定理 2.8 设 a 和 b 为凸体 $K \subset \mathbb{R}^2$ 的非钝顶点. 若某个坐标轴平行于 $\overline{ab}$, 则 K 为阶梯连通集.

定理 2.9 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 每个凸体可以经过旋转成为阶梯连通集.

定理 2.10 $\mathbb{R}^2$ 中任意有限多个钝的凸体的连通并为正交连通集.

定理 2.11 $\mathbb{R}^2$ 中有限多个钝的凸体的并的凸包为阶梯连通集.

定理 2.12 任意多个交非空的平行矩形的并集为阶梯连通集.

定理 2.13 若任意多个平行矩形的连通并满足正交凸性, 则这个并集为阶梯连通集.

定理 2.14 设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 为正常的并且竖直凸. 则 A 为阶梯连通集当且仅当 f^+ 和$-f^-$ 都为单峰的.

定理 2.15 设 $M \subset \mathbb{R}^2$ 为一个有界的连通开集的闭包. 点 a 为阶梯连通集 M 的一个 s-极点, 当且仅当或者 $hw_a(M) \neq 0$, 或者 $vw_a(M) \neq 0$.

对于 $\mathbb{R}^2$ 中几何图的阶梯连通性, 得到了如下结论:

定理 2.16 一个几何图 $G \subset \mathbb{R}^2$ 为阶梯连通集, 当且仅当

(1) G 为阶梯路径 $P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ (其中P_i 为边) 的并, 并且

(2) 至多存在两个边 K_i $(i = 1, 2)$ 使得 $K_1 \cap P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, $K_2 \cap P_n \cap P_{n-1} \neq \emptyset$, $K_1 \perp P_1$, $K_2 \perp P_n$.

对于 $\mathbb{R}^2$ 中连通集的正交连通性, 得到了下列结论:

定理 2.17 若 $M \subset \mathbb{R}^2$ 为一个非条带的凸集, 则 $\complement M$ 为正交连通集, 并且满足 $\mathrm{diam}_s(\complement M) \leq 4$.

定理 2.18 设 $C \subset \mathbb{R}^2$ 为紧的正交连通集且 $K \subset \mathrm{int}C$ 为紧凸集. 则 $C \setminus \mathrm{int}K$ 为正交连通集.

定理 2.19 设 $\mathcal{K} = \{K_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的凸集族, 其中对任意的 $K_i, K_j \in \mathcal{K}$, 有 $(\mathrm{cl}K_i) \cap (\mathrm{cl}K_j) = \emptyset$. 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \complement(\mathrm{int}K_i)$ 为正交连通集.

论文第三章研究了 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$ 中的阶梯连通集, 得到了下列结论:

定理 3.1 集合 $M \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$ 为阶梯连通集, 如果

(1) M 为正交连通的, 且

(2) 对于任意两个水平超平面 H, H', 存在点 $x \in H, x' \in H'$, 使得 $\overline{xx'} \perp H, xx' \subset M$ 并且集合 $(H \cap M) \cup (H' \cap M) \cup xx'$ 为阶梯连通集.

定理 3.2 任意交非空的直超平形体的并集为阶梯连通集.

定理 3.3 任意两个阶梯连通集的笛卡尔积为阶梯连通集.

推论 3.4 以一个阶梯连通集 K 为底的柱体为阶梯连通集.

论文第四章研究了凸多胞形的正交连通分解, 得到了如下结论:

定理 4.1 正八面体可正交分解为 2 个边界为正交连通的七面体.

定理 4.2 正八面体经过适当旋转可被分解为 4 个边界正交连通的四面体.

定理 4.3 正四面体可正交分解为 2 个边界为正交连通的四面体.

定理 4.4 截半立方体可正交分解为 10 个边界为正交连通的五面体.

定理 4.5 截半立方体经过适当旋转可分解为 2 个边界为正交连通的十面体.

定理 4.6 截角八面体可正交分解为 4 个边界为正交连通的八面体.

定理 4.7 设 $P \subset \mathbb{R}^3$ 为一个多面体, 且 F 为其某个不同于矩形的面. 如果所有面与 F 形成的二面角都比 $3\pi/4$ 大, 则 P 不可正交分解.

推论 4.8 大斜方截半立方体, 截半二十面体, 截角十二面体, 截角二十面体, 大斜方截半二十面体以及小斜方截半二十面体均不可正交分解.

第二章　平面上的阶梯连通性和正交连通性

本章研究平面上具有 L-凸性的集合. 下面首先介绍相关定义.

定义 2.1 设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的一个集族, $M \subset \mathbb{R}^d$. 若对于任意两个不同的点 $x, y \in M$, 都存在一个集合 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $x, y \in F$ 且 $F \subset M$, 则称集合 M 为 $\mathcal{F}$-凸的.

将集族 $\mathcal{F}$ 取为 $\mathbb{R}^d$ 中所有的折线路径, 得到由其导出的 L-凸性.

定义 2.2 若折线路径的每条边均平行于某个坐标轴, 则称其为正交路径. 若正交路径的所有平行边都指向相同的方向, 则称其为阶梯路径.

将集族 $\mathcal{F}$ 分别取为 $\mathbb{R}^d$ 中所有的正交路径和阶梯路径, 则导出正交连通性和阶梯连通性.

定义 2.3 称集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ 为水平凸 (竖直凸) 的, 若 S 包含每条端点在 S 中的水平 (竖直) 闭直线段. 如果 $S \subset \mathbb{R}^d$ 包含所有端点在 S 中, 并且平行于某个坐标轴的闭直线段, 则称 S 为正交凸集.

定义 2.4 称集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ 在 $x \in S$ 处的水平宽度为 $\mu_1(S \cap L)$, 记作 $hw_x(S)$, 其中 L 为包含 x 的水平直线. 类似可定义竖直宽度 $vw_x(S)$.

2.1　平面上的阶梯连通性

本节主要刻画在平面的阶梯连通凸集.

引理 2.1 [12] 集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ 为阶梯连通集, 当且仅当 S 为正交连通且正交凸.

定理 2.2 若 $S \subset \mathbb{R}^2$ 为阶梯连通集, 则 $\complement S$ 不存在有界的连通分支.

证明 假设 $\complement S$ 有一个有界连通分支 C.

对于点 $a \in C$, 水平直线 $L \ni a$ 和 S 的交集为 D. 则可以找到 D 中的两个点 b 和 c, 使得 $a \in bc$. C 的有界性保证了点 b 和 c 的存在性. 因为 $bc \not\subset S$, 集合 S 不是正交凸的, 由引理 2.1 可得 S 不是阶梯连通的. □

定理 2.3 集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ 有连通的内部, 且满足 $S = \mathrm{cl}\,\mathrm{int} S$, 则 S 为阶梯连通集当且仅当 S 为正交凸的, 并且不存在点 $x \in S$ 满足 $hw_x(S) = vw_x(S) = 0$.

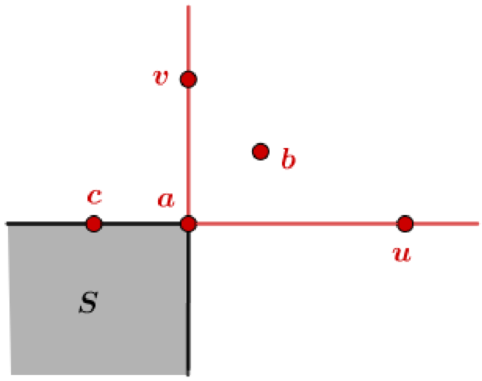

图 2.1: $b \in \operatorname{conv}([au\rangle \cup [av\rangle)$.

证明 先证必要性. 假设 $S \subset \mathbb{R}^2$ 为阶梯连通的, 并且满足定理给定的条件. 则由引理 2.1 可知, S 正交连通且正交凸. 因此, 对任意点 $x \in S$ 和其他点 $y \in S$, 存在 S 中连接 x 和 y 的正交路径. 所以, $hw_x(S) \neq 0$ 或者 $vw_x(S) \neq 0$.

现在证明充分性. 设 $a, b \in S$. 不失一般性, 假设 b 的每个坐标分量都不小于 a 的对应坐标分量. 考虑以 a 为起点的正交路径 P. 因为 $hw_a(S) \neq 0$ 或者 $vw_a(S) \neq 0$, 显然 P 是存在的. 往证 P 可以沿着水平方向或竖直方向去靠近 b. 否则, 如图 2.1, 则存在一

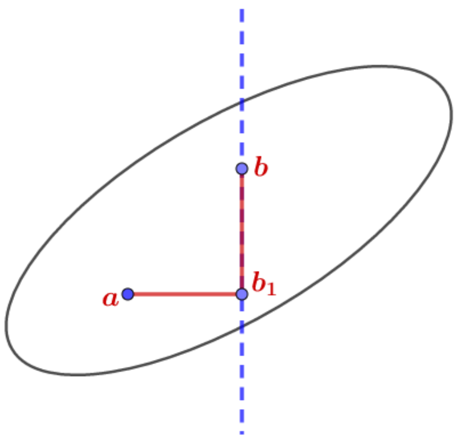

图 2.2: $b_1 \in L$.

条水平的直线段 au 和一条竖直的直线段 av, 满足 $au \backslash \{a\}$ 和 $av \backslash \{a\}$ 与 S 不交, 使得 $b \in \operatorname{conv}([au\rangle \cup [av\rangle)$. 因为 S 为正交凸, 则 $([au\rangle \cup [av\rangle) \cap S = \{a\}$.

但是, 一定存在一个水平或竖直的直线段 $ac \subset S$. 因为 $S = \operatorname{cl} \operatorname{int} S$, 可以找到 $\operatorname{int} S$ 中靠近 b 的点和 $\operatorname{int} S$ 中靠近 c 的点. 这样的点会被 $[au\rangle \cup [av\rangle$ 分离, 这与 $\operatorname{int} S$ 的连通性矛盾. 因此, 不妨设 P 可以水平地靠近 b, 或者遇到竖直的直线 $L \ni b$ 上的点 b_1 , 则 $[a, b_1, b]$ 为所求的阶梯路径, 如图 2.2; 或者到达某个边界点 $a_1 \in (\operatorname{bd} C) \backslash L$, 则可以用 a_1 代替 b_1 重复相同的过程, 一直进行下去, 直到要么到达 b, 如图 2.3; 要么得到一个点序

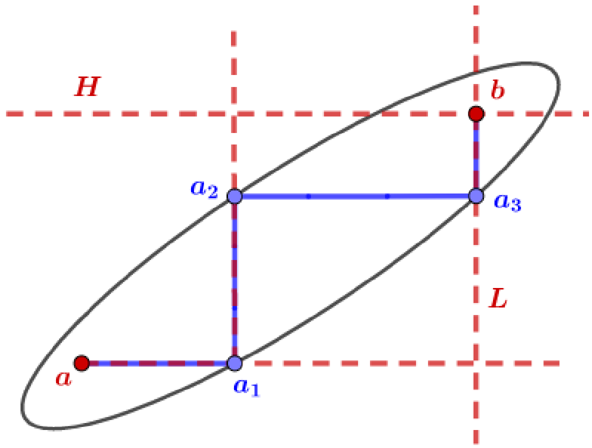

图 2.3: $[a, a_1, a_2, a_3, b]$ 即为想要的阶梯.

列 $a_1, a_2, a_3, \cdots \in \mathrm{bd}S$, 如图 2.4. 在第二种情况中, 因为 S 为紧集, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到某个点 $c \in S$. 显然, $\|a_n - a_{n+1}\| \to 0$. 则有 $hw_c(S) \neq 0$ 或者 $vw_c(S) \neq 0$, 令第一个成立. S 的正交凸性和点 $a_{2n} \in \mathrm{bd}S$ 的存在性表明, 不可能存在任意一条指向左侧的直线段 $cs' \subset S$. 因此, 存在一条指向右侧的水平直线段 $cs \subset S$.

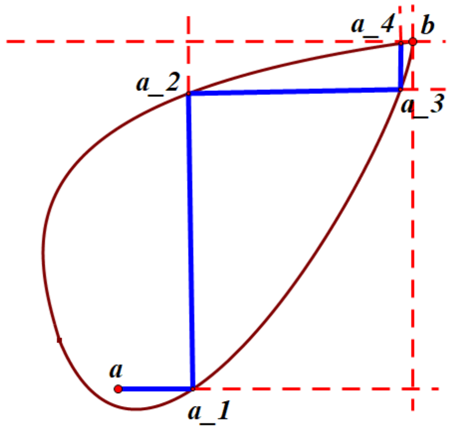

图 2.4: 点序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots \in \mathrm{bd}S$.

类似地, 不存在指向下方的直线段 $cs'' \subset S$. 所以, $\mathrm{int}S$ 中靠近 s 的点和靠近 a 的点会被 $[cs'\rangle \cup [cs''\rangle$ 分离. 这与假设矛盾. □

定理 2.4 任意一个开的连通正交凸集是阶梯连通集.

证明 设 M 为一个开连通集, 并且为正交凸的. 现取 $s \in M$, 并且考虑子集 $M_1, M_2 \subset M$, 其中 M_1 由 M 中可与 s 通过正交路径连接的点构成, $M_2 = M \backslash M_1$. 因为在 M 中存在 s 的一个邻域, 满足 $hw_s(M)$ 和 $vw_s(M)$ 均为正的, 此时有 $M_1 \neq \emptyset$.

假设 $M_2 \neq \emptyset$. 因为 M 为连通的, 可得 $\mathrm{bd}M_2 \cap M_1 \neq \emptyset$ 或者 $\mathrm{bd}M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

情形 1. $\mathrm{bd}M_2 \cap M_1 \neq \emptyset$

设 $a \in \mathrm{bd}M_2 \cap M_1$. 记 P_a 为连接 a 和 s 的正交路径. 因为 $a \in \mathrm{bd}M_2$, 则 M 中存在一个以 a 为中心的闭圆盘 B_a, 并且包含点 $b \in M_2$. a 和 b 可以在 $B_a \subset M$ 中通过一个正交路径 P_b 相连, 此时, $P_a \cup P_b$ 即为连接 b 和 s 的正交路径. 然而, 这与条件 $M_2 = M \backslash M_1$ 矛盾.

情形 2. $\mathrm{bd}M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

不妨设 $a \in \mathrm{bd}M_1 \cap M_2$. 此时, 因为 $a \in \mathrm{bd}M_1$, M 中存在一个以 a 为中心的闭圆盘 B_a, 并且包含点 $b \in M_1$. 设 P_b 为连接 b 和 s 的正交路径, 则 a 和 b 可在 $B_a \subset M$ 中通过正交路径 P_a 连接. 因此, a 和 s 可以通过 $P_a \cup P_b$ 相连, 矛盾. 综上所述, $M_2 = \emptyset$ 并且 M 为正交连通集.

此时, 结合引理 2.1, M 为阶梯连通集. □

因为凸集都是正交凸的, 可以推出下面的推论.

推论 2.5 任意一个开凸集都是阶梯连通集.

定义 2.5 设 $C \subset \mathbb{R}^d$ 为闭连通集. 点 $x \in C$ 被称为 C 的割点, 若 $C \setminus \{x\}$ 为不连通的. 在这种情况下, $C \setminus \{x\}$ 的任意一个连通分支的闭包被称为 C 的一个块.

图 2.5 给出有关割点的例子, 其中 x 为 C 的割点且对应的四个块为 C_1, C_2, C_3, C_4.

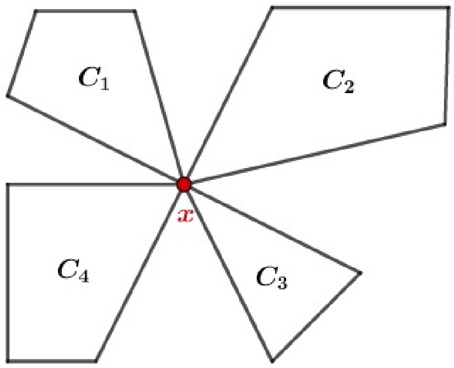

图 2.5: x 为 C 的割点且对应的四个块为 C_1, C_2, C_3, C_4.

定理 2.6 闭连通集 $C \subset \mathbb{R}^2$ 为阶梯连通集, 当且仅当

(1) 其为正交凸, 并且

(2) 对于任意点 $x \in C$, $hw_x(C) \neq 0$ 或者 $vw_x(C) \neq 0$, 并且对于用 C 的任意块代替 C 时, 结论依然成立.

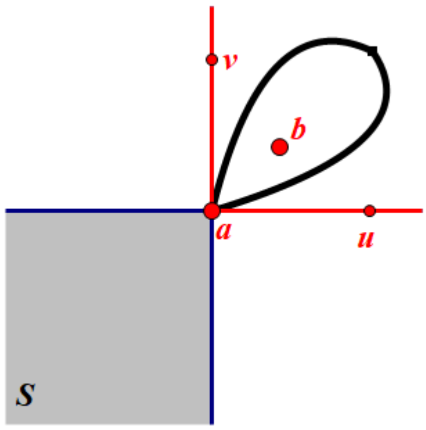

图 2.6: $b \in \mathrm{conv}([au\rangle \cup [av\rangle)$.

证明 先证明必要性. 假设 $C \subset \mathbb{R}^2$ 为阶梯连通的. 则由引理 2.1 可知, C 为正交连通且正交凸. 因此, 对于任意点 $x \in C$ 和其他点 $y \in C$, 存在 C 中连接 x 和 y 的正交路径. 因而, $hw_x(C) \neq 0$ 或者 $vw_x(C) \neq 0$. 类似地, 对每一个块也成立.

接下来, 我们证明充分性. 设 a, b 为 C 中任意两个不同的点.

对于 $a, b \in C$, 不失一般性, 假设 b 的坐标分量不小于 a 的坐标分量. 因为 $hw_a(C) \neq 0$ 或者 $vw_a(C) \neq 0$, 所以存在从 a 出发的一条正交路径 P. 这是可以实现的. 往证 P 可以沿着水平方向或者竖直方向靠近 b. 否则, 如图 2.6, 则存在一条水平直线段 au 和一条竖直直线段 av, 并且 $au \backslash \{a\}$ 和 $av \backslash \{a\}$ 与 C 不交, 使得 $b \in \mathrm{conv}([au\rangle \cup [av\rangle)$. 因为 S 为正交凸, $([au\rangle \cup [av\rangle) \cap C = \{a\}$. 不失一般性, 设 $hw_a(C) \neq 0$ 并且 $am \subset C$, 其中 a, m 和 u 共线, 则 $[au\rangle \cup [av\rangle$ 分离点 b 和 m. 这表明 a 为 C 的一个割点. 但是, 由 a 决定的包含 b 的块不满足条件 (2) 中对于块的要求, 矛盾.

因此 P 可以水平地或竖直地靠近 b, 不妨设 P 沿着水平方向, 或者遇到竖直的直线 $L \ni b$ 上的点 , 则 $[a, b_1, b]$ 为所求的阶梯路径; 或者到达某个边界点 $a_1 \in (\mathrm{bd}C) \backslash L$, 则可以用 a_1 代替 b_1 重复相同的过程, 一直进行下去, 直到要么到达点 b, 要么得到一个点序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots \in \mathrm{bd}C$. 如果是后者, 因为 C 为紧集, 则 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到某个点 $c \in C$. 显然, $\|a_n - a_{n+1}\| \to 0, n \to \infty$.

若 c 不是 C 的一个割点, 则由 C 的正交凸性可以得出 $hw_c(C) = vw_c(C) = 0$, 这与假设矛盾. 如果 c 为 C 的一个割点, 如图 2.7, 对于由 c 决定的块 $P \ni a$, 只能有 $hw_c(P) = vw_c(P) = 0$, 再次与条件 (2) 中对于块的要求矛盾. □

定义 2.6 设 $K \subset \mathbb{R}^2$ 为一个凸体并且 $x \in \mathrm{bd}K$. 集合

$$T_x(K) = \bigcup_{y \in K \backslash \{x\}} [xy\rangle \tag{2.1}$$

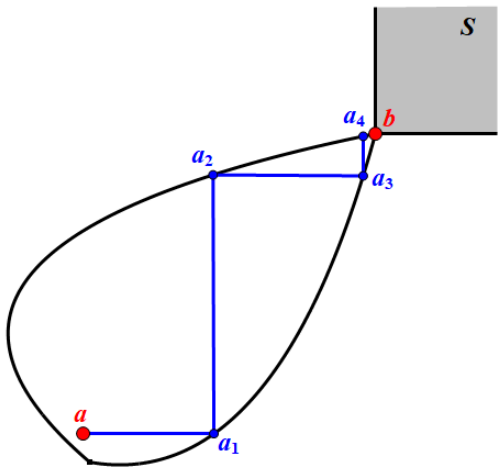

图 2.7: c 为 C 的一个割点.

为 K 在点 x 处的切锥. 数值

$$\alpha_x(K) = \mu_1 \left\{ \frac{1}{\|y-x\|}(y-x) : y \in K \backslash \{x\} \right\} \tag{2.2}$$

为其在 x 处的开放度.

定义 2.7 称凸体 $K \subset \mathbb{R}^2$ 为钝的, 如果对于任意点 $x \in \mathrm{bd}K$, 或者 $\alpha_x(K) > \pi/2$, 或者有 $\alpha_x(K) = \pi/2$ 和 $T_x(K)\backslash \{x\}$ 不是开集同时成立.

定理 2.7 每个钝的平面凸体都是阶梯连通集.

证明 设 C 为一个钝的平面凸体, 则 C 为正交凸的.

对于任意的 $a \in \mathrm{bd}C$, 若 $\alpha_a(C) > \pi/2$, $hw_a(C)$ 和 $vw_a(C)$ 中至少一个不为零. 若 $\alpha_a(C) = \pi/2$ 且 $T_a(C)\backslash \{a\}$ 不是开的, 则 $\mathrm{bd}T_a(C)$ 包含一条非退化的直线段, 此时 $\mathrm{cl}T_a(C)$ 包含一条水平的或者竖直的这样的直线段, 并且 $hw_a(C)$ 和 $vw_a(C)$ 中至少一个不为零. 对于任意 $a \in \mathrm{int}C$, 显然有 $hw_a(C)$ 和 $vw_a(C)$ 不为零. 由定理 2.3 可知 C 为阶梯连通的. □

定义 2.8 对于一个凸体 $K \subset \mathbb{R}^2$, 称 $a \in \mathrm{bd}K$ 为一个非钝顶点, 若 $\alpha_a(K) \leq \pi/2$.

定理 2.8 设 a 和 b 为凸体 $K \subset \mathbb{R}^2$ 的非钝顶点. 若某个坐标轴平行于 $\overline{ab}$, 则 K 为阶梯连通集.

证明 假设 $\overline{ab}$ 平行于 x-轴.

则 $ab \subset K$, 并且 $hw_a(K)$ 和 $hw_b(K)$ 都是正的. 同时, K 含于以 $L_a \ni a$ 和 $L_b \ni b$ 界定的条带之中, 其中 L_a 和 L_b 都平行于 y-轴. 易知, 对于任意点 $q \in K\backslash \{a, b\}$, $vw_q(K) \neq 0$. 另外, 因为 K 为凸集, 显然其为正交凸的. 因此, 由定理 2.3 可得 K 为阶梯连通集. □

定理 2.9 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 每个凸体可以经过旋转成为阶梯连通集.

证明 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的凸体. 显然旋转 D 之后得到的集合依然是凸的, 因而也是正交凸的.

若 D 为钝的, 由定理 2.7 可知, D 是阶梯连通的. 否则, 选择两个点 $a, b \in \mathrm{bd}D$, 使得 a 是非钝的, 并且如果存在第二个非钝的顶点, 使得 b 也为非钝的顶点. 旋转集合 D 到位置 D' 使得 ab 平行某个坐标轴. 若 a 和 b 都是非钝的顶点, 利用定理 2.8 可得结论. 否则, 对于任意点 $x \in \mathrm{bd}D'$, $hw_x(D')$ 和 $vw_x(D')$ 中有一个不为零, 则由定理 2.3 可得结论. □

由于两个交非空的正交连通集的并集为正交连通的, 很容易得出下面的定理.

定理 2.10 $\mathbb{R}^2$ 中任意有限多个钝的凸体的连通并为正交连通集.

定理 2.11 $\mathbb{R}^2$ 中有限多个钝的凸体的并的凸包为阶梯连通集.

证明 设 $A_1, ..., A_n$ 为凸体并且 $K = \mathrm{conv}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_n)$.

对于任意点 $x \in \mathrm{bd}K$, 或者对于某个指标 i, 有 $x \in \mathrm{bd}A_i$, 或者 $\alpha_x(K) = \pi$. 由定义可知 K 为钝的. 因此, 由定理 2.7 可知 K 是阶梯连通集. □

定义 2.9 称一个矩形是平行的, 如果矩形的每条边均平行于坐标轴.

定理 2.12 任意多个交非空的平行矩形的并集为阶梯连通集.

证明 利用两个相交的平行矩形的并的阶梯连通性即可得出结论. □

更进一步, 我们可以得出下面的定理.

定理 2.13 若任意多个平行矩形的连通并满足正交凸性, 则这个并集为阶梯连通集.

证明 显然, 任意多个平行矩形的连通并为正交连通的. 由引理 2.1 可知, 结论成立. □

设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 为一个有界的连通开集的闭包. 记 L_x 为所有横坐标为 x 的点所在的直线. 记 $[a, b] = \max\{[a, b] | x \in [a, b],\ L_x \cap A \neq \emptyset\}$.

定义 2.10 对于任意的点 $x \in [a, b]$ 定义 $f^+(x) = \max\{y : (x, y) \in A\}$, $f^-(x)$=min $\{y : (x, y) \in A\}$. 显然, $f^+ \geq f^-$. 对于 $x \in]a, b[$, 有 $f^+(x) > f^-(x)$. 若 $f^+(a) = f^-(a)$ 且 $f^+(b) = f^-(b)$, 称 A 为正常的 (*normal*).

定义 2.11 函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 称为单峰的, 若 f 在子区间 $[a, c]$ 上是非降的, 并且在子区间 $[c, b]$ 上是非增的, 其中 $c \in]a, b[$.