第 02 节　空间几何体的表面积与体积

【考纲解读】

点	考纲内容	5 年统计	分析预测
间几何体的表面积与体积	会计算柱、锥、台、球的表面积和体积.	2013•浙江文 5；理 12； 2014•浙江文 3；理 3； 2015•浙江文 2 ；理 2；； 2016•浙江文 9；理 11,14； 2017•浙江 3.	1. 以结合三视图、几何体的结构特征考查几何体的面积体积计算为主，题型基本稳定为选择题或填空题，难度中等以下；也有几何体的面积或体积在解答题中与平行关系、垂直关系等相结合考查的情况. 2. 与立体几何相关的“数学文化”等相结合，考查数学应用. 3. 备考重点： (1) 掌握三视图与直观图的相互转换方法是关键； (2) 掌握等积转换的方法.

【知识清单】

1.　几何体的表面积

圆柱的侧面积　$S = 2\pi rl$

圆柱的表面积　$S = 2\pi r(r + l)$

圆锥的侧面积　$S = \pi rl$

圆锥的表面积　$S = \pi r(r + l)$

圆台的侧面积　$S=\pi(r'+r)l$

圆台的表面积　$S=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$

球体的表面积　$S=4\pi R^2$

柱体、锥体、台体的侧面积，就是各个侧面面积之和；表面积是各个面的面积之和，即侧面积与底面积之和.

把柱体、锥体、台体的面展开成一个平面图形，称为它的展开图，圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图分别是矩形、扇形、扇环形它的表面积就是展开图的面积.

对点练习：

【浙江省金华十校联考】在正三棱锥$S-ABC$中，M是SC的中点，且$AM\perp SB$，底面边长$AB=2\sqrt{2}$，则正三棱锥$S-ABC$的体积为__________，其外接球的表面积为__________.

【答案】$\frac{8}{3}$，　12π

【解析】试题分析：因为M是SC的中点，且$AM\perp SB$，所以$SA\perp AC$，因此正三棱锥$S-ABC$为正四面体，其体积为$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{\sqrt{2}}{12}\times\left(2\sqrt{2}\right)^3=\frac{8}{3}$，外接球直径为$\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，表面积为$4\pi\left(\sqrt{3}\right)^2=12\pi$.

2. 几何体的体积

圆柱的体积　$V=\pi r^2h$

圆锥的体积　$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$

圆台的体积　$V=\frac{1}{3}\pi h(r'^2+r^2+r'r)$

球体的体积　$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

正方体的体积　　$V=a^3$

正方体的体积　　$V=abc$

对点练习：

【2017 课标 II，文 6】如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面.

将一圆柱截去一部分所得，则该几何体的体积为（   ）

A． 90π　　　　B． 63π　　　　C． 42π

D． 36π

【答案】B

【解析】

试题分析：由题意，该几何体是一个组合体，下半部分是一个底面半径为 3，高为 4 的圆柱，其体积 $V_1=\pi\times3^2\times4=36\pi$，上半部分是一个底面半径为 3，高为 4 的圆柱的一半，其体积 $V_2=\frac{1}{2}\times\left(\pi\times3^2\times6\right)=27\pi$，该组合体的体积为：$V=V_1+V_2=36\pi+27\pi=63\pi$。故选 B。

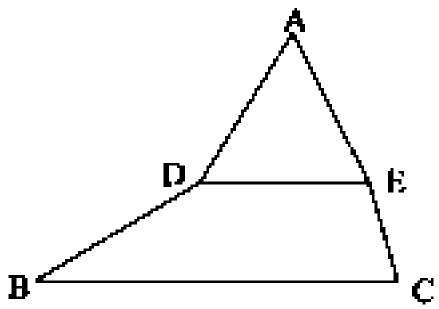
【考点深度剖析】

几何体的表面积与体积与三视图结合是主要命题形式，一般都是容易题.有时作为解答题的一个构成部分考查几何体的表面积与体积，有时结合面积、体积的计算考查等积变换等转化思想.

【重点难点突破】

考点 1　几何体的表面积

【1-1】【2017 届浙江省 ZDB 联盟高三一模】已知等腰 $Rt\Delta ABC$ 中，$AB=AC=2$，　D,E 分别为 AB,AC 的中点，沿 DE 将 ΔABC 折成直二面角（如图），则四棱锥 $A-DECB$ 的外接球的表面积为__________.

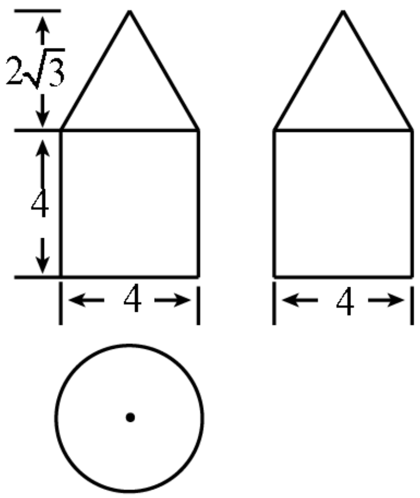


【答案】10π

【解析】由题意得 $DECB$ 四点共圆，设圆心为 O，则半径为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$，　O 到直线 DE 距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

因为$|OA|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$,所以 O 为外接球的球心，半径为$\frac{\sqrt{10}}{2}$，因此外接球的表面积为$4\pi\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=10\pi$

【2016 高考新课标 2 理数】下图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，则该几何体的表面积为（　　）



（A）20π　　（B）24π　　（C）28π　　（D）32π

【答案】C

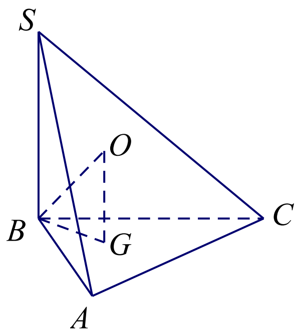
【解析】由题意可知，圆柱的侧面积为$S_1=2\pi\cdot2\cdot4=16\pi$，圆锥的侧面积为$S_2=\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot2\cdot4=8\pi$，圆柱的底面面积为$S_3=\pi\cdot2^2=4\pi$，故该几何体的表面积为$S=S_1+S_2+S_3=28\pi$，故选 C.

【1-2】三棱锥$S-ABC$中，$SB\perp$平面ABC，$SB=\sqrt{5}$，ΔABC是边长为$\sqrt{3}$的正三角形，则三棱锥$S-ABC$的外接球的表面积为（　　）

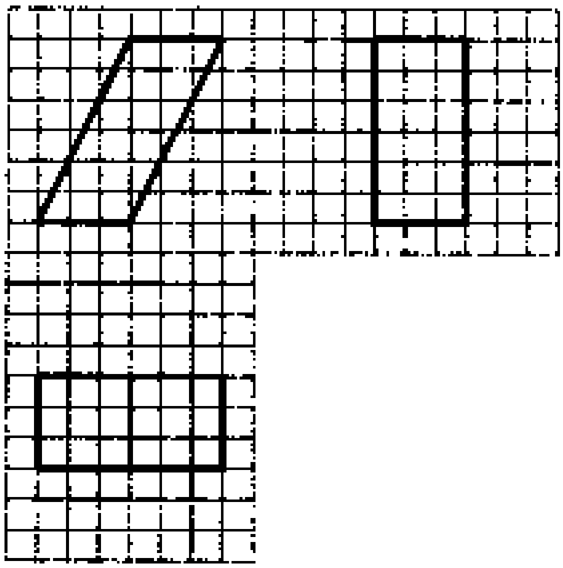
A．3π　　B．5π　　C．9π　　D．12π

【答案】C

【解析】如图，G是ΔABC的中心，O是外接球球心，则$OG\perp$平面ABC，$OG=\frac{1}{2}SB=\frac{\sqrt{5}}{2}$，由已知$BG=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=1$，则$OB=\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2+1^2}=\frac{3}{2}$，所以$S=4\pi\times(\frac{3}{2})^2=9\pi$．故选 C.



【1-3】【2016高考新课标3理数】如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实现画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为（　　）



（A）$18+36\sqrt{5}$　　（B）$54+18\sqrt{5}$　　（C）90　　（D）81

【答案】B

【解析】由三视图该几何体是以侧视图为底面的斜四棱柱，所以该几何体的表面积$S=2\times3\times6+2\times3\times3+2\times3\times3\sqrt{5}=54+18\sqrt{5}$，故选B.

【领悟技法】

以三视图为载体考查几何体的表面积，关键是能够对给出的三视图进行恰当的分析，从三视图中发现几何体中各元素间的位置关系及数量关系.

多面体的表面积是各个面的面积之和；组合体的表面积应注意重合部分的处理.

圆柱、圆锥、圆台的侧面是曲面，计算侧面积时需要将这个曲面展为平面图形计算，而表面积是侧面积与底面圆的面积之和.

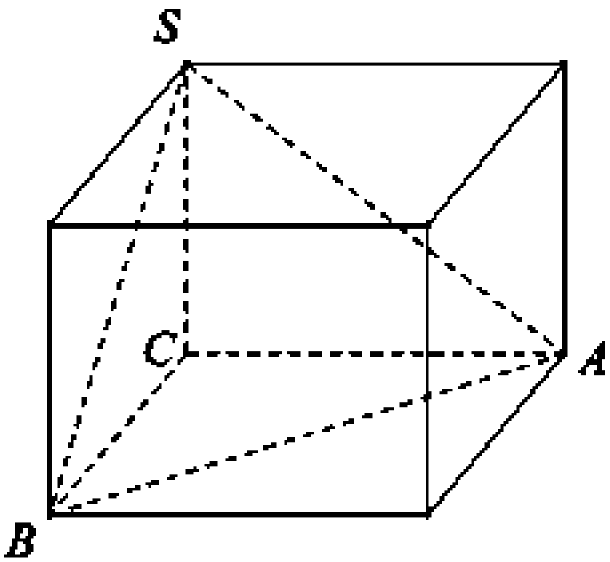
【触类旁通】

【变式1】【2018届河南省洛阳市高三期中】在三棱锥$S-ABC$中，底面ΔABC是直角三角形，其斜边$AB=4$， $SC\perp$平面ABC，且$SC=3$，则三棱锥的外接球的表面积为（　　）

A. 25π　　B. 20π　　C. 16π　　D. 13π

【答案】A

【解析】根据已知，可将三棱锥补成一个长方体，如下图：



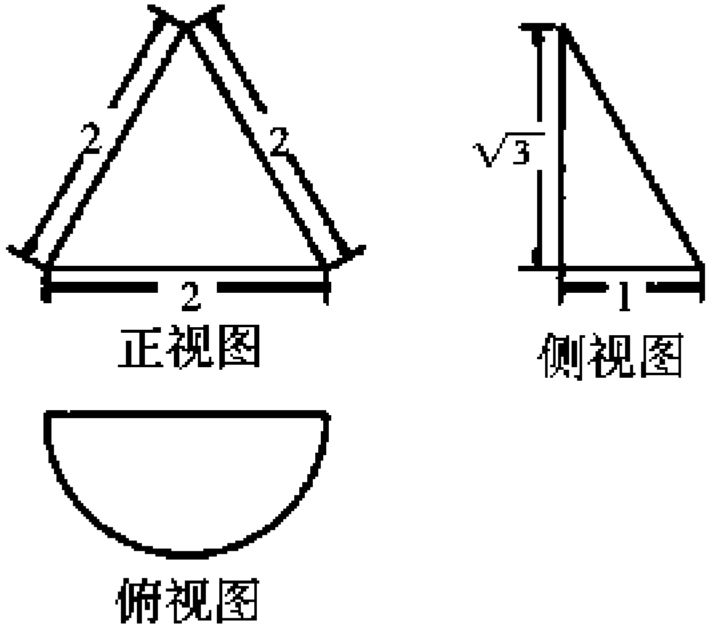
则三棱锥的外接球就是这个长方体的外接球，由于$AB=4$，$SC=3$，且ΔABC是直角三角形， $SC\perp$平面ABC， $\therefore$长方体的对角线长为

$\sqrt{AC^2+BC^2+SC^2}=\sqrt{AB^2+SC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$， $\therefore$三棱锥的外接球的半径$R=\dfrac{5}{2}$，

$\therefore$三棱锥的外接球的表面积为$4\pi\times\dfrac{5^2}{4}=25\pi$，故选A.

【变式2】某几何体的三视图如图所示，其中俯视图是个半圆，则该几何体的表面积为(　　)

A. $\dfrac{3\pi}{2}$　　B. $\pi+\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{5\pi}{2}+\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{3\pi}{2}+\sqrt{3}$



【答案】D

【解析】由三视图可知，该几何体为圆锥的一半，那么该几何体的表面积为该圆锥表面积的一半与轴截面面积的和．又该半圆锥的侧面展开图为扇形，所以侧面积为 $\frac{1}{2}\times\pi\times1\times2=\pi$，底面积为 $\frac{1}{2}\times\pi=\frac{\pi}{2}$，由三视图可知，轴截面为边长为 2 的正三角形，所以轴截面面积为 $\frac{1}{2}\times\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，则该几何体的表面积为 $\frac{3\pi}{2}+\sqrt{3}$．选 D.

【变式 3】已知矩形 ABCD 的面积为 8，当矩形 ABCD 周长最小时，沿对角线 AC 把△ACD 折起，则三棱锥外接球表面积等于(　　)

A. 8π　　　B. 16π　　　C. $48\sqrt{2}$π　　　D. 50π

【答案】

【解析】设矩形长为 x，则宽为 $\frac{8}{x}(x>0)$，

周长 $P=2(x+\frac{8}{x})\geqslant2\cdot2\sqrt{x\cdot\frac{8}{x}}=8\sqrt{2}$.

当且仅当 $x=\frac{8}{x}$,

即 $x=2\sqrt{2}$时，周长取到最小值．

此时正方形 $ABCD$ 沿 AC 折起，取 AC 的中点为 O，则 $OA=OB=OC=OD$,

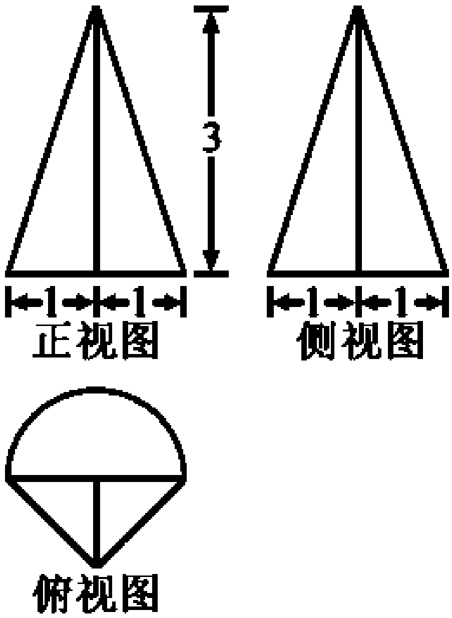
三棱锥 $D-ABC$ 的四个顶点都在以 O 为球心，以 2 为半径的球上，此球的表面积为 $4\pi\cdot2^2=16\pi$.

综合点评：

计算旋转体的侧面积时，一般采用转化的方法来进行，即将侧面展开化为平面图形，“化曲为直”来解决，因此要熟悉常见旋转体的侧面展开图的形状及平面图形面积的求法.

考点 2　几何体的体积

【2-1】【2017 浙江，3】某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）是



A. $\dfrac{\pi}{2}+1$　　　B. $\dfrac{\pi}{2}+3$　　　C. $\dfrac{3\pi}{2}+1$

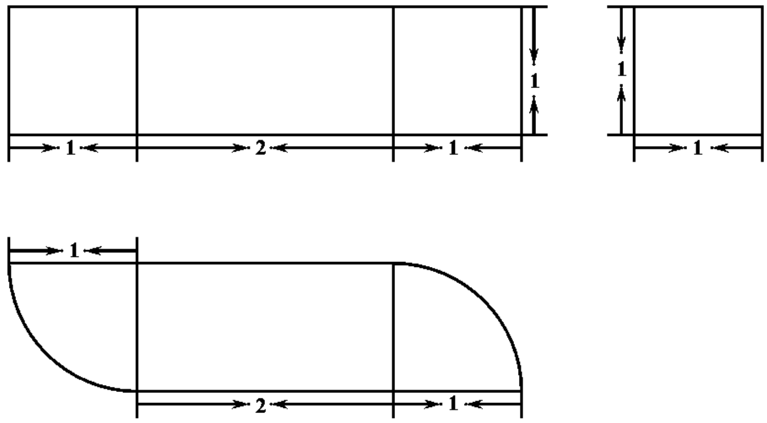
D. $\dfrac{3\pi}{2}+3$

【答案】A

【解析】

试题分析：$V=\dfrac{1}{3}\times 3\times(\dfrac{\pi\times 1^2}{2}+\dfrac{1}{2}\times 2\times 1)=\dfrac{\pi}{2}+1$，选 A.

【2-2】【2017 山东，文 13】由一个长方体和两个$\dfrac{1}{4}$圆柱体构成的几何体的三视图如右图，则该几何体的体积为____.



【答案】$2+\frac{\pi}{2}$

【解析】试题分析：该几何体的体积为$V=\frac{1}{4}\pi\times1^2\times1\times2+2\times1\times1=\frac{\pi}{2}+2$.

【2-3】【广东省广州市普通高中毕业班综合测试一】一个四棱锥的底面为菱形，其三视图如图所示，则这个四棱锥的体积是____________.

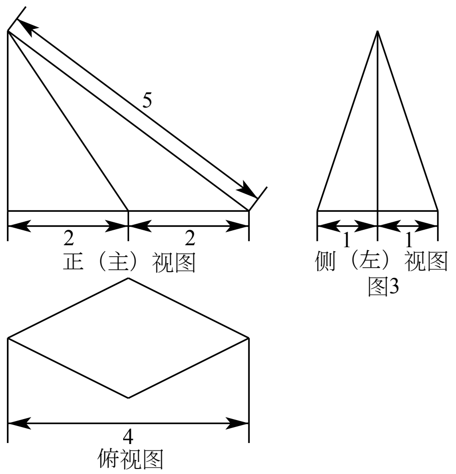


图3

【答案】4.

【解析】由正视图知，该四棱锥的高$h=\sqrt{5^2-4^2}=3$，底面菱形的两条对角线的长度分别为2和4，且两条对角线相互垂直平分，彼此分成四个全等的直角三角形，且直角三角形的两条直角边的长度分别为1和2，因此其底面积$S=4\times\frac{1}{2}\times1\times2=4$，故该四棱锥的体积$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times4\times3=4$.

【领悟技法】

(1)已知几何体的三视图求其体积，一般是先根据三视图判断空间几何体的形状，再根据题目所给数据与几何体的表体积公式求其体积.(2)若所给几何体的体积不能直接利用公式得出，则常用等积法、分割法、补形法等方法进行求解.

【触类旁通】

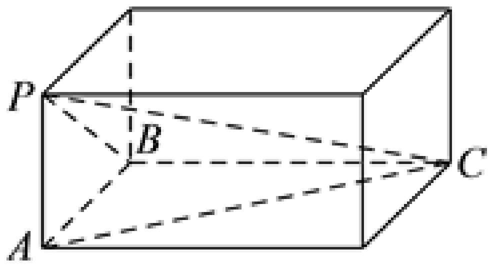
【变式1】【2017届广东省广州高三一模】《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马；将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑．若三棱锥 $P-ABC$ 为鳖臑， $PA\perp$ 平面 ABC， $PA=PB=2$， $AC=4$，三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为（　　）.

A. 8π　　B. 12π　　C. 20π　　D. 24π

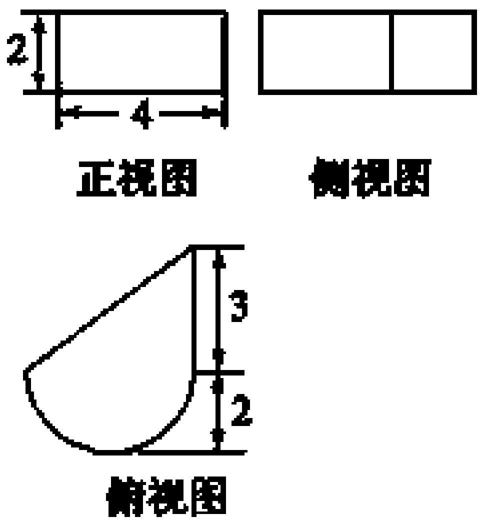
【答案】C

【解析】该几何体可以看成是长方体中截出来的三棱锥 $P-ABC$，如下图所示，

其外接球的直径为对角线 PC， $PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=2\sqrt{5}$，所以， $R=\sqrt{5}$，球的表面积为： 20π．选C.



【变式2】【2017 届浙江省杭州高级中学高三 2 月模拟】已知空间几何体的三视图如图所示 ,则该几何体的表面积是__________ ；几何体的体积是__________ .



【答案】 $28+8\pi$ $12+4\pi$

【解析】根据三视图可知几何体是组合体：后面是直三棱柱、前面是半个圆柱，

且圆柱的底面圆半径是2，母线长是2，

三棱柱的底面是直角三角形：直角边分别是4、3，斜边是5，三棱柱的高是2，

∴该几何体的表面积$S=2\times\frac{1}{2}\times4\times3+3\times2+5\times2+\pi\times2^2+\pi\times2\times2=28+8\pi$，

该几何体的体积$V=\frac{1}{2}\times4\times3\times2+12\times\pi\times2^2\times2=12+4\pi$.

综合点评：求体积的两种方法：①割补法：求一些不规则几何体的体积时，常用割补法转化成已知体积公式的几何体进行解决.②等积法：等积法包括等面积法和等体积法.等体积法的前提是几何图形(或几何体)的面积(或体积)通过已知条件可以得到，利用等积法可以用来求解几何图形的高或几何体的高，特别是在求三角形的高和三棱锥的高时，这一方法回避了通过具体作图得到三角形(或三棱锥)的高，而通过直接计算得到高的数值.

考点3 几何体的展开、折叠、切、截问题

【3-1】【2017课标3，理8】已知圆柱的高为1，它的两个底面的圆周在直径为2的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为

A. π　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

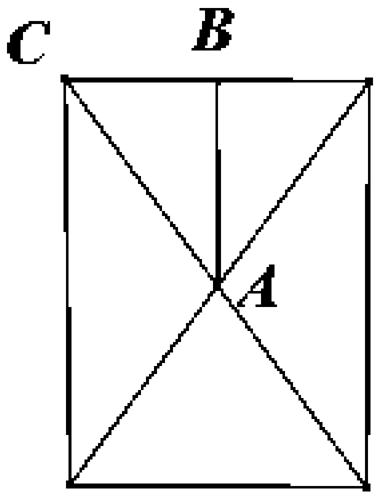
【答案】B

【解析】

试题分析：绘制圆柱的轴截面如图所示，由题意可得：$AC=1, AB=\frac{1}{2}$，

结合勾股定理，底面半径 $r=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由圆柱的体积公式可得：圆柱的体积是 $V=\pi r^2 h=\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times 1=\frac{3}{4}\pi$，故选 B.

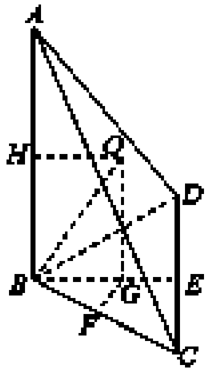


【3-2】【2018 届河南省漯河市高级中学高三上第二次模拟】四面体$ABCD$的四个顶点都在球O的表面上，$AB=2$，$BC=CD=1$，$\angle BCD=60^\circ$，$AB\perp$平面BCD，则球O的表面积为（　　）

A. 8π　　B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$　　C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$　　D. $\frac{16\pi}{3}$

【答案】D

【解析】如图，



∵BC=CD=1，∠BCD=60° ∴底面△BCD为等边三角形，取CD中点为E，连接BE，∴△BCD的外心G在BE上，设为G，取BC中点F，连接GF，在Rt△BCE中，由$CE=\frac{1}{2}$，$\angle CBE=30°$，得$BF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，又在Rt△BFG中，得BG=$\frac{\frac{1}{2}}{\cos 30°}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，过G作AB的平行线与AB的中垂线HO交于O，则O为四面体ABCD的外接球的球心，即R=OB，

∵AB⊥平面BCD，∴OG⊥BG，在Rt△BGO中，求得OB=$\sqrt{OG^2+BG^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴球O的表面积为$4\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{16\pi}{3}$

故选D

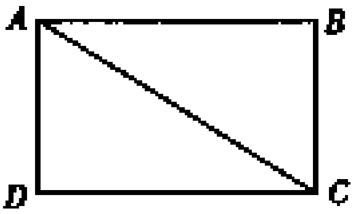
【3-3】【2018届福建省数学基地校】已知一个球与一个正三棱柱的三个侧面和两个底面相切，若这个球的体积是$\frac{32\pi}{3}$，则这个三棱柱的体积是（　　）

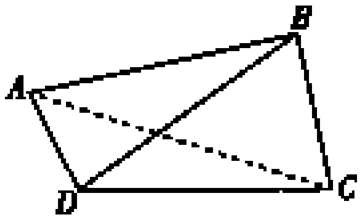
A. 48　　B. $24\sqrt{6}$　　C. $24\sqrt{3}$　　D. $48\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】由$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$得$R=2$. ∴正三棱柱的高$h=4$. 设其底面边长为$a$，则$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=2$. ∴ $a=4\sqrt{3}$. ∴ $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2\times 4=48\sqrt{3}$，选D.

【3-4】【2018届河南省林州市第一中学高三8月调研】如图，已知矩形$ABCD$中，　$AB=\frac{4}{3}BC=8$，现沿AC折起，使得平面$ABC\perp$平面ADC，连接BD，得到三棱锥$B-ACD$，则其外接球的体积为（　　）





A. $\dfrac{500\pi}{9}$　　B. $\dfrac{250\pi}{3}$　　C. $\dfrac{1000\pi}{3}$　　D. $\dfrac{500\pi}{3}$

【答案】D

【解析】结合几何体的特征可得，外接球的球心为 AC 的中点，则外接球半径：

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+BC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+6^2}=5,$$

则外接球的体积： $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{500\pi}{3}$.

本题选择 D 选项.

【领悟技法】

解决球与其他几何体的切、接问题，关键在于仔细观察、分析，弄清相关元素的关系和数量关系，选准最佳角度作出截面(要使这个截面尽可能多地包含球、几何体的各种元素以及体现这些元素之间的关系)，达到空间问题平面化的目的.

有关折叠问题，一定要分清折叠前后两图形(折前的平面图形和折叠后的空间图形)各元素间的位置和数量关系，哪些变，哪些不变.

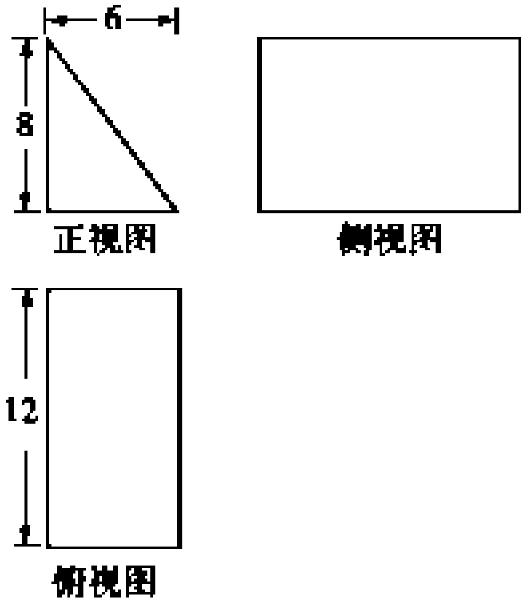
研究几何体表面上两点的最短距离问题，常选择恰当的母线或棱展开，转化为平面上两点间的最短距离问题.

【触类旁通】

【变式 1】【湖南卷】一块石材表示的几何体的三视图如图 2 所示，将石材切削、打磨、加工成球，则能得到的最大球的半径等于（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3

D. 4



【答案】B

【解析】先由三视图还原空间几何体，再确定其内切球的半径大小。该几何体是一直三棱柱，其底面是直角边长为 6 的直角三角形，现将空间问题转化平面问题来解答，所求球半径等于该直角三角形的内切圆的半径，设半径为 r，则 $8\times6=r(8+6+10)$，解得 $r=2$.

【变式 2】正三棱柱的底面边长为 $\sqrt{3}$，侧棱长为 2，且三棱柱的顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为（　　）

A．4π　　B．8π　　C．12π

D．16π

【答案】B

【解析】因底面边长为 $\sqrt{3}$，故底面中心到顶点的距离是 1，即球的截面圆的半径为 1，所以 $R=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，其表面积为 $S=4\pi\times2=8\pi$，故应选 B.

【变式 3】【2018 届河北省衡水市武邑中学高三上第三次调研】在《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑(bie nao). 已知在鳖臑 $M-ABC$ 中，$MA\perp$ 平面 ABC，$MA=AB=BC=2$，则该鳖臑的外接球与内切球的表面积之和为____.

【答案】$24\pi-8\sqrt{2}\pi$

【解析】由题意，MC 为球 O 的直径，MC=$2\sqrt{3}$，∴球 O 的半径为 $\sqrt{3}$，