

第一讲 概率的定义及性质

I 授课题目

- § 1.0 概率论研究的对象
- § 1.1 随机试验
- § 1.2 样本空间、随机事件
- § 1.3 频率与概率, 概率的性质

II 教学目的与要求

- 1、理解随机试验、随机事件、必然事件、不可能事件等概念
- 2、理解样本空间、样本点的概念,会用集合表示样本空间和事件
- 3、掌握事件的基本关系与运算
- 4、掌握概率的性质

III 教学重点与难点

重点: 事件的基本关系与运算, 概率的性质

难点: 用集合表示样本空间和事件

IV 讲授内容:

§ 1.0 概率论研究的对象

一 两类现象---确定现象与不确定现象

先从实例来看自然界和社会上存在着两类不同的现象.

例1 水在一个大气压力下,加热到 100°C 就沸腾.

例2 向上抛掷一个五分硬币,往下掉.

例3 太阳从东方升起.

例4 一个大气压力下, 20°C 的水结冰.

例 1,例 2,例 3 是必然发生的,而例 4 是必然不发生的.

个确切结果)称之为确定性现象或必然现象.微积分,线性代数等就研究必然现象的数学工具.与此同时,在自然界和人类社会中,人们还发现具有不同性质的另一类现象先看下面实例.

例5 用大炮轰击某一目标,可能击中,也可能击不中.

例6 在相同的条件下,抛一枚质地均匀的硬币,其结果可能是正面(我们常把有币值的一面称作正面)朝上,也可能是反面朝上.

例7 次品率为50%的产品,任取一个可能是正品,也可能是次品.

例8 次品率为1%的产品,任取一个可能是正品,也可能是正品.

例 5~例 8 这类现象归纳起来可以看作在相同条件下一系列的试验或观察,而每次试验或观察的可能结果不止一个,在每次试验或观察之前无法预知确切结果,即呈现出不确定性(即这些现象的结果事先不能完全确定),这一类型现象我们称之为不确定性现象或偶然现象,也称之为随机现象.

二 统计规律性、概率论研究的对象

对于不确定性现象,人们经过长时期的观察或实践的结果表明,这些现象并非是杂乱无章的,而是有规律可寻的.例如,大量重复抛一枚硬币,得正面朝上的次数与正面

朝下的次数大致都是抛掷总次数的一半.在大量地重复试验或观察中所呈现出的固有规律性,就是我们以后所说的统计规律性.而概率论正是研究这种随机(偶然)现象,寻找他们的内在的统计规律性的一门数学学科.

概率论是数理统计的基础,由于随机现象的普遍性,使得概率与数理统计具有及其广泛的应用.另一方面,广泛的应用也促进概率论有了极大的发展.

§ 1.1 随机试验

对随机现象进行的试验或观察称为随机试验,简称试验,它具有下列特性(征):

- (1) 试验可以在相同条件下重复进行;
- (2) 试验的所有可能结果是明确可知的,并且不止一个;
- (3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在一次试验之前不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

随机实验记为E.

例1 E1:投掷一枚硬币,观察正反面朝上的情况.

它有两种可能的结果就是“正面朝上”或“反面朝上”,投掷之前不能预言哪一个结果出现,且这个试验可以在相同的条件下重复进行,所以 E1 是一个随机试验.

例2 E2: 掷一颗骰子, 观察出现的点数.

它有 6 种可能的结果就是“出现 1 点”, “出现 2 点” $\cdots$, “出现 6 点”.但在投掷之前不能预言哪一个结果出现,且这个试验可以在相同的条件下重复进行,所以 E2 是一个随机试验.

例3 E3: 在一批灯泡中任意抽取一只, 测试他的寿命.

我们知道灯泡的寿命(以小时计) $t \geq 0$,但在测试之前不能确定它的寿命有多长,这一试验也可以在相同的条件下重复进行,所以E3 是一个随机试验.

§ 1.2 样本空间、 随机事件

对随机试验我们感兴趣的是试验结果.随机试验E 的每一个可能的结果,称之为基本事件,它是不能再分的最简单的事件.因为随机试验的所有结果是明确的,从而所有的基本事件也是明确的,我们把随机试验 E 的所有基本事件所组成的集合(全体)叫做试验E 的样本空间,通常用字母 Ω 表示, Ω 中的点,即基本事件.有时也称做样本点,常用 ω 表示.

例4 试验 E2: 投掷一枚硬币.

“正面朝上”和“反面朝上”是 E1 的基本事件,所以样本空间 $\Omega = \{\text{正}, \text{反}\}$.

例5 试验 E2: 掷一颗骰子.

令 i 表示“出现 i 点”. ($i=1, 2, \cdots, 6$), 是E2 的基本事件,所以样本空间 $\Omega = \{1, 2, \cdots, 6\}$.

例6 试验 E3: 测试灯泡寿命.

令 t 表示“测得灯泡寿命为 t 小时”, 则 $0 \leq t < +\infty$ 是 E3 的基本事件,所以 $\Omega = \{t | 0 \leq t < +\infty\}$.

例 7 一个盒子中有十个相同的球, 但 5 个是白色的, 另外 5 个是黑色的,

搅匀后从中任意摸取一球。

令 $\omega_1 = \{\text{取得白球}\}$, $\omega_2 = \{\text{取得黑球}\}$, 则 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ 。

例 8 试验 E4: 将一硬币抛掷两次。

则 $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$ 。其中 (正, 正) 表示“第一次正面朝上, 第二次正面朝上”, 余类推。

例 9 一个盒子中有十个完全相同的球, 分别标以号码 1, 2, ..., 10, 从中任取一球, 令 $i = \{\text{取得球的标号为 } i\}$, 则 $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ 。

在随机试验中, 有时关心的是带有某些特征的基本事件是否发生。如在例 5 中 E2 试验, 我们可以研究

A 表示“出现 2 点”即 $A = \{\text{出现 2 点}\}$

B 表示“出现偶数点”

C 表示“出现的点数 ≤ 4 ”

这些结果是否发生?

在例 9 中, 我们可以研究

$D = \{\text{球的标号}=6\}$

$E = \{\text{球的标号是偶数}\}$

$F = \{\text{球的标号} \leq 5\}$

这些结果是否发生?

其中 A 是一个基本事件, 而 B 是由 {出现 2 点}, {出现 4 点} 和 {出现 6 点} 这三个基本事件组成的, 当且仅当这三个基本事件中有一个发生, B 发生。所以 B, C, E, F 是由若干个有某些特征的基本事件所组成的, 相对与基本事件, 就称她们是复合事件。无论是基本事件还是复合事件, 它们在试验中发生与否, 艘带有随机性, 所以都叫随机事件或简称事件, 今后我们常用大写字母 A, B, C 等表示事件。

我们已经知道样本空间 Ω 包含了全体基本事件, 而任一随机事件不过是有某些特征的基本事件所组成, 所以从集合论的观点来看, 任一随机事件不过是样本空间 Ω 的一个子集而已, 而且时间发生, 当且仅当子集中的一个样本点发生。如在例 5 中, 随机事件 A、B、C 都是 Ω 的子集, 它们可以简单地表示为

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

$C = \{1, 2, 3, 4\}$

在例 9 中

$\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ $D = \{6\}$, $E = \{2, 4, 5, 8, 10\}$

$F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

事件 D 只含一个试验结果, 而在事件 E 和 F 中各含 5 个可能的试验结果。所以我们可以这样说, 只包含一个试验结果的事件为基本事件, 由两个或两个以上基本事件复合而成的事件为复合事件。

在试验 E 中必然会发生的事情叫必然事件, 不可能发生的事情叫不可能事件, 例如例 5E2 中“点数不大于 6”是必然事件, “点数大于 6”是不可能事件, 因

为 Ω 是所有基本事件所组成的，因而在任一次试验中，必然会出现 Ω 中的某一基本事件 ω ，即 $\omega \in \Omega$ 。也就是在试验中， Ω 必然会发生，所以今后用 Ω 来代表必然事件，类似地，空集 Φ 可以看作是 Ω 的子集，它在任一次试验中都不会发生，所以 Φ 是不可能事件。必然事件和不可能事件的发生与否，已经失去了今后研究的方便，我们把它当作一种特殊的随机事件。

小结 将随机事件表示成由样本点组成的集合，就可以将事件间的关系和运算归结为集合之间的关系和运算，这不仅对研究事件的关系和运算是方便的，而且对研究随机事件发生的可能性大小的数量指标—概率的运算也是非常有益的。

三 事件之间的关系和运算

一个样本空间 Ω 中，可以有很多的随机事件。概率论的任务之一，是研究随机事件的规律，通过对简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律。为此，下面我们引进事件之间的一些重要关系和运算，通过研究事件间的各种关系，进而研究事件间的概率的各种关系，就有可能利用较简单事件的概率去推算较复杂的事件的概率。

在以下的叙述中，设试验 E 的样本空间为 Ω ，还给了 Ω 中的一些事件，如 $A, B, A_k (k=1, 2, \dots)$ 等等。

（一）事件的包含及相等

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A ，或称事件 A 是事件 B 的特款（子事件），记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ，比如在例 5 中， $A=\{2\}$ ， $B=\{2, 4, 6\}$ ，显然 $A \subset B$ 。

如果将事件用集合表示，则 A 是 B 的子事件即为 A 是 B 的子集合（ B 包含集合 A ）。用图 1.1 (a) 给包含关系一个直观的几何解释，设样本空间 Ω 是一个正方形，园 A 与园 B 分别表示事件 A 与事件 B ，由于 A 中的点全在 B 中，所以事件 B 包含事件 A 。

如果有 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$ 。易知，相等的两个事件 A, B ，总是同时发生或同时不发生，亦即 $A=B$ 等价于它们是由相同的试验结果构成的。

如在例 9 中，若 $A=\{\text{球的标号为偶数}\}$ ， $B=\{\text{球的标号为 } 2, 4, 6, 8, 10\}$ ，则显然有 $A=B$ ，所谓 $A=B$ ，就是 A, B 中含有相同的样本点。

对任一事件 A ，有 $\Phi \subset A \subset \Omega$ 。

（二）事件的和（并）

“二事件 A 与 B 中至少有一个事件发生”，这样的—个事件叫做事件 A 与 B 的和（或并），记作 $A \cup B$ （或 $A+B$ ）。

$A \cup B$ 是由所有包含在 A 中的或包含在 B 中的试验结果构成。

如果将事件用集合表示，则事件 A 与 B 的和事件 $A \cup B$ 即为集合 A 与 B 的并。如图 1.1 (b) 所示。

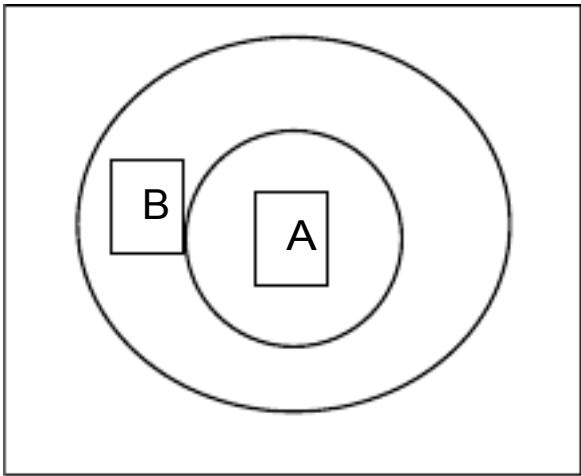
如在例 5 中， $A=\{2, 4, 6\}$ ， $B=\{1, 2, 3, 4\}$ 则 $C=A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$ 。

事件的和可推广到有限多个事件和可列（数）无穷多个事件的情形。

用 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots, A_i$ 中至少发生其一这一

事件，用 $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots$ 中至少发生其一这一事件。

（三）事件的积（交）



“二事件 **A** 与 **B** 同时发生”这样的事件称作事件**A** 与 **B** 的积（或变），记作 $A \cap B$ 或 AB 。 AB 是由既包含在 A 中又包含在 B 中的试验结果构成，它对应与图 1.1（c）中的阴影部分。

如在例 5 中， $A=\{2, 4, 6\}$ ， $B=\{1, 2, 3, 4\}$ ，则
 $C=A \cap B=\{2, 4\}$

如果将事件用集合表示，则事件**A** 与**B** 的积事件**C** 即为集合**A** 与 **B** 的交。类似地，也可以将事件的积推广到有限多个和可列（数）无穷多个事件的情况。

用 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生这一事件；用 $A_1 \cap A_2$

$\cap \dots$ 或表示 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots$ 同时发生的事件。

（四）事件的差

“事件 **A** 发生而事件 **B** 不发生”这样的事件称为事件 **A** 与 **B** 的差，记作 $A-B$ 。 $A-B$ 是由所有包含在 A 中而不包含在 B 中的试验结果构成，它对应于图 1.1（d）中的阴影部分。

比如例 5 中， $A=\{2, 4, 6\}$ ， $B=\{1, 2, 3, 4\}$ ，则 $C=A-B=\{6\}$ 。

由事件的差的定义可知，对于任意的事件**A**，有 $A-A=\Phi$ ， $A-\Omega=A$ ， $A-\Omega=\Phi$ 。

（五）事件的差

如果事件A与事件B不能同时发生，也就是说AB是一个不可能事件，即 $AB=\Phi$ ，则称二事件A与B是互不相容的（或互斥的）。A，B互不相容等价于它们不包含相同的试验结果。互不相容事件A与B没有公共的样本点，如图1.1（e）所示。

若用集合表示事件，则A，B互不相容即为A与B是不交的。

如果n个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中，任意两个事件不可能同时发生，即

$$A_i A_j = \Phi \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

则称这n个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是互不相容的（或互斥的）。在任意一个随机试验中基本事件都是互不相容的。还容易看出，事件A与 $B-A$ 是互不相容的。

（六）对立事件

若A是一个事件，令 $\bar{A} = \Omega - A$ ，称 $\bar{A}$ 是A的对立事件或逆事件。容易知道，在一次试验中，若A发生，则 $\bar{A}$ 必不发生（反之亦然），即A与 $\bar{A}$ 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即事件A与 $\bar{A}$ 满足条件

$$A \bar{A} = \Phi, \quad A \cup \bar{A} = \Omega.$$

$\bar{A}$ 由所有不包含在A中的试验结果构成，图1.1（f）中阴影部分表示 $\bar{A}$ 。

比如例5中， $A = \{2, 4, 6\}$ ， $B = \{1, 3, 5\}$ ，则 $\bar{A} = B$ ， $\bar{B} = A$ ，所以A，B互为对立事件。必然事件与不可能事件也是互为对立事件。

若A，B二事件是互为对立事件。则A，B必互不相容，但反之不真。

由事件关系的定义看出，它与集合的关系是一致的，因此集合的运算性质对事件的运算也都适用。

事件的运算法则：

1. 交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA.$$

2. 结合律

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

3. 分配律

$$A(B \cup C) = AB \cup AC$$

$$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$$

4. 对偶性

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

例10 掷一颗骰子的试验，观察出现的点数：事件A表示“奇数点”；B表示“点数小于5”；C表示“小于5的偶数点”。用集合的列举法表示下列事件： Ω ，

$A, B, C, A \cup B, A - B, AB, AC, C - A, \bar{A} \cap B.$

解 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\} \quad B = \{1, 2$

$, 3, 4\} \quad C = \{2, 4\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A - B = \{5\} \quad AB = \{1,$

$3\}$

$AC = \Phi$

$B - A = \{2, 4\}$

$\bar{A} \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

例11 设 A, B, C 是三事件，用 A, B, C 的运算关系表示下列事件：

(1) B, C 都发生，而 A 不发生。 $\bar{A}BC$

(2) A, B, C 中至少有一个发生。 $A \cup B \cup C$

(3) A, B, C 中恰有一个发生。 $\bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C}$

(4) A, B, C 中恰有两个发生。 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$

(5) A, B, C 中不多于一个发生。 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC$

(6) A, B, C 中不多于二个发生。 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

例 12 事件 A_i 表示某射手第 i 次 ($i=1, 2, 3$) 击中目标试用文字叙述下列事件：

(1) $A_1 \cup A_2$ 表示前二次中至少有一次击中目标；

(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 表示三次射击中至少有一次击中目标；

(3) $\bar{A}_3$ 表示第三次射击未击中目标；

(4) $A_2 - A_3 = A_2 \bar{A}_3$ 表示第二次射击目标而第三次射击目标未击中目标；

(5) $\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \bar{A}_2 \bar{A}_3$ 表示后两次射击均击中目标；

(6) $\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1 = \bar{A}_2 \bar{A}_1$ 表示前两次射击中至少有一次未击中目标。

§ 1.3 频率与概率

在相同的条件下,进行了n 次试验,在这n 次试验中,事件A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A/n 称为事件A 发生的频率,并记为 $f_n(A)$.

我们观察一个随机试验的各种事件，就其一次具体的试验而言，其结果带有很大的偶然性，似乎没有规律可言。但是在大量的重复试验中，频率 $f_n(A)$ 就可能呈现一定的规律性。就会发现某些事件发生的可能性大些，另外一些事件发生的可能性小些，而有些事件发生的可能性大些，而有些事件发生的可能性大致相同。比如一个口袋中装有 10 个球，其中 8 个红球，2 个白球。从中任意摸出一个球，则摸到红球的可能性就比摸到白球的可能性大。假如这 10 个球中的红球和白球都是 5 个，则摸到红球和摸到白球的可能性就大致相同。所以一个事件发生的可能性大小是它本身所固有的，不依人们的主观意志而改变的一种客观的度量。很自然，人们希望用一个数量来刻画事件发生的可能性大小，而且事件发生可能性大的，这个数就大，事件发生可能性小，这个数就小。

我们将刻画事件发生的可能性大小的数量指标称作该事件发生的概率，并用 $P(A)$ 表示事件A 发生的概率。

二 随机事件的概率，概率的统计定义

(一) 频率

概率的古典定义是以等可能性为基础的，但在很多实际问题中等可能性不一定成立。为了在一般情况下仍可用数量来描述事件发生的可能性大小，我们引进频率的概念。

定义 2 设事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次，比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

叫做事件A 在这 n 次试验中出现的频率。

试考察下面的例子：

例 14 在同样条件下，多次抛一硬币，考察“正面朝上”的次数。

投掷次数n	出现正面次数 n_A	频率 n_A/n
2048	1061	0.518
4040	2048	0.5068
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

例 15 一口袋中有 6 只乒乓球，其中 4 白，2 红。每次试验任取一球，观察颜色红作记录，放回袋中搅匀，再重复……

取球次数n	出现白球次数 n_A	频率 n_A/n
200	139	0.695

400	201	0.653
600	401	0.668

对例 14 例 15 进行分析：

例 14 中，频率在 0.5 附近摆动，当 n 增大时，逐渐稳定于 1/2；例 15 中，频率在 0.66 附近摆动，当n 增大时，逐渐稳定于 2/3。

经验表明，虽然在 n 次试验中，事件 A 出现的次数 n_A 不确定，因而事件 A 的

频率 n_A/n 也不确定，但是当试验重复多次时，事件 A 出现的频率具有一定的稳定性。

这就是说，当试验次数充分多时，事件A 出现的频率常在一个确定的数字附近摆动。这种频率的稳定性，说明随机事件发生的可能性大小是事件本身固有的。不依人们意志而改变的一种客观属性，那么用这个数字（常数）来刻划事件 A 发生的可能性大或小，这是比较恰当，这是我们下面将给出概率统计定义的客观基础。

易知频率具有下列性质：

- 性质一 $0 \leq f_n(A) \leq 1$
- 性质二 $f_n(\Omega)=1$
- 性质三 若 A, B 不相容，则
 $f_n(A \cup B)=f_n(A)+f_n(B)$

（二） 概率的统计定义

定义 3 在不变的一组条件下，重复作 n 次试验，事件 A 发生的频率 n_A/n 稳定地在某一常数P 附近摆动，且一般说来，n越大，摆动幅度越小，则称常数P 为事件 A 发生的概率，记作P（A）。

数值 P 即（P（A） 就是在一次试验中对事件A 发生的可能性大小的数量描述。例如，在例 14 中用 0.5 来描述掷一枚匀称硬币“正面朝上”出现的可能性，在例 15 中用 2/3 来描述摸出的一个乒乓球是白球出现的可能性。

注意两点：

- （1） 事件的频率与概率有本质区别，频率有随机波动性是变数，而概率是个常数。
- （2） 概率的统计定义只是一种描述，它指出了事件的概率是客观存在的。但并不能用这个定义计算P（A）。实际上，随着试验次数的增加，频率向概率靠近，因此当试验的次数 n 很大时，频率可以作为概率的近似值。

（三） 性质

由频率的性质，可得概率的性质

- 性质 1 对任一事件 A，有 $0 \leq P（A） \leq 1$
- 性质 2 设 Ω 为必然事件，则 $P（\Omega）=1$
- 性质 3 设 $A_1, A2, \cdots, An$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

三 概率的数学定义及其性质

前面讲了怎样针对不同的问题，分别用概率的古典定义，概率的统计定义来计算概率的方法。在当时解决了不少问题，但它们在理论上存在缺陷，应用上具有局限性。如古典概率型要求基本事件是等可能的，但在实际问题中往往不知道是否满足。而统计概率要求试验次数充分大，但究竟次数应该大到什么程度没有明确规定，因此都不能作为数学定义。但我们看到它们从各自的定义出发都是共同的属性（性质 1, 2, 3），这些从客观事实总结出来的共同属性，可以作为建立概率的数学理论的基础。

（C）定义

定义 4 设 E 是随机试验， Ω 是样本空间，若对于 E 的每一随机事件 A ，有确定的实数 $P(A)$ 与之对应，如果它满足下列条件：

1° 对于每一事件 A ，有 $0 \leq P(A) \leq 1$

2° $P(\Omega) = 1$

3° 对于两两互不相容的可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

称为概率的有限可加性。

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称为概率的可列可加性。

则实数 $P(A)$ 称为事件 A 的概率。

对以前讲过的古典定义，统计定义都满足这定义中的要求，因此它们都是这个一般定义范围内的特殊情形。

（二）性质

性质 1 设 $\bar{A}$ 是 A 的对立事件，则

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (1-2)$$

注意 若 $P(A)$ 不易算但可计算 $P(\bar{A})$ ，故 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

性质 2 $P(\Phi) = 0$

性质 3 设 A, B 为二事件，若 $A \subset B$ ，则

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

推论 若 $A \subset B$ ，则 $P(A) \leq P(B)$

性质 4 设 A, B 为二事件, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1-3)$$

推论 $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

性质 4 还可以用数学归纳法推广到任意有限个事件的情形:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j=2} P(A_i A_j) \\ &+ \sum_{i < j < k=3} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned} \quad (1-4)$$

特别地, 设 A_1, A_2, A_3 , 是三个事件, 则有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\ &P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) \end{aligned}$$

V 小结与提问:

本课题介绍了随机试验、随机事件、样本空间等概念, 还介绍了概率的定义;
提问: 由事件间的关系与运算, 一个复合事件的表示方式是否一定是唯一的?

VI 课外作业:

P32. 1, 2.

第二讲 古典概率

I 授课题目

§ 1.4 古典概型

II 教学目的与要求

- 1、了解频率与概率的统计定义
- 2、掌握古典概率的计算
- 3、了解概率的公理化定义，掌握用概率的性质求概率的方法

III 教学重点与难点

重点：用有关性质、定理、公式计算概率

难点：概率的计算

IV 讲授内容：

在概率论的发展历史上，人们曾针对不同的问题，从不同的角度给出里定义概率和计算概率的各种方法。，本节先介绍概率的古典定义、统计定义，最后将给出概率的数学定义及其性质。

§ 1.4 古典概型

在古代较早的时候，人们利用研究对象的物理或几何性质所具有的对称性确定了计算概率的一种方法，称为概率的古典定义。为此，先介绍一个概念。在有些随机试验中，每次试验可能发生的结果是有限的（样本空间中样本点的个数有限），由于某种对称性条件，使得每种试验结果发生的可能性是相等的（基本事件发生的可能性相等），则称这些事件是等可能的。

例如，在 § 1.1 例 4 抛掷硬币试验中，样本空间 $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$ 中有两个样本点 ω_0 (正面朝上) 和 ω_1 (反面朝上)，且 ω_0 和 ω_1 发生的可能性是相等的，因而可以规定 $P(\omega_0) = P(\omega_1) = 1/2$ 。又如抽样检查产品时，一批产品中每一个产品被抽到的可能性在客观上是相同的，因而抽到任一产品是等可能的。

在 § 1.1 例 9 中，样本空间 $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ ， Ω 中有 10 个样本点，且基本事件发生的可能性都相等。因而可以规定 $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{10\}) = 1/10$ 。

一般情况下，我们给出古典概型及古典概率定义如下：

(一) 定义

定义 1 如果随机试验 E 满足下述条件：

1. 试验结果的个数是有限的，即样本空间的元素（即基本事件）只有有限个，设 $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n\}$
2. 每个基本事件 $\{\omega_0\}, \{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}$ 的出现（发生）是等可能的。

则称这个问题为古典概型（或称这种数学模型为古典概型）。则任一随机事件 A 所包含的基本事件数K 与基本事件总数n 的比值，叫做随机事件A 的概率，记作P（A），即

$$P(A) = \frac{K}{N} = \frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \quad (1-1)$$

我们称由（1—1）给出的概率为古典概率，概率的这种定义，称为概率的古典定义。

对于古典概型应注意以下几点：

- （1）古典概型是学习概率统计的基础，因此它是非常重要的概率模型。
- （2）判断是否古典概型的关键是等可能性，而有限性较容易看出。但等可能性较难判定，一般在包含有 n 个元素的样本空间中，如果没有理由认为某些基本事件发生的可能性比另一些基本事件发生的可能性大时，我们就可以认为每个基本事件出现的可能性相等，即都等于 1/n。还有重要一点，是把事件A 包含的基本事件数，数准、数够。对于较简单情况，可以把试验E 的所有基本事件全列出，这样就容易应用公式（1—1）式求之。当 n 较大时，不可能全列出，这就要求读者具有分析想象能力，还应熟悉关于排列与组合的基本知识，事件间的关系及运算亦要熟，才能去计算古典概率。

（3）计算古典概率时，首先要判断有限性和等可能性是否满足：其次要弄清楚样本空间是怎样构成的。对于复杂问题只要求基本事件的总数 n，同时求出所讨论事件 A 包含的基本事件数h，再利用公式（1—1）计算出 P(A)。

下面举一些如何应用公式（1—1）计算概率的例子。

例 1 从一批由 45 件正品、5 件次品组成的产品中任取 3 件，求其中恰有 1 件次品的概率。

解 设所论事件为A，基本事件的总数为 $n = C_{50}^3$

事件 A 包含的基本事件数为 $h = C_5^1 C_{45}^2$

$$\text{所以 } P(A) = \frac{C_5^1 C_{45}^2}{C_{50}^3} \approx 0.252$$

例 2 一百个产品中有三个废品，任取五个，求其废品数分别为 0, 1, 2, 3 的概率。

解 基本事件总数 $n = C_{100}^5$

设事件 A_i ($i=0, 1, 2, 3$) 表示取出的五个产品中有 i 个废品， A_i 所包含的

$$\text{基本事件数 } k_i = C_3^i C_{97}^{5-i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\text{所以 } P(A_0) = C_5^5 / C_{97}^{100} = 0.856$$

$$P(A_1) = C_1^1 C_4^4 / C_{97}^{100} = 0.13806$$

$$P(A_2) = C_2^2 C_3^3 / C_{97}^{100} = 0.00588$$

$$P(A_3) = C_3^3 C_2^2 / C_{97}^{100} = 0.0000618$$

例3 甲乙丙三人去住三间房子. 求:

(1) 每间恰有一人的概率是多少?

(2) 空一间的概率是多少?

解 相当顾客去选房间, 每人选三间房可取, 故基本事件总数 (选法) 有 $n = 3^3 = 27$

(1) 每房一人, 甲有三间可选. 甲选定后, 乙只有二间可选. 丙无选择余地, 故 $k = 3 \times 2 \times 1 = 6$, 设 A 表示每房一人事件, 所以有 $P(A) = k/n = 6/27 = 2/9$

(2) 设空一间事件记为 B.

方法一 空一间房, 必有一间住了二人. 若甲先选有三种可取, 乙丙只能合住余下两间之一, 故 $k_1 = 3 \times 2 = 6$. 也可乙先选或丙先选, 于是

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = 6 + 6 + 6 = C_1^1 \times 3 \times 2 = 18, \text{ 故 } P(B) = k/n = 18/27 = 2/3.$$

方法二 三人中任二人结合, 有 C_2^3 种结合法, 分两组去选房

$$K = C_2^3 \times 3 \times 2 = 18, \text{ 所以 } P(B) = k/n = C_2^3 \times 3 \times 2 / 27 = 2/3$$

例4 设有 n 个不同的球, 每一球以等可能落入 $N (N \geq n)$ 个盒子中的每一个盒子里 (设每个盒子能容纳的球数是没有限制的) 设 $A = \{\text{指定的 } n \text{ 个盒子中各有一球}\}$, $B = \{\text{任何 } n \text{ 个盒子中恰有一球}\}$, $C = \{\text{某指定的一个盒子中恰有 } m (m \leq n) \text{ 个球}\}$. 求: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$.

解 每一个球都可以放进这 N 个盒子中的任一个盒子, 故有 N 种放法, n 个球放进 N 个盒子就有 N^n 种放法, 所以基本事件总数为 N^n .

(1) 今固定 n 个盒, 第一个球有 n 种放法, 第二个球有 $n-1$ 种放法, $\dots$, 第 n 个球有 1 种放法, 因此 A 包含的基本事件数为 $n!$, 所以 $P(A) = n! / N^n$.

(2) 因为任何 n 个盒可以从 N 个盒中任意选取, 共有 C_n^N 种选法, 选出这 n 个盒后, 再按 (1) 知事件 B 包含的基本事件数为

$$\frac{C_n n!}{N} = \frac{P_n}{N}, \text{ 所以 } P(B) = \frac{C_n n!}{N} / \frac{N^n}{X} = \frac{P_n}{N^n}.$$

(1) 因为 m 个球可以从 n 个球中任意选出, 共有 C_m^n 种选法, 其余 n-m 个

球可以任意落入其余的 N-1 个盒中, 共有 $(N-1)^{n-m}$ 种选法。根据乘法原理, 因此事

件 C 包含的基本事件数为 $C_m^n (N-1)^{n-m}$, 所以 $P(C) = \frac{C_m^n (N-1)^{n-m}}{N^n}$ 。

这个例子是古典概型中一个很典型的问题, 不少实际问题都可以归结为它。

例 5 袋中装有 10 个红球, 5 个白球, 从中一次随机地摸出 3 个球, 求摸出的 3 个球全是红球的概率, 摸出的全是白球的概率, 摸出的是一个红球, 二个白球的概率。

解 (1) 从 15 个球中随机地任取 3 个球所有可能取法有 C_{15}^3 种, 即基本

事件总数为 $n = C_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 / 3! = 455$ 。

设 $A = \{\text{所摸出的 3 个球全是红球}\}$

又红球有 10 个, 因此取 3 个都是红球的所有可能取法有 C_{10}^3 种, 即 A 包

含的基本事件数为 $k = C_{10}^3$, 所以 $P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = 14/91$ 。

(2) 设 $B = \{\text{所摸出的 3 个球全是白球}\}$

$$P(B) = k/n = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = 10/455 = 2/91$$

(2) 设 $C = \{\text{摸出的一个红球, 二个白球}\}$

$$P(C) = k/n = \frac{C_{10}^1 * C_5^2}{C_{15}^3} = 10 \times 10 / 455 = 20/91$$

例 6 盒子中有 6 只灯泡, 其中有 2 只次品, 4 只正品, 无放回地从中任取两次, 每次取一只, 求:

(1) 所取二只都是正品的概率;

(2) 取到二只中有一只是正品另一只是次品的概率;

解 无放回地取球, 取二次等价于一次任取二只, 即六个取二的组合

数 $n = C_6^2 = 15$, 这 15 种可能组合, 每组被取到的机会是均等的。

(1) 二只均正品, 相当从 4 只正品任取三只的组合数, 设所论事件为 A, 它包含的基本事件数为 $k = C_4^2 = 6$, 所以 $P(A) = k/n = 6/15 = 0.4$ 。

(2) 设所论事件为B，它所包含的基本事件数为 $K_1 = C_2^4 * C_1^2 = 8$,

所以 $P(B) = K_1 / n = 8/15 = 0.54$

例 7 把 1, 2, 3, 4, 5 的诸数各写在一张纸片上任取其中三个排成自左而右的次序。问：

(1) 所得三位数是偶数的概率是多少？

(2) 所得三位数不小于 200 的概率是多少？

解 从 5 个数中任取三个，这三个数不管怎么排列都是一个三位数，

故基本事件总数 $n = P_5^3 = 5 * 4 * 3 = 60$

(1) 设 $A = \{\text{三位数是偶数}\}$ ，偶数，必是“个”位数是 2 或 4，而“十”位，“百”位可任取，“个位”有 2 或 4 两种可能，于是“十”位是 4 种可能，“百”位有 3 种可能，所以A 包含的基本事件数 $k = 2 * 4 * 3 = 24$ ，故 $P(A) = 2 * 4 * 3 / 5 * 4 * 3 = 2/5$ 。

(2) 设 $B = \{\text{所得三位数不小于 200}\}$ ，百位数只要取 2, 3, 4, 5 之一，所组三位数必大于 200

$$K = 4 * 4 * 3$$

(百位数有 4 种可能取法，十位数有 4 种可能取法，个位数有 3 种可能取法)

故 $P(B) = k/n = 4 * 4 * 3 / 5 * 4 * 3 = 4/5$

例 8 把 10 本书任意地放在书架上。求其中指定的三本书放在一起的概率是多少？

解 设所论事件为 A，基本事件的总数为

$$n = P_{10}^{10} = 10!$$

下面求事件A 包含的基本事件数：

三本书必须排在一起的排法共有 $P_3^3 = 3!$ 种，如果将这 3 本书看作 1 本书，与剩下的 7 本书的所有排列共有 $P_8^8 = 8!$ 种，根据乘法原理，总共有 $P_3^3 * P_8^8 = 3! * 8!$ 种排法，所以 $k = P_3^3 * P_8^8 = 3! * 8!$

所以 $P(A) = 3! * 8! / 10! = 1/15 = 0.67$

例9 一袋中有 4 个白球，2 个红球，从袋中取二次，每一次取一个，求取到的两个球都是白球的概率？

设 $A = \{\text{取到的两个球都是白球}\}$

解 1) 有放回地抽取

由于每次抽取后均放回，因此每次都是从 6 个球中抽取

从 6 个球中任取 2 个的所有可能取法有 6^2 种，即基本事件总数

$$n=6^2$$

又白球有 4 个，因此取 2 个都是白球的所有可能取法有 4^2 种，即 A 包含的

基本事件数为 $k=4^2$

所以 $P(A) = 4^2/6^2 = 0.444$

2) 不放回地抽取]

方法一 (计顺序)

由于抽取后不放回，因此第一次从 6 个球中抽取。而第二次抽取只能在剩下的 5 个球中抽取，故基本事件总数

$$n=6 \times 5 = P_6^2$$

同理 A 包含的基本事件数 $k=4 \times 3 = P_4^2$

所以不放回抽取时

$$P(A) = P_4^2 / P_6^2 = 4 \times 3 / 6 \times 5 = 0.4$$

方法二 (不计顺序)

在 6 个球中取 2 球 (不计顺序) 的所有可能取法有 C_6^2 种，

故基本事件总数 $n = C_6^2$

同理，A 包含的基本事件数 $k = C_4^2$

所以 $P(A) = C_4^2 / C_6^2 = 0.4$

例 10 袋中有 10 个小球，4 个红的，6 个白的。今按取法 1 和取法 2 连续从袋中取 3 个球，按两种取法分别求下列事件的概率：

$A = \{3 \text{ 个球都是白的}\}$

$B = \{2 \text{ 个红的，1 个白的}\}$

其中 取法 1 每次抽取一个，看后放回袋中，再抽取下一个，这种取法称为放回抽样。

取法 2 每次抽取一个，不放回袋中，再抽取下一个，这种取法称为不放回抽样。

解 (1) 放回抽样

由于每次抽取的小球看过颜色后都放回袋中。因此，每次都是从 10 个小球中抽取。根据乘法原理，从 10 个小球中取 3 个的所有可能的取法共有 $10^3 = 1000$ 种，

即样本空间 Ω 中的元素个数为： $n=10^3$

若 A 发生，即 3 次取的都是白球，事件A 包含的基本事件数为

$$k=6^3$$

所以 $P(A)=k/n=6^3/10^3=0.216$

若 B 发生，即 3 次取的小球中有 2 次取的是红球，一次取的是白球，考虑到红球出现的次序，因此事件B 包含的基本事件数为：

$$K=C_3^2 \times 4^2 \times 6$$

所以 $P(B)=k/n=C_3^2 \times 4^2 \times 6/10^3=0.288$

(1) 不放回抽样

第一次从 10 个小球中抽取 1 个，由于不再放回，因此第二次从 9 个球中抽取 1 个，第三次从 8 个球中抽取 1 个，因而基本事件总数

$$n=P_{10}^3=10 \times 9 \times 8$$

类似讨论可知，事件A 包含的基本事件数

$$k=P_6^3=6 \times 5 \times 4$$

因而 $P(A)=k/n=6 \times 5 \times 4/10 \times 9 \times 8 \approx 0.167$

事件 B 包含的基本事件数 $k=C_3^2 \times 4 \times 3 \times 6$

所以 $P(B)=k/n=C_3^2 \times 4 \times 3 \times 6/10 \times 9 \times 8 \approx 0.3$

例 11 一批产品中有 n 个正品 m 个次品，逐个进行检查，若已查明前 $k(k \leq n)$ 个都是正品，求第 $k+1$ 次检查时仍得正品的概率是多少？

解 由已知条件知基本事件总数为 $n+m-k$

设 $A=\{\text{第 } k+1 \text{ 次检查时仍得正品}\}$ 的事件，则 A 包含的基本事件数为 $n-k$
所以 $P(A)=(n-k)/(n+m-k)$

例12 两封信随机地向四个邮筒投寄，求第二个邮筒恰好投入一封信的概率。

解 设 $A=\{\text{第二个邮筒只投入一封信}\}$ 。两封信随机地投入四个邮筒，共有 4^2 种可能投法。即基本事件的总数为

$$n=4^2=16$$

另外，两封信随机地向四个邮筒投寄，而第二个邮筒恰好投入一封信的投法：首先两封信投入第二个邮筒恰好一封信有两种投法，再将剩下的另一封信投入其余三个邮筒又有三种投法。即事件A 包含的基本事件数为

