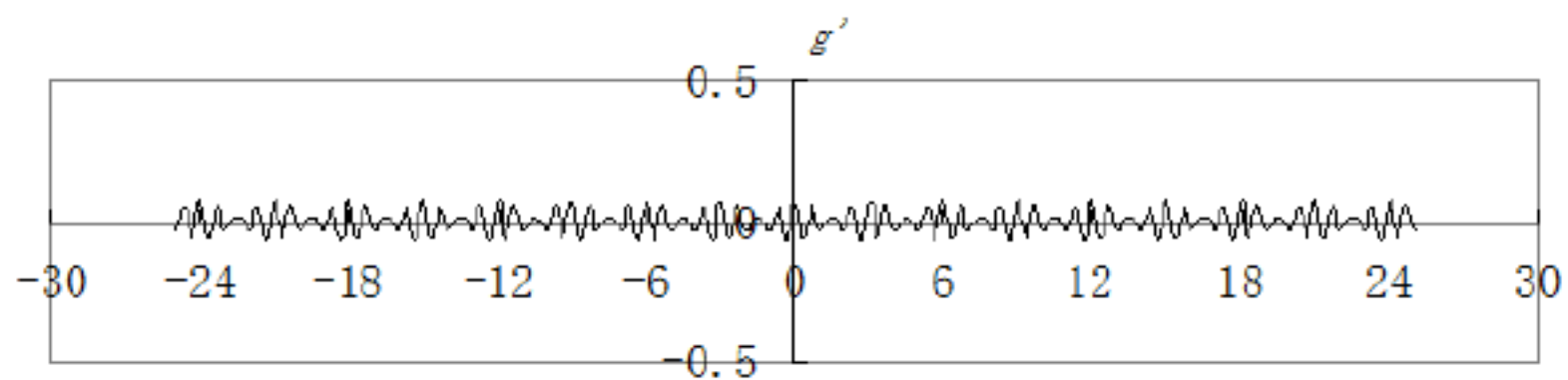
$$G'(f) \approx \frac{50}{3} \text{sinc}^2(f) \sum_n \text{sinc}\left[50\left(f - \frac{n}{3}\right)\right] \quad (n = -5, -4, 4, 5)$$



58

$$G'(f) \approx \frac{50}{3} \text{sinc}^2(4/3) \text{sinc}(50f) * [\delta(f + 4/3) + \delta(f - 4/3)] \\ + \frac{50}{3} \text{sinc}^2(5/3) \text{sinc}(50f) * [\delta(f + 5/3) + \delta(f - 5/3)]$$

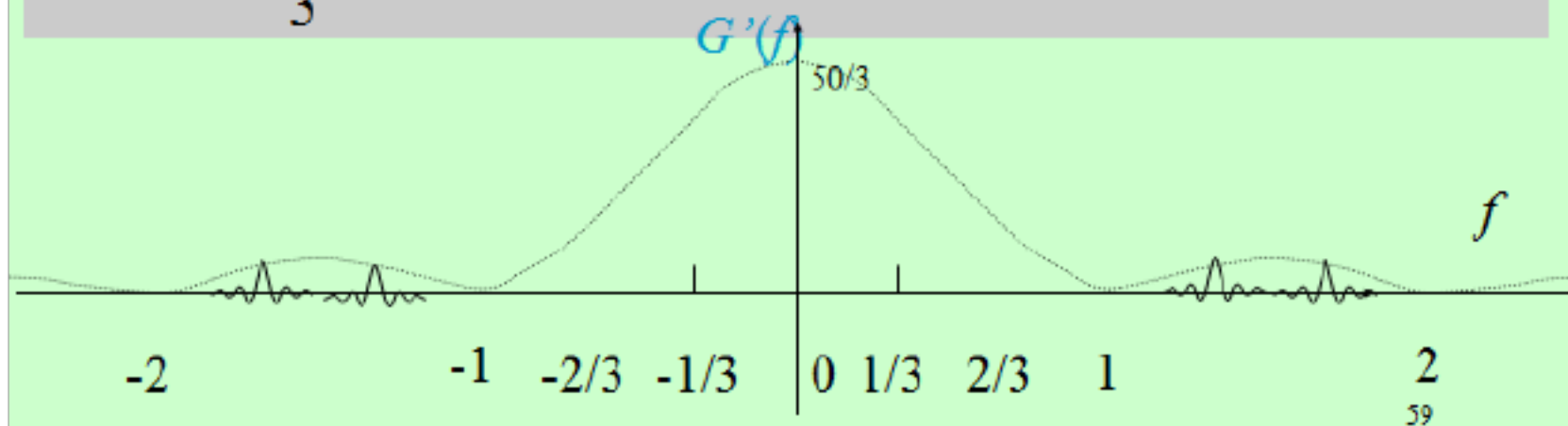
输出: 
$$g'(x) = \left[ \frac{9}{32\pi^2} \cos\left(\frac{8\pi}{3}x\right) + \frac{9}{50\pi^2} \cos\left(\frac{10\pi}{3}x\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{50}\right)$$



## 输出频谱:

$$G'(f) \approx \frac{50}{3} \text{sinc}^2(f) \sum_n \text{sinc} \left[ 50 \left( f - \frac{n}{3} \right) \right] \quad (n = -5, -4, 4, 5)$$

$$G'(f) \approx \frac{50}{3} \text{sinc}^2(4/3) \text{sinc}(50f) * [\delta(f + 4/3) + \delta(f - 4/3)] \\ + \frac{50}{3} \text{sinc}^2(5/3) \text{sinc}(50f) * [\delta(f + 5/3) + \delta(f - 5/3)]$$



1.1 已知不变线性系统的输入为

$$g(x) = \text{comb}(x)$$

系统的传递函数  $\Lambda \frac{f}{b}$ 。若  $b$  取 (1)  $b = 1$ ，(2)  $b = 2$ ，求系统的输出  $g'(x)$ 。并

画出输出函数及其频谱的图形。

答: (1)  $g'(x) = F \delta(x)$  图形从略,

$$(2) g'(x) = F \left[ \delta\left(\frac{f}{2}\right) - \delta\left(\frac{f}{2} - 1\right) - \delta\left(\frac{f}{2} + 1\right) \right] \cos(\pi x) \quad \text{图形从略。}$$

- 若二维不变线性系统的输入是“线脉冲”  $f(x, y) = \delta(x)$ ，系统对线脉冲的输出响应称为线响应  $L(x)$ 。如果系统的传递函数为  $H(f_x, f_y)$ ，求证：线响应的一维傅里叶变换等于系统传递函数沿  $f_x$  轴的截面  $H(f_x, 0)$  分布。

- 证明：
- 线脉冲实质上也是二维的函数，只是沿  $y$  方向函数值不变，是常数1。

$$f(x, y) = \delta(x) \times 1$$

- 系统对线脉冲的输出响应，即线响应也是二维的函数，可表示为

$$L(x) = L\{\delta(x)\} = \delta(x) * h(x, y)$$

- 线响应的一维傅里叶变换则为

$$F\{L(x)\} = F\{\delta(x) * h(x, y)\} = \delta(f_y) H(f_x, f_y) = H(f_x, 0)$$

- 这就是系统传递函数沿  $f_x$  轴的截面分布
- 证毕。

- 如果一个空间不变线性系统的传递函数在频域的区域  $|f_x| \leq B_x$ ， $|f_y| \leq B_y$  之外恒为零，系统输入为非限带函数  $g_0(x, y)$ ，输出为  $g'(x, y)$ 。证明，存在一个由脉冲的方形阵列构成的抽样函数  $g_0'(x, y)$ ，它作为等效输入，可产生相同的输出  $g'(x, y)$ ，并请确定  $g_0'(x, y)$ 。

- 设系统的传递函数为  $H(f_x, f_y)$ ，因为它在频率域的区域  $|f_x| \leq B_x$ ， $|f_y| \leq B_y$  之外恒为零，故有

$$H(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B_x}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y}{2B_y}\right)$$

- 输入函数的空间频谱为  $A_0(f_x, f_y)$ ，输出函数的空间频谱则可化为

$$\begin{aligned} A_i(f_x, f_y) &= A_0(f_x, f_y) H(f_x, f_y) \\ &= A_0(f_x, f_y) H(f_x, f_y) \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B_x}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y}{2B_y}\right) \\ &= A_0(f_x, f_y) \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B_x}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y}{2B_y}\right) H(f_x, f_y) \end{aligned}$$

- 新的函数的空间频谱可以定义为

$$A_0''(f_x, f_y) = A_0(f_x, f_y) \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B_x}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y}{2B_y}\right)$$

- 新的函数显然是限带输入函数，且它通过同样系统会得到同样的输出，这样一个限带输入函数是可以满足抽样定理的，因此可以抽样得到需要的可作为等效输入的由脉冲的方形阵列构成的抽样函数

- 但是上面只得出了其频谱，我们可以用反变换的方法得到原函数

$$\begin{aligned}
 U_0''(x, y) &= F^{-1} \{ A_0''(f_x, f_y) \} \\
 &= F^{-1} \{ A_0(f_x, f_y) \} * F^{-1} \left\{ \text{rect} \left( \frac{f_x}{2B_x} \right) \text{rect} \left( \frac{f_y}{2B_y} \right) \right\} \\
 &= U_0(x, y) * 4B_x B_y \text{sinc}(2B_x x) \text{sinc}(2B_y y) \\
 &= \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi, \eta) 4B_x B_y \text{sinc}[2B_x(x - \xi)] \text{sinc}[2B_y(y - \eta)] d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

- 对上式用二维梳状函数进行抽样就得到本题要求的点阵等效输入函数：

$$\begin{aligned}
 U_0'(x, y) &= U_0''(x, y) \text{comb}(2B_x x) \text{comb}(2B_y y) \\
 &= U_0''(x, y) \frac{1}{4B_x B_y} \sum_m \sum_n \delta \left( x - \frac{n}{2B_x} \right) \delta \left( y - \frac{n}{2B_y} \right) \\
 &= \sum_m \sum_n \left[ \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi, \eta) \text{sinc}(n - 2B_x \xi) \text{sinc}(m - 2B_y \eta) d\xi d\eta \right] \delta \left( x - \frac{n}{2B_x}, y - \frac{n}{2B_y} \right)
 \end{aligned}$$

1.2 若限带函数  $f(x, y)$  的傅里叶变换在长度  $L$  为宽度  $W$  的矩形之外恒为零，

- (1) 如果  $|a| \leq \frac{L}{2}$ ,  $|b| \leq \frac{W}{2}$ , 试证明

$$\frac{1}{|ab|} \text{sinc} \frac{x}{a} \text{sinc} \frac{y}{b} * f(x, y) = f(x, y)$$

$$F \{ f(x, y) \} = F \{ f(x, y) \text{rect} \frac{x}{L}, \frac{y}{W} \} * F \{ \text{rect} \frac{x}{L}, \frac{y}{W} \}$$

证明：

$$f(x, y) = F^{-1} \{ F \{ f(x, y) \text{rect} \frac{x}{L}, \frac{y}{W} \} * \frac{1}{|ab|} \text{sinc} \frac{x}{a} \text{sinc} \frac{y}{b} \} = f(x, y)$$

- (2) 如果  $|a| > \frac{L}{2}$ ,  $|b| > \frac{W}{2}$ , 还能得出以上结论吗？



答：不能。因为这时  $F\{f(x,y)\} = \text{rect}\left(\frac{f_x}{L}, \frac{f_y}{W}\right)$   $F\{f(x,y)\} = \text{rect}\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right)$ 。

1.5 若对二维函数

$$h(x,y) = \text{sinc}(ax)$$

抽样，求允许的最大抽样间隔并对具体抽样方法进行说明。

答：  $F\{h(x,y)\} = F\{\text{sinc}(ax)\} = \Lambda\left(\frac{f_x}{a}\right) \delta(f_y)$

$$X = \frac{1}{B_x} = \frac{1}{a} ; Y = \dots$$

也就是说，在 X 方向允许的最大抽样间隔小于  $1/2a$ ，在 y 方向抽样间隔无限制。

1.6 若只能用  $a \times b$  表示的有限区域上的脉冲点阵对函数进行抽样，即

$$g_s(x,y) = g(x,y) \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$$

试说明，即使采用奈奎斯特间隔抽样，也不能用一个理想低通滤波器精确恢复  $g(x,y)$ 。

答：因为  $a \times b$  表示的有限区域以外的函数抽样对精确恢复  $g(x,y)$  也有贡献，不可省略。

已知一平面波的复振幅表达式为

$$U(x, y, z) = A \exp[j(4x - 3y + 4z)]$$

试计算其波长以及沿各方向的空间频率并给出在  $z = 5\text{mm}$  的垂直于  $z$  轴的平面上的复振幅分布 ( $\lambda \in (0.3\mu, 1.0\mu)$ )。

解：由于  $2\pi f_x = 4$ ,  $2\pi f_y = -3$ ,  $2\pi f_z = 4$

所以  $f_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda} \rightarrow \cos\alpha = \frac{\lambda}{2\pi} 4$

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 (4^2 + 3^2 + 4^2) = 1$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{41}} = 0.98\mu$$

因而系数圆频率  $4, -3, 4$  的单位是  $k$  (弧度)/ $\text{mm}$ ，对应的空间频率为

$$f_x = \frac{2}{\pi} = 0.64k \text{ l/mm}, \quad f_y = -0.48k \text{ l/mm}, \quad f_z = 0.64k \text{ l/mm} \quad 39$$

在  $z = 5\text{mm}$  的垂直于  $z$  轴的平面上的复振幅分布为

$$U(x, y, 5) = A \exp[j(4x - 3y) \times 10^3] \exp[j2 \times 10^4]$$

式中  $x, y$  的单位为毫米

2.1 一列波长为  $\lambda$  的单位振幅平面光波，波矢量  $k$  与  $x$  轴的夹角为  $45^\circ$ ，与  $y$  轴夹角为  $60^\circ$ ，试写出其空间频率及  $z = z_1$  平面上的复振幅表达式。

答：  $f_x = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$ ,  $f_y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $U_{x,y,z_1} = \exp jkz_1 \exp j2\pi \frac{\sqrt{3}}{2\lambda} x + \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} y$   $U(0,0,0)$

2.2 尺寸为  $a \times b$  的不透明矩形屏被单位振幅的单色平面波垂直照明，求出紧靠屏后的平面上的透射光场的角谱。

答：  $U_{x,y} = \text{rect} \frac{x}{a} \text{rect} \frac{y}{b}$ ,  $A \frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}$   $\text{sinc} a \frac{\cos\alpha}{\lambda} \text{sinc} b \frac{\cos\beta}{\lambda}$ ,

2.3 波长为  $\lambda$  的单位振幅平面波垂直入射到一孔径平面上,在孔径平面上有一个足够大

的模板,其振幅透过率为  $t(x) = \cos \frac{\pi x}{\lambda}$ , 求紧靠孔径透射场的角谱。

答:

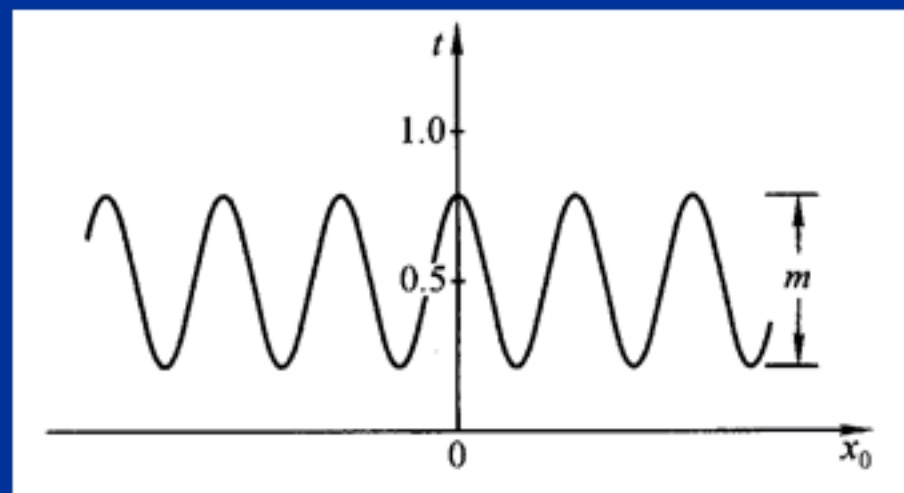
$$A \frac{\cos \alpha}{\lambda} \frac{\cos \beta}{\lambda} \cdot \delta \left( \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda} \right) \cdot \delta \left( \frac{\cos \alpha}{\lambda} \right) \delta \left( \frac{\cos \beta}{\lambda} \right)$$

$$\cdot \delta \left( \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda} \right) \cdot \delta \left( \frac{\cos \alpha}{\lambda} \right) \delta \left( \frac{\cos \beta}{\lambda} \right)$$

### 例一、余弦型振幅光栅夫琅和费衍射的光强分布

余弦型振幅光栅处于一个宽度为  $l$  的方孔内,光栅空间频率为  $f_0$ , 透过率调制为  $m$ , 其透过率函数图示为:

$$t(x_0, y_0) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_0) \right] \text{rect} \left( \frac{x_0}{l} \right) \text{rect} \left( \frac{y_0}{l} \right)$$



余弦型光栅振幅透过率函数

- 余弦型振幅光栅的透过率函数可表示为

$$t(x_0, y_0) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f_0 x_0) \right] \text{rect}\left(\frac{x_0}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{l}\right)$$

- 根据余弦函数及矩形函数的傅里叶变换对和 $\delta$ 函数及傅里叶变换的性质，可得光栅的频谱为

$$T(f_x, f_y) = \frac{l^2}{2} \text{sinc}(lf_y) \left\{ \text{sinc}(lf_x) + \frac{m}{2} \text{sinc}[l(f_x + f_0)] + \frac{m}{2} \text{sinc}[l(f_x - f_0)] \right\}$$

- 夫琅和费衍射图的复振幅分布为

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{j\lambda z} \exp(jkz) \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \cdot T(f_x, f_y)_{f_x=\frac{x}{\lambda z}, f_y=\frac{y}{\lambda z}} \\ &= \frac{l^2}{j2\lambda z} \exp(jkz) \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \text{sinc}\left(\frac{ly}{\lambda z}\right) \\ &\quad \cdot \left\{ \text{sinc}\left(\frac{lx}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x + f_0\lambda z)\right] + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x - f_0\lambda z)\right] \right\} \end{aligned}$$

17

由  $\text{sinc}$  函数的分布可知，每个  $\text{sinc}$  函数的主瓣的宽度正比于  $\frac{1}{l}$ ，而由上式可见，这三个函数主瓣之间的距离为  $f_0$ ，若光栅频率比  $f_0$  大得多，即光栅的周期  $d = \frac{1}{f_0}$  比光栅的尺寸小得多，那么三个函数（主瓣）之间不存在交叠，那么平方时不存在交叉项，因而

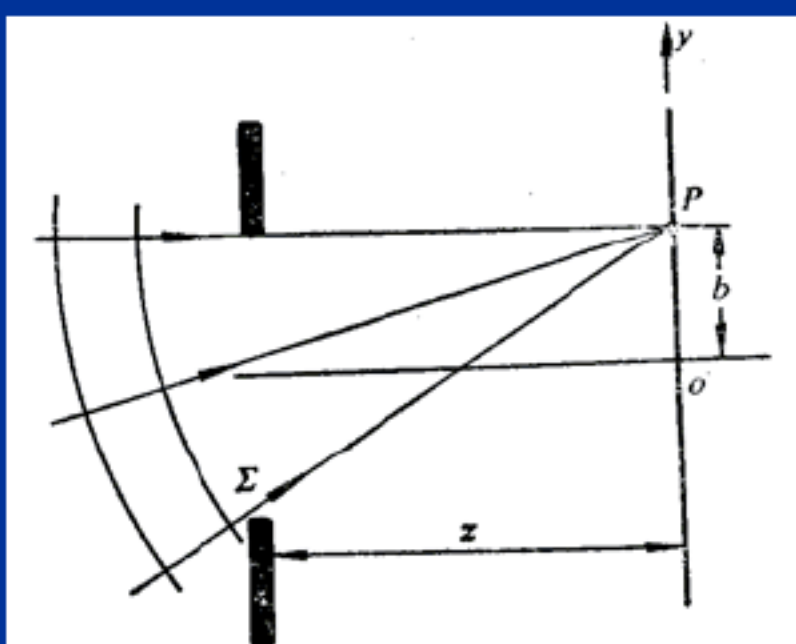
$$\begin{aligned} I(x, y) &= \left(\frac{l^2}{2\lambda z}\right)^2 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{ly}{\lambda z}\right) \\ &\quad \cdot \left\{ \text{sinc}^2\left(\frac{lx}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x + f_0\lambda z)\right] + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x - f_0\lambda z)\right] \right\} \end{aligned}$$

因而，用平面波照明的光栅后方光能量重新分布，其能量只集中在三个衍射级上

显然傅里叶分析方法比传统的光程差分析方法要简捷得多

## 菲涅耳衍射举例

- 图中向  $P$  点会聚的单色球面波照明孔径  $\Sigma$ ， $P$  点位于孔径后面距离为  $z$  的观察平面上，坐标为  $(0, b)$ 。
- 假定观察平面位于菲涅耳衍射区内，试证明，观察平面上的强度分布是以  $P$  点为中心的孔径的夫琅和费衍射图样。



20

- 在孔径平面上建立直角坐标  $(x_0, y_0)$  与  $(x, y)$  坐标系相平行，则向  $P$  点会聚的照明球面波在孔径平面上的入射光场可以记做

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{A \exp[-jk r(x_0, y_0)]}{r(x_0, y_0)}$$

- 其中  $r(x_0, y_0) = \sqrt{z^2 + x_0^2 + (y_0 - b)^2}$   
指数上取二项式近似，分母上只对强度有影响，只须取一阶近似

$$r(x_0, y_0) \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x_0}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y_0 - b}{z} \right)^2 \right] \quad \text{和} \quad r(x_0, y_0) \approx z$$

- 向  $P$  点会聚的照明球面波在孔径平面上的入射光场可以简化为

$$U_0(x_0, y_0) = \frac{A}{z} \exp[-jkz] \exp \left[ -j \frac{k}{2z} [x_0^2 + (y_0 - b)^2] \right] \quad 21$$

- 设孔径的振幅透过率函数为  $t(x_0, y_0)$ ，则在会聚光照明下透过孔径的光场分布为

$$U(x_0, y_0) = \frac{A}{z} \exp[-jkz] \exp\left[-j \frac{k}{2z} [x_0^2 + (y_0 - b)^2]\right] \times t(x_0, y_0)$$

- 透射光场分布在观察平面上的菲涅耳衍射光场分布可以由菲涅耳衍射公式计算出：

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{z} \exp[-jkz] \\ \times \exp\left[-j \frac{k}{2z} [x_0^2 + (y_0 - b)^2]\right] \times t(x_0, y_0) \times \exp\left[j \frac{k}{2z} (x_0^2 + y_0^2)\right] \\ \times \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y)\right] dx_0 dy_0$$

22

- 进一步作代数的化简得

$$U(x, y) = \frac{A}{j\lambda z^2} \exp\left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2 - b^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0, y_0) \\ \times \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 (y - b))\right] dx_0 dy_0$$

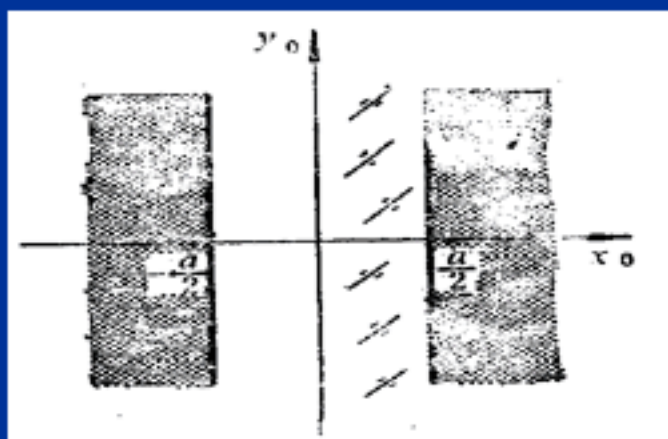
- 其强度分布是

$$I(x, y) = |U(x, y)|^2 \\ = \left(\frac{A}{\lambda z^2}\right)^2 \left| \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0, y_0) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 (y - b))\right] dx_0 dy_0 \right|^2$$

- 可见强度分布是以  $P$  点为中心的孔径的夫琅和费衍射图样。

## 课堂练习

- 如下图所示的宽度为  $a$  的单狭缝，它的左右两半部分之间引入位相差  $\pi$ 。采用单位振幅单色平面波垂直照明，
- 求距离为  $z$  的观察平面上的夫琅和费衍射的强度分布。试画出沿  $x$  方向的截面上的强度分布图。



24

- 左右两半部分之间引入位相差的单狭缝可以表示为两个缝宽一半的单狭缝之和

$$t(x_0, y_0) = \text{rect}\left(\frac{x_0 - \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right) + \exp(j\pi) \text{rect}\left(\frac{x_0 + \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right)$$

- 采用单位振幅单色平面波垂直照明时，距离为  $z$  的观察平面上的夫琅和费衍射为该狭缝的傅里叶变换

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \int \int_{-\infty}^{\infty} t(x_0, y_0) \\ &\quad \times \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0 \\ &= \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \text{rect}\left(\frac{x_0 - \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_0 + \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right) \right] \\ &\quad \times \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0 \end{aligned}$$

25

2.4

- 在利用常用函数的傅里叶变换表的时候，必须建立观察面坐标与频率坐标之间的关系

$$f_x = \frac{x}{\lambda z}, \quad f_y = \frac{y}{\lambda z}$$

- 进而夫琅和费衍射可以表示为

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \mathcal{F}\left\{ \text{rect}\left(\frac{x_0 - \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right) - \text{rect}\left(\frac{x_0 + \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right) \right\}_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}}$$

- 利用傅氏变换的相似性定理和位移定理就可以求出衍射的复振幅分布，进而用复振幅的模平方可以算出夫琅和费衍射的强度分布

- 省掉常系数，夫琅和费衍射的强度分布为

$$\begin{aligned}
 I(x, y, z) &\propto \left| \mathbb{F} \left\{ \text{rect} \left( \frac{x_0 - \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}} \right) - \text{rect} \left( \frac{x_0 + \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}} \right) \right\}_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}} \right|^2 \\
 &= \left( \frac{a}{2} \right)^2 \text{sinc}^2 \left( \frac{a}{2} f_x \right) \left| \exp \left( j 2 \pi \frac{a}{4} f_x \right) - \exp \left( -j 2 \pi \frac{a}{4} f_x \right) \right|^2 \\
 &= \left( \frac{a}{2} \right)^2 \text{sinc}^2 \left( \frac{a}{2} f_x \right) \left| \cos \left( \frac{a \pi}{2} f_x \right) + j \sin \left( \frac{a \pi}{2} f_x \right) - \left[ \cos \left( \frac{a \pi}{2} f_x \right) - j \sin \left( \frac{a \pi}{2} f_x \right) \right] \right|^2 \\
 &= a^2 \text{sinc}^2 \left( \frac{a}{2} f_x \right) \sin^2 \left( \frac{a \pi}{2} f_x \right)
 \end{aligned}$$

参看图 2.13，边长为  $a$  的正方形孔径内再放置一个边长为  $a$  的正方形掩模，其中中心落在  $(x_0, y_0)$  点。采用单位振幅的单色平面波垂直照明，求出与它相距为  $z$  的观察平面上夫琅和费衍射图样的光场分布。画出  $f_x = 0$  时，孔径频谱在  $x$  方向上的截面图。

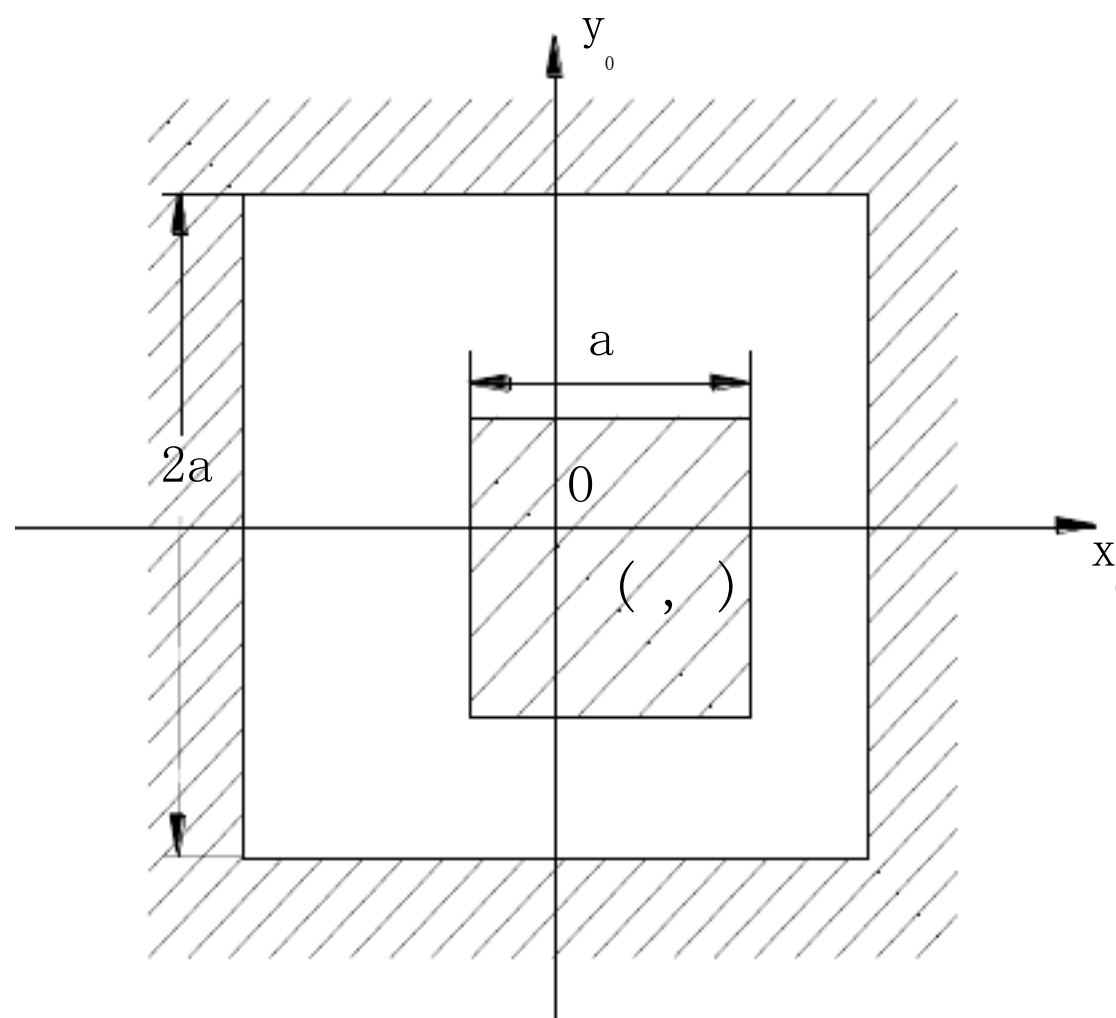


图 2.4 题



$$\text{答: } t_{x,y} = \text{rect}\frac{x}{a} \text{rect}\frac{y}{a} \text{rect}\frac{x-\xi}{a} \text{rect}\frac{y-\eta}{a}$$

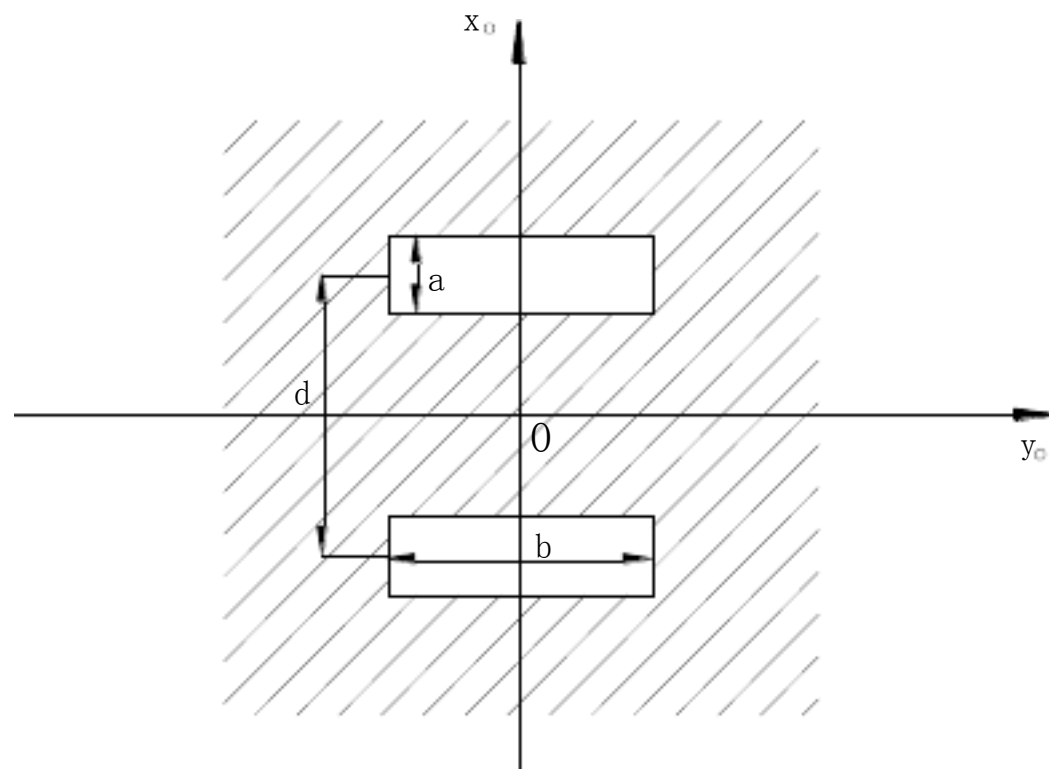
$$F\{t_{x,y}\} = a \text{sinc}2af_x \text{sinc}2af_y \text{exp}\{-j2\pi a(f_x \xi + f_y \eta)\}$$

$$U_{x,y} = \frac{1}{j\lambda z} \text{exp}\{jkz\} \text{exp}\{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\}$$

$$= a \text{sinc}2a\frac{x}{\lambda z} \text{sinc}2a\frac{y}{\lambda z} \text{exp}\{-j2\pi a\frac{x}{\lambda z} \xi - j2\pi a\frac{y}{\lambda z} \eta\}$$

$$I_{x,y} = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \left| a \text{sinc}2a\frac{x}{\lambda z} \text{sinc}2a\frac{y}{\lambda z} \text{exp}\{-j2\pi a\frac{x}{\lambda z} \xi - j2\pi a\frac{y}{\lambda z} \eta\} \right|^2$$

- 2.5 图 2-14 所示的孔径由两个相同的矩形组成，它们的宽度为  $a$ ，长度为  $b$ ，中心相距为  $d$ 。采用单位振幅的单色平面波垂直照明，求与它相距为  $z$  的观察平面上夫琅和费衍射图样的强度分布。假定  $b \gg a$  及  $d \gg a$ ，画出沿  $x$  和  $y$  方向上强度分布的截面图。如果对其中一个矩形引入位相差  $\phi$ ，上述结果有何变化？



图题 2.5 (1)

答：如图所示，双缝的振幅透射率是两个中心在  $(0, \frac{d}{2})$  及  $(0, -\frac{d}{2})$  的矩形孔径振幅透射率之和：

$$t(x_0, y_0) = \text{rect}\left(\frac{y_0}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{x_0}{b}\right) \quad \text{rect}\left(\frac{y_0}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{x_0}{b}\right) \quad (1)$$

由于是单位振幅平面波垂直照明，孔径平面上入射光场

$$U_0(x_0, y_0) = 1,$$

透射光场

$$U(x_0, y_0) = U_0(x_0, y_0) t(x_0, y_0) = \text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right) \quad \text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right) \quad (2)$$

由夫琅和费衍射方程，在夫琅和费区中离孔径距离  $z$  的观察平面上得到夫琅和费衍射图样  $U(x, y)$ ，它正比于孔径上场分布的傅立叶变换式（频率坐标  $f_x = \frac{x}{z}$ ,  $f_y = \frac{y}{z}$ ），即

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz) \exp\left[-j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right]}{jz} \mathcal{F}\{U(x_0, y_0)\} \quad (3)$$

利用傅立叶变换的相移定理，得到

$$\mathcal{F}\{U(x_0, y_0)\} = \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right)\right\} = \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\right\} \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right)\right\}$$

$$= ab \text{sinc}\left(\frac{af_x}{z}\right) \text{sinc}\left(\frac{bf_y}{z}\right) \left[\exp(-j\frac{f_x d}{z}) \exp(j\frac{f_y d}{z})\right]$$

$$= 2ab \text{sinc}\left(\frac{ax}{z}\right) \text{sinc}\left(\frac{by}{z}\right) \cos\left(\frac{dy}{z}\right)$$

把它带入 (3) 式，则有

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz) \exp\left[-j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right]}{jz} 2ab \text{sinc}\left(\frac{ax}{z}\right) \text{sinc}\left(\frac{by}{z}\right) \cos\left(\frac{dy}{z}\right)$$

强度分布

$$I(x, y) = \frac{2ab^2}{z} \text{sinc}^2 \frac{ax}{z} \text{sinc}^2 \frac{by}{z} \cos^2 \frac{dy}{z}$$

不难看出，这一强度分布是矩孔径衍射图样和双光束干涉图样相互调制的结果。

双缝的振幅透射率也可以写成下述形式：

$$t(x_0, y_0) = \text{rect} \frac{x_0}{a} \text{rect} \frac{y_0}{b} \cos^2 \frac{x_0, y_0}{2} \frac{d}{2} \quad (4)$$

它和（1）式本质上是相同的。由（4）式可以利用卷积定理直接求出其傅立叶变换式，导出与上述同样的结果。代入所给条件  $b=4a, d=1.5a$

$$I(x, y) = \frac{8a^2}{z} \text{sinc}^2 \frac{ax}{z} \text{sinc}^2 \frac{4ay}{z} \cos^2 \frac{1.5ay}{z}$$

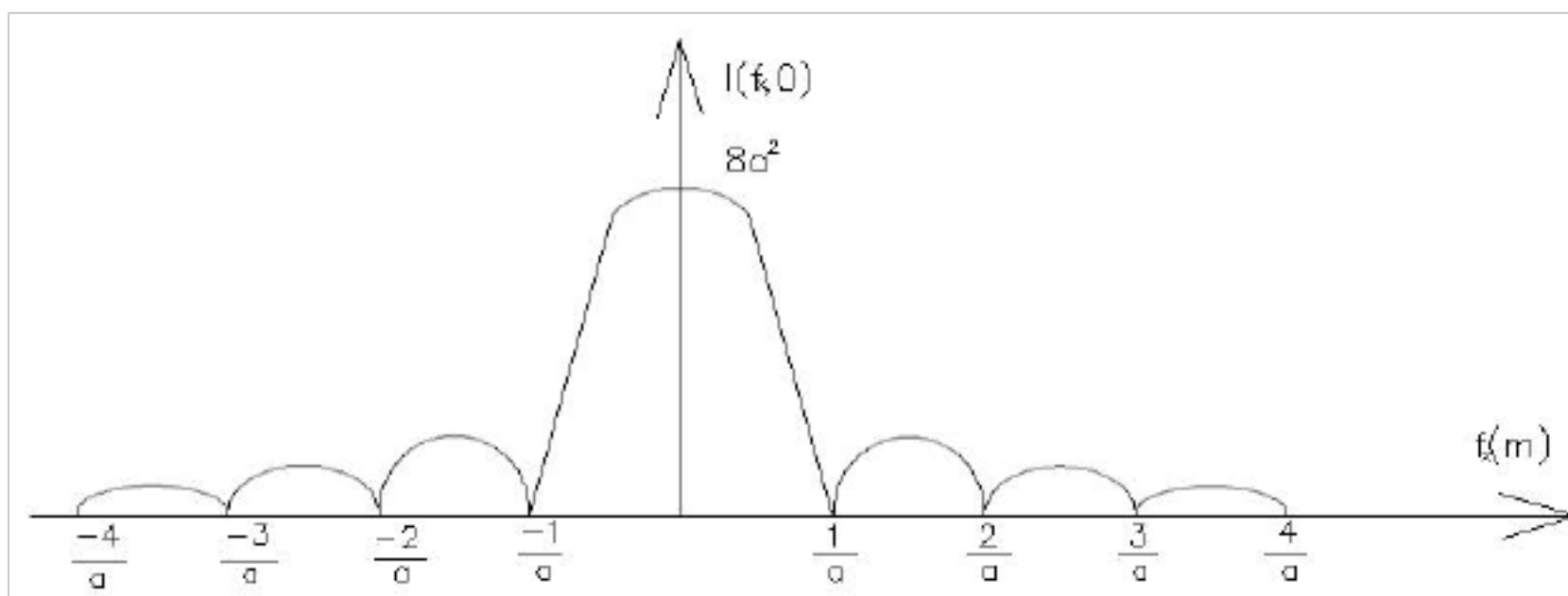
沿  $x$  轴，此时  $f_y = 0$

$$I(f_x, f_y) = 8a^2 \text{sinc}^2 af_x$$

中心光强： $I(0, 0) = 8a^2$

极小值位置为： $f_x = \frac{n}{a}$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

$x$  方向上强度分布的截面图示意如下：



图题 2.5 (2)

沿 y 轴:

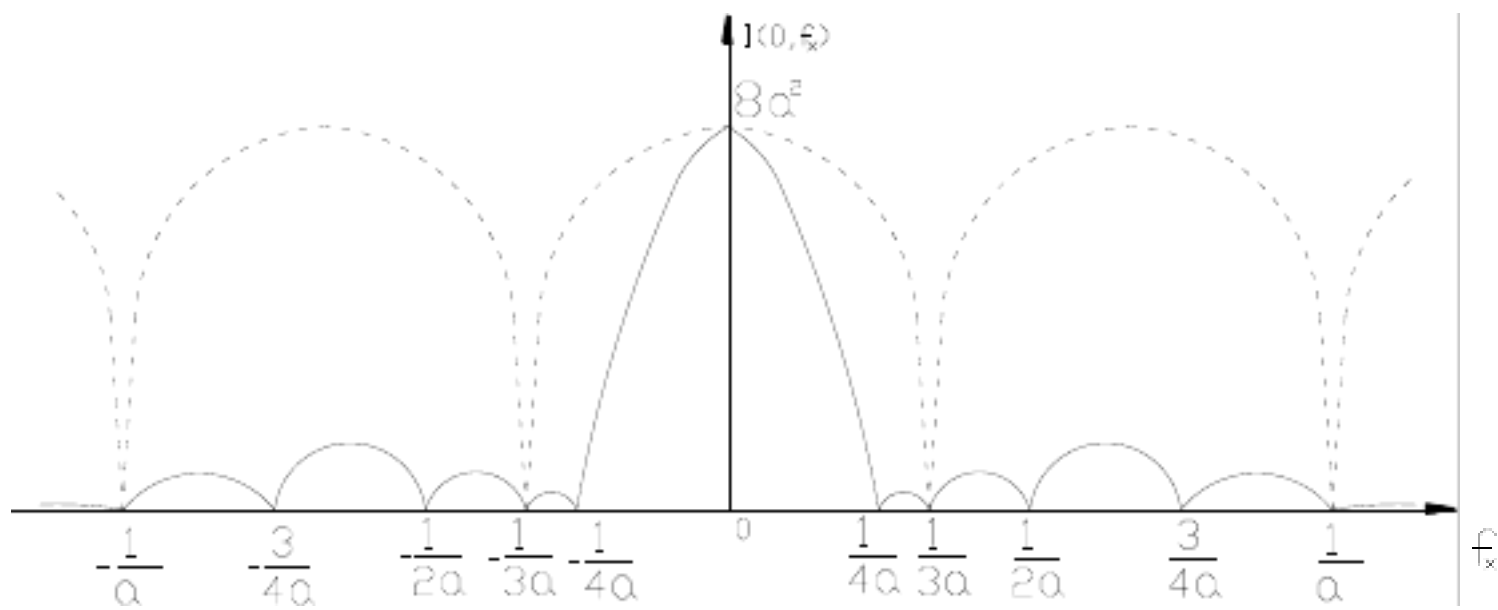
此时  $f_x = 0$ , 故

$$I(f_x, f_y) = 8a^2 \text{sinc}^2(4af_y) \cos^2(1.5af_y)$$

中心光强:  $I(0, 0) = 8a^2$

极小值位置:  $f_y = \frac{n}{4a}$  及  $f_y = \frac{1}{3a} + \frac{2n}{3a}$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

y 方向上强度分布的截面图示意如下:



图题 2.5 (3)

$$t(x_0, y_0) = \text{rect} \frac{x_0}{a} \text{rect} \frac{y_0}{b} \exp \left[ j \frac{\pi}{2} (x_0^2 + y_0^2) \right]$$

$$\text{rect} \frac{x_0}{a} \text{rect} \frac{y_0}{b} \exp \left[ j \frac{\pi}{2} (x_0^2 + y_0^2) \right]$$

$$\text{rect} \frac{x_1}{a} \text{rect} \frac{y_1}{b} \exp \left[ j \frac{\pi}{2} (x_1^2 + y_1^2) \right]$$

由于是单位振幅平面波垂直照明, 孔径平面上入射光场

$$U_0(x_1, y_1) = 1,$$

透射光场,  $b=4a, d=1.5a$  时

$$U(x_1, y_1) = U_0(x_1, y_1) t(x_1, y_1)$$

$$\text{rect} \frac{x_1}{a} \text{rect} \frac{y_1}{b} \exp(jkz) \text{rect} \frac{x_1}{a} \text{rect} \frac{y_1}{b} \quad (2)$$

$$\text{rect} \frac{x_1}{a} \text{rect} \frac{y_1 - 0.75a}{4a} \exp(jkz) \text{rect} \frac{x_1}{a} \text{rect} \frac{y_1 - 0.75a}{4a}$$

由夫琅和费衍射方程，在夫琅和费区中离孔径距离  $z$  的观察平面上得到夫琅和费衍射图样  $U(x, y)$ ，它正比于孔径上场分布的傅立叶变换式（频率坐标  $f_x = \frac{x}{z}$ ,  $f_y = \frac{y}{z}$ ），即

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz) \exp(j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2))}{jz} F U(x_0, y_0) \quad (3)$$

利用傅立叶变换的相移定理，得到

$$F U(x_0, y_0) = F \text{rect} \frac{x_0}{a} \text{rect} \frac{y_0 - 0.75a}{4a} \exp(jkz) = F \text{rect} \frac{x_0}{a} \text{rect} \frac{y_0 - 0.75a}{4a}$$

$$8a^2 \text{sinc}(af_x) \text{sinc}(4af_y) \exp(1.5j \pi f_y) \exp(jkz) = 8a^2 \text{sinc}(af_x) \text{sinc}(4af_y) \exp(1.5j \pi f_y)$$

$$8a^2 \text{sinc}(af_x) \text{sinc}(4af_y) \exp(1.5j \pi f_y - jkz) \exp(1.5j \pi f_y)$$

把它带入 (3) 式，则有

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/577050026065010002>