

2023-2024 学年广东省中山一中等七校高三教学质量检测试题数学试题试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知命题 p ：任意 $x \geq 4$ ，都有 $\log_2 x \geq 2$ ；命题 q ： $a > b$ ，则有 $a^2 > b^2$ 。则下列命题为真命题的是（ ）

- A. $p \wedge q$ B. $p \wedge (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee q$

2. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $AB = 4\sqrt{3}$ ， $PA = PC = 2\sqrt{5}$ ， $PA \perp BC$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）

- A. 25π B. 75π C. 80π D. 100π

3. 已知集合 $M = \{x | x^2 = 1\}$ 。 N 为自然数集，则下列表示不正确的是（ ）

- A. $1 \in M$ B. $M = \{-1, 1\}$ C. $\emptyset \subseteq M$ D. $M \subseteq N$

4. 二项式 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，则展开式中的常数项是（ ）

- A. 180 B. 90 C. 45 D. 360

5. 已知点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 是函数 $f(x) = a\sqrt{x} + bx^2$ 的函数图像上的任意两点，且 $y = f(x)$ 在点

$(\frac{x_1 + x_2}{2}, f(\frac{x_1 + x_2}{2}))$ 处的切线与直线 AB 平行，则（ ）

- A. $a = 0$ ， b 为任意非零实数 B. $b = 0$ ， a 为任意非零实数
C. a, b 均为任意实数 D. 不存在满足条件的实数 a, b

6. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - y \leq 0 \\ x + 2y - 6 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x^2 + y^2$ 的最大值等于（ ）

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

7. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | x^2 - 2x + m = 0\}$ ，若 $A \cap B = \{3\}$ ，则 $B =$ （ ）

- A. $\{-1, 3\}$ B. $\{-2, 3\}$ C. $\{-1, -2, 3\}$ D. $\{3\}$

8. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$ ($f(x) \neq 0$)，且在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减，已知 α, β

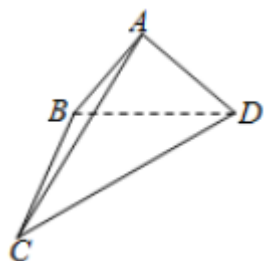
是锐角三角形的两个内角，则 $f(\sin \beta), f(\cos \alpha)$ 的大小关系是 ()

- A. $f(\sin \beta) < f(\cos \alpha)$ B. $f(\sin \beta) > f(\cos \alpha)$
C. $f(\sin \beta) = f(\cos \alpha)$ D. 以上情况均有可能

9. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则“ $a_1 + a_3 < 2a_2$ ”是“ $S_{2n-1} < 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要 B. 必要不充分
C. 充要 D. 既不充分也不必要

10. 如图，四面体 $ABCD$ 中，面 ABD 和面 BCD 都是等腰直角三角形， $AB = \sqrt{2}$ ， $\angle BAD = \angle CBD = \frac{\pi}{2}$ ，且二面角 $A-BD-C$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$ ，若四面体 $ABCD$ 的顶点都在球 O 上，则球 O 的表面积为 ()

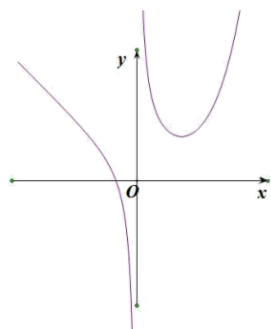


- A. $\frac{22\pi}{3}$ B. $\frac{28\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

11. 以下三个命题：①在匀速传递的产品生产流水线上，质检员每 10 分钟从中抽取一件产品进行某项指标检测，这样的抽样是分层抽样；②若两个变量的线性相关性越强，则相关系数的绝对值越接近于 1；③对分类变量 X 与 Y 的随机变量 k^2 的观测值 k 来说， k 越小，判断“ X 与 Y 有关系”的把握越大；其中真命题的个数为 ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

12. 若函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()



- A. $f(x) = \frac{e^x + x}{x}$ B. $f(x) = \frac{1 - x^2}{x}$ C. $f(x) = \frac{e^x - x}{x}$ D. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 一个村子里一共有 n 个人，其中一个人是谣言制造者，他编造了一条谣言并告诉了另一个人，这个人又把谣言告诉了第三个人，如此等等。在每一次谣言传播时，谣言的接受者都是在其余 $n-1$ 个村民中随机挑选的，当谣言传播 $k(k \geq 2)$ 次之后，还没有回到最初的造谣者的概率是_____。

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (-3, 2)$ ，若向量 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线，则 $k =$ _____。

15. 在 $\triangle ABC$ 中， $(\vec{AB} - \lambda \vec{AC}) \perp \vec{BC} (\lambda > 1)$ ，若角 A 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$ ，则实数 λ 的值是_____。

16. 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}, B = \{x | a-1 \leq x \leq 3\}$ ，若 $A \cap B$ 中有且只有一个元素，则实数 a 的值为_____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

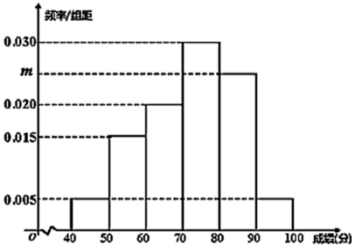
17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$ ，

- (1) 证明： $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减；
- (2) 证明：对任意的 $x \in (0, 1)$ 有 $e^{\frac{x}{1-x}} < 1-x < e^{-x}$ 。

18. (12 分) [2018·石家庄一检] 已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax) (a \in R)$ 。

- (1) 若 $a = 1$ ，求函数 $f(x)$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；
- (2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，求证： $f(x_2) > -\frac{1}{2}$ 。

19. (12 分) 2019 年入冬时节，长春市民为了迎接 2022 年北京冬奥会，增强身体素质，积极开展冰上体育锻炼。现从速滑项目中随机选出 100 名参与者，并由专业的评估机构对他们的锻炼成果进行评估打分（满分为 100 分）并且认为评分不低于 80 分的参与者擅长冰上运动，得到如图所示的频率分布直方图：



- (1) 求 m 的值；
- (2) 将选取的 100 名参与者的性别与是否擅长冰上运动进行统计，请将下列 2×2 列联表补充完整，并判断能否在犯错误的概率在不超过 0.01 的前提下认为擅长冰上运动与性别有关系？

	擅长	不擅长	合计
男性		30	
女性			50

合计				100			
$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$(K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},\text{其中}n=a+b+c+d)$$

20.（12分）已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2-x,a\in R,e\approx 2.71828\cdots$ 是自然对数的底数.

- (1) 若 $a=-e$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2 ，求 a 的取值范围，并证明: $x_1x_2>x_1+x_2$.

21.（12分）正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ；

(2)令 $b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$ ，数列 $\{bn\}$ 的前 n 项和为 Tn ，证明：对于任意的 $n\in N^*$ ，都有 $Tn<\frac{5}{64}$.

22.（10分）某地在每周六的晚上8点到10点半举行灯光展，灯光展涉及到10000盏灯，每盏灯在某一时刻亮灯的概率均为 $p(0<p<1)$ ，并且是否亮灯彼此相互独立.现统计了其中100盏灯在一场灯光展中亮灯的时长（单位: min ），得到下面的频数表：

亮灯时长/ min	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频数	10	20	40	20	10

以样本中100盏灯的平均亮灯时长作为一盏灯的亮灯时长.

- (1) 试估计 p 的值；
- (2) 设 X 表示这10000盏灯在某一时刻亮灯的数目.

①求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ ；

②若随机变量 Z 满足 $Z=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ ，则认为 $Z：N(0,1)$.假设当 $4900<X\leq 5000$ 时，灯光展处于最佳灯光亮度.试

由此估计，在一场灯光展中，处于最佳灯光亮度的时长（结果保留为整数）.

附：

①某盏灯在某一时刻亮灯的概率 p 等于亮灯时长与灯光展总时长的商；

②若 $Z: N(0,1)$ ，则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$ ，
 $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$ 。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

先分别判断命题 p, q 真假，再由复合命题的真假性，即可得出结论。

【详解】

p 为真命题；命题 q 是假命题，比如当 $0 > a > b$ ，

或 $a=1, b=-2$ 时，则 $a^2 > b^2$ 不成立。

则 $p \wedge q$ ， $(\neg p) \wedge (\neg q)$ ， $(\neg p) \vee q$ 均为假。

故选：B

【点睛】

本题考查复合命题的真假性，判断简单命题的真假是解题的关键，属于基础题。

2、D

【解析】

根据底面为等边三角形，取 BC 中点 M ，可证明 $BC \perp$ 平面 PAM ，从而 $BC \perp PM$ ，即可证明三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥。取底面等边 $\triangle ABC$ 的重心为 O' ，可求得 P 到平面 ABC 的距离，画出几何关系，设球心为 O ，即可由球的性质和勾股定理求得球的半径，进而得球的表面积。

【详解】

设 M 为 BC 中点， $\triangle ABC$ 是等边三角形，

所以 $AM \perp BC$ ，

又因为 $PA \perp BC$ ，且 $PA \cap AM = A$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 PAM ，则 $BC \perp PM$ ，

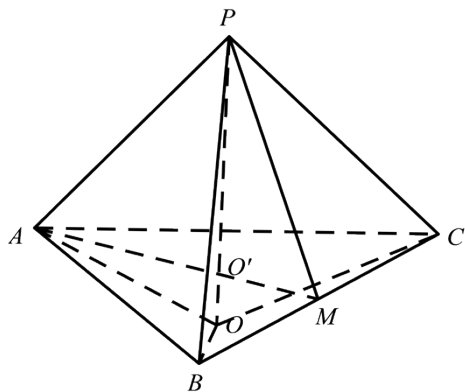
由三线合一性质可知 $PB = PA = PC$ ，

所以三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥, $AB = 4\sqrt{3}$, $PA = PB = PC = 2\sqrt{5}$,

设底面等边 $\triangle ABC$ 的重心为 O' ,

可得 $AO' = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \times 6 = 4$, $PO' = \sqrt{PA^2 - AO'^2} = \sqrt{20 - 16} = 2$,

所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心在面 ABC 下方, 设为 O , 如下图所示:



由球的性质可知, $PO \perp$ 平面 ABC , 且 P, O', O 在同一直线上, 设球的半径为 R ,

在 $Rt\triangle AOO'$ 中, $AO^2 = AO'^2 + OO'^2$,

即 $R^2 = 16 + (R - 2)^2$,

解得 $R = 5$,

所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 25 = 100\pi$,

故选: D.

【点睛】

本题考查了三棱锥的结构特征和相关计算, 正三棱锥的外接球半径求法, 球的表面积求法, 对空间想象能力要求较高, 属于中档题.

3、D

【解析】

集合 $M = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$. N 为自然数集, 由此能求出结果.

【详解】

解: 集合 $M = \{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$. N 为自然数集,

在 A 中, $1 \in M$, 正确;

在 B 中, $M = \{-1, 1\}$, 正确;

在 C 中, $\emptyset \subseteq M$, 正确;

在 D 中, M 不是 N 的子集, 故 D 错误.

故选: D.

【点睛】

本题考查命题真假的判断、元素与集合的关系、集合与集合的关系等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

4、A

【解析】

试题分析: 因为 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大, 所以 $n = 10$,

$$T_{r+1} = C_{10}^r \cdot (\sqrt{x})^{10-r} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^r = 2^r C_{10}^r x^{5-\frac{5}{2}r}, \text{ 令 } 5 - \frac{5}{2}r = 0, \text{ 则 } r = 2, T_3 = 4C_{10}^2 = 180.$$

考点: 1.二项式定理; 2.组合数的计算.

5、A

【解析】

求得 $f(x)$ 的导函数, 结合两点斜率公式和两直线平行的条件: 斜率相等, 化简可得 $a = 0$, b 为任意非零实数.

【详解】

依题意 $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + 2bx$, $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 AB 平行, 即有

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{2\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}}}{\frac{x_2-x_1}{2}} + b(x_1+x_2) &= \frac{a\sqrt{x_2} + bx_2^2 - a\sqrt{x_1} - bx_1^2}{x_2-x_1} \\ &= \frac{a(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})}{x_2-x_1} + b(x_1+x_2), \text{ 所以 } \frac{a}{\sqrt{2(x_1+x_2)}} = \frac{a}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}, \end{aligned}$$

由于对任意 x_1, x_2 上式都成立, 可得 $a = 0$, b 为非

零实数.

故选: A

【点睛】

本题考查导数的运用, 求切线的斜率, 考查两点的斜率公式, 以及化简运算能力, 属于中档题.

6、D

【解析】

画出可行域, 计算出原点到可行域上的点的最大距离, 由此求得 z 的最大值.

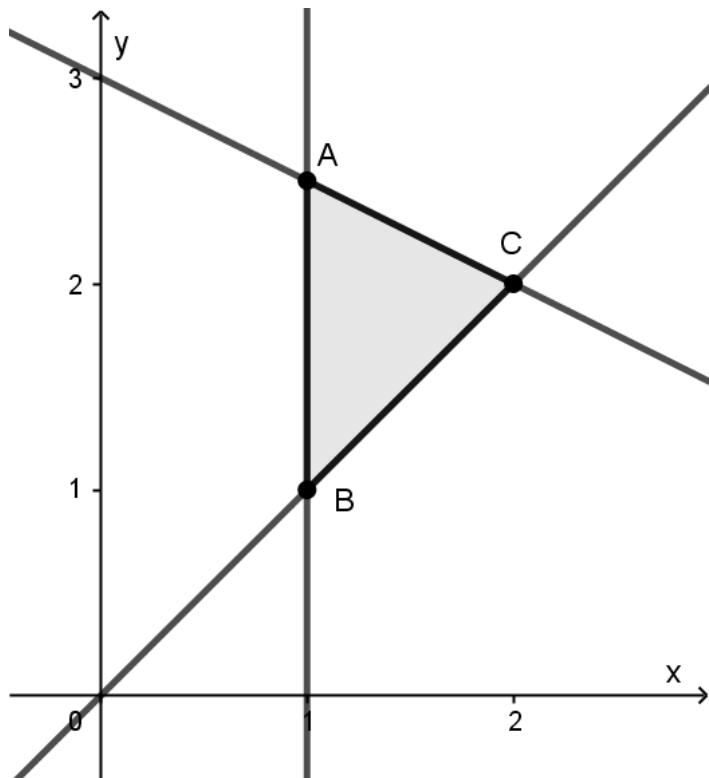
【详解】

画出可行域如下图所示，其中 $A\left(1, \frac{5}{2}\right), C(2, 2)$ ，由于 $|OA| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}, |OC| = 2\sqrt{2}$ ，所以 $|OC| > |OA|$ ，

所以原点到可行域上的点的最大距离为 $2\sqrt{2}$ 。

所以 z 的最大值为 $(2\sqrt{2})^2 = 8$ 。

故选：D



【点睛】

本小题主要考查根据可行域求非线性目标函数的最值，考查数形结合的数学思想方法，属于基础题。

7、A

【解析】

根据交集的结果可得3是集合B的元素，代入方程后可求m的值，从而可求B。

【详解】

依题意可知3是集合B的元素，即 $3^2 - 2 \times 3 + m = 0$ ，解得 $m = -3$ ，由 $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，解得 $x = -1, 3$ 。

【点睛】

本题考查集合的交，注意根据交集的结果确定集合中含有的元素，本题属于基础题。

8、B

【解析】

由已知可求得函数的周期，根据周期及偶函数的对称性可求 $f(x)$ 在 $(0, 1)$

上的单调性，结合三角函数的性质即可比较.

【详解】

由 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$ 可得 $f(x+2) = f[(x+1)+1] = -\frac{1}{f(x+1)} = f(x)$ ，即函数的周期 $T=2$ ，

因为在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减，故函数在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减，

根据偶函数的对称性可知， $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，

因为 α, β 是锐角三角形的两个内角，

所以 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 且 $\alpha + \beta > \frac{1}{2}\pi$ 即 $\alpha > \frac{1}{2}\pi - \beta$ ，

所以 $\cos \alpha < \cos(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ 即 $0 < \cos \alpha < \sin \beta < 1$ ，

$f(\cos \alpha) < f(\sin \beta)$.

故选：B .

【点睛】

本题主要考查函数值的大小比较，根据函数奇偶性和单调性之间的关系是解决本题的关键.

9、A

【解析】

首先根据等比数列分别求出满足 $a_1 + a_3 < 2a_2$ ， $S_{2n-1} < 0$ 的基本量，根据基本量的范围即可确定答案.

【详解】

$\{a_n\}$ 为等比数列，

若 $a_1 + a_3 < 2a_2$ 成立，有 $a_1(q^2 - 2q + 1) < 0$ ，

因为 $q^2 - 2q + 1 \geq 0$ 恒成立，

故可以推出 $a_1 < 0$ 且 $q \neq 1$ ，

若 $S_{2n-1} < 0$ 成立，

当 $q=1$ 时，有 $a_1 < 0$ ，

当 $q \neq 1$ 时，有 $\frac{a_1(1-q^{2n-1})}{1-q} < 0$ ，因为 $\frac{1-q^{2n-1}}{1-q} > 0$ 恒成立，所以有 $a_1 < 0$ ，

故可以推出 $a_1 < 0$ ， $q \in \mathbf{R}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/577062200033006161>