第八节　函数与方程

课标要求	1.了解函数零点的概念，能判断函数在某个区间上是否存在零点。 2.结合二次函数的图象，了解函数的零点与方程根的联系，判断一元二次方程根的存在性及根的个数。
热点提示	本节的复习，应充分利用二次函数的图象，理顺两个“二次”的关系，进而把握函数与方程之间的关系，重点解决：(1)两个“二次”的关系；(2)函数的零点；

一、知识梳理

1．函数的零点

(1)函数零点的定义

对于函数$y=f(x)(x\in D)$，把使$f(x)=0$成立的实数x叫做函数$y=f(x)(x\in D)$的零点．

(2)几个等价关系

方程$f(x)=0$有实数根⇔函数$y=f(x)$的图象与x轴有交点⇔函数$y=f(x)$有零点．

(3)函数零点的判定(零点存在性定理)

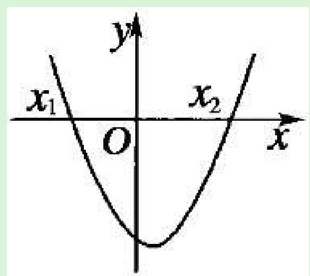
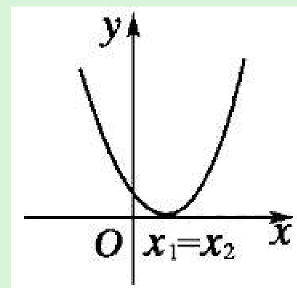
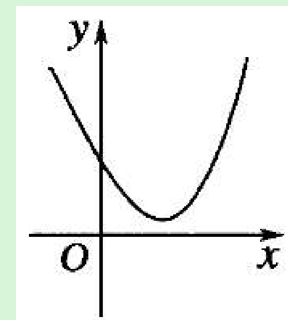
如果函数$y=f(x)$在区间$[a，b]$上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$ ，那么函数$y=f(x)$在区间 $(a，b)$ 内有零点，即存在$c\in(a，b)$，使得 $f(c)=0$ ______，这个___c___也就是$f(x)=0$的根.

问题探究

在上面的条件下，(a,b)内的零点有几个？

提示：在上面的条件下，(a,b)内的零点至少有一个c，还可能有其他根，个数不确定.

2．二次函数$y=ax^2+bx+c(a>0)$的图象与零点的关系

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
与x轴的交点	$(x_1,0)$，$(x_2,0)$	$(x_1,0)$	无交点
零点个数	两个零点	一个零点	无零点

3. 实系数一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的实根的符号与系数之间的关系

（1）方程有两个不相等的正实数根⇔

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0,\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0;\end{cases}$$

（2）方程有两个不相等的负实根⇔

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} < 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0; \end{cases}$$

3. 方程有一正根一负根⇔$ac < 0$.

思考：实系数一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a>0)$有两个不相等的大于3实数根⇔

4. 一元二次方程$f(x)=ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的区间根问题

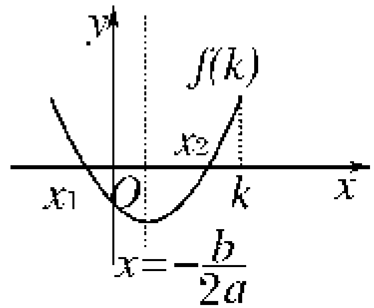
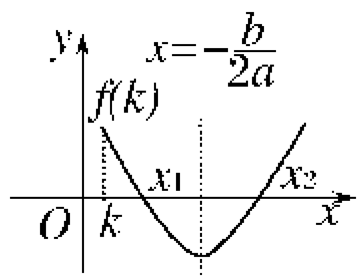
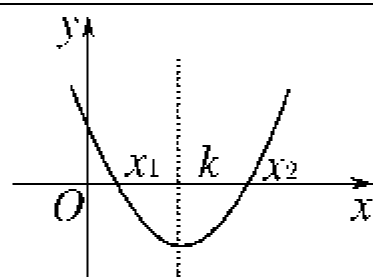
研究一元二次方程的区间根，一般情况下需要从以下三个方面考虑：

（1）一元二次方程根的判别式；

（2）对应二次函数区间端点函数值的正负；

（3）二次函数图象的对称轴与区间端点的位置关系

设x_1、x_2是实系数二次方程$ax^2+bx+c=0(a>0)$的两实根，则x_1、x_2的分布范围与二次方程系数之间的关系，如下表所示.

根的分布	图象	充要条件
$x_1 < x_2 < k$		$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(k) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < k \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2k \\ (x_1 - k)(x_2 - k) > 0 \end{cases}$
$k < x_1 < x_2$		$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(k) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > k \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 2k \\ (x_1 - k)(x_2 - k) > 0 \end{cases}$
$x_1 < k < x_2$		$f(k) < 0$

一、基础自测

1．若函数$y=f(x)$在$\mathbf{R}$上递增，则函数$y=f(x)$的零点（　　）

A．至少有一个　　B．至多有一个

C．有且只有一个　　D．可能有无数个

答案：B

2．函数$f(x)=e^x+x-2$的零点所在的一个区间是(　　)

A．$(-2，-1)$　　B．$(-1,0)$

C．$(0,1)$　　D．$(1,2)$

解析： 由于$f(0)=-1<0$，$f(1)=e-1>0$，根据函数的零点存在性定理，知函数$f(x)$的零点在区间$(0,1)$内．

答案： C

3．若函数 $f(x)=ax+b$ 有一个零点是 2，那么函数 $g(x)=bx^2-ax$ 的零点是 ( )

A．0,2

B．0，$\frac{1}{2}$

C．0，$-\frac{1}{2}$

D．2，$-\frac{1}{2}$

解析：$\because 2a+b=0$，$\therefore g(x)=-2ax^2-ax=-ax(2x+1)$，

所以零点为 0 和 $-\frac{1}{2}$.

答案：C

4．已知函数$f(x)=x^2+x+a$在区间$(0,1)$上有零点，则实数a的取值范围是________.

解析：∵函数$f(x)=x^2+x+a$在$(0,1)$上有零点.

∴$f(0)f(1)<0$.即$a(a+2)<0$，解得$-2<a<0$.

答案：$(-2,0)$

5．函数$y=(x^2-2x)^2-9$的图象与x轴交点的个数是________.

解析：令$y=0$，$(x^2-2x+3)(x^2-2x-3)=0$，$\because x^2-2x+3>0$，$\therefore x^2-2x-3=0$，解得$x=-1$或$x=3$，即方程$f(x)=0$只有两个实数根.

答案：2

热点一 函数零点存在性的判断

【例 1】 设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x-\ln x(x>0)$，则 $y=f(x)$（ ）

A．在区间$(\frac{1}{e}，1)(1，e)$内均有零点

B．在区间$(\frac{1}{e}，1)(1，e)$内均无零点

C．在区间$(\frac{1}{e}，1)$内有零点，在区间$(1，e)$内无零点

D．在区间$(\frac{1}{e}，1)$内无零点，在区间$(1，e)$内有零点