36 相似三角形旋转型

一、单选题

1．在Rt△ABC中，∠BAC＝90°，AD是△ABC的中线，∠ADC＝45°，把△ADC沿AD对折，使点C落在C'的位置，$C'D$交AB于点Q，则$\dfrac{BQ}{AQ}$的值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【详解】解：如图，过点A作$AE\perp BC$，垂足为E，

∵∠ADC＝45°，

∴△ADE是等腰直角三角形，即$AE=DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD$，

在Rt△ABC中，

∵∠BAC＝90°，AD是△ABC的中线，

∴AD＝CD＝BD，

由折叠得：AC＝AC'，∠ADC＝∠ADC'＝45°，CD＝$C'D$，

∴∠CDC'＝45°+45°＝90°，

∴∠DAC＝∠DCA＝（180°－45°）÷2＝67.5°＝∠$C'AD$，

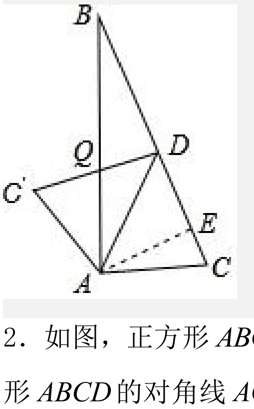
∴∠B＝90°－∠C＝∠CAE＝22.5°，∠BQD＝90°－∠B＝∠$C'QA$＝67.5°，

∴AC'＝AQ＝AC，

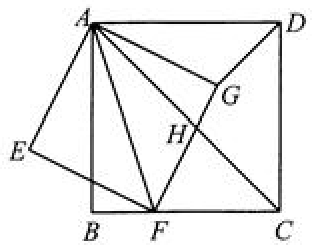
由△AEC∽△BDQ得：$\dfrac{BQ}{AC}=\dfrac{BD}{AE}$，

∴$\dfrac{BQ}{AQ}=\dfrac{BQ}{AC}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{\sqrt{2}\text{AE}}{\text{AE}}=\sqrt{2}$．

故选：A．



2．如图，正方形$ABCD$中，点F是BC边上一点，连接AF，以AF为对角线作正方形$AEFG$，边FG与正方形$ABCD$的对角线AC相交于点H，连接DG．以下四个结论：①$\angle EAB=\angle GAD$；②$\Delta AFC\backsim\Delta AGD$；③$2AE^2=AH\cdot AC$；④$DG\perp AC$．其中正确的个数为（　　）



A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

【答案】D

【详解】解：①∵四边形 AEFG 和四边形 ABCD 均为正方形

∴∠EAG=∠BAD=90°

又∵∠EAB=90°-∠BAG，∠GAD=90°-∠BAG

∴∠EAB=∠GAD

∴①正确

②∵四边形 AEFG 和四边形 ABCD 均为正方形

∴AD=DC，AG=FG

∴AC=$\sqrt{2}$AD，AF=$\sqrt{2}$AG

∴$\frac{AC}{AD}=\sqrt{2}$，$\frac{AF}{AG}=\sqrt{2}$

即$\frac{AC}{AD}=\frac{AF}{AG}$

又∵∠DAG+∠GAC=∠FAC+∠GAC

∴∠DAG=∠CAF

∴$\Delta AFC\backsim\Delta AGD$

∴②正确

③∵四边形 AEFG 和四边形 ABCD 均为正方形，AF、AC 为对角线

∴∠AFH=∠ACF=45°

又∵∠FAH=∠CAF

∴△HAF∽△FAC

∴$\frac{AF}{AH}=\frac{AC}{AF}$

即$AF^2=AC\cdot AH$

又∵AF=$\sqrt{2}$AE

∴$2AE^2=AH\cdot AC$

∴③正确

④由②知$\Delta AFC\backsim\Delta AGD$

又∵四边形 ABCD 为正方形， AC 为对角线

∴∠ADG=∠ACF=45°

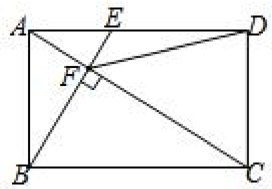
∴DG 在正方形另外一条对角线上

∴DG⊥AC

∴④正确

故选：D.

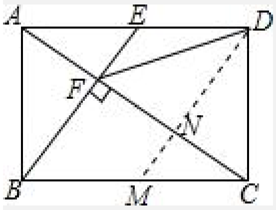
3．如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 是 AD 边的中点，$BE\perp AC$ 于点 F，连接 DF，给出下列四个结论：①△AEF∽△CAB；②$CF=2AF$；③$DF=DC$；④$S_{\triangle ABF}$：$S_{四边形CDEF}$=2：5，其中正确的结论有（　　）



A．1 个　　　B．2 个　　　C．3 个　　　D．4 个

【答案】D

【详解】如图，过 D 作 $DM\parallel BE$ 交 AC 于 N，



∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD\parallel BC$，∠ABC=90°，$AD=BC$，

∵$BE\perp AC$ 于点 F，

∴∠EAC=∠ACB，∠ABC=∠AFE=90°，

∴△AEF∽△CAB，故①正确；

∵$AD\parallel BC$，

∴△AEF∽△CBF，∴$\frac{AE}{BC}=\frac{AF}{CF}$，

∵$AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，

∴$\frac{AF}{CF}=\frac{1}{2}$，∴$CF=2AF$，故②正确，

∵$DE\parallel BM$，$BE\parallel DM$，

∴四边形 $BMDE$ 是平行四边形，

∴$BM=DE=\frac{1}{2}BC$，∴$BM=CM$，

∴$CN=NF$，

∵$BE\perp AC$ 于点 F，$DM\parallel BE$，

∴$DN\perp CF$，∴$DF=DC$，故③正确；

∵△AEF∽△CBF，

∴$\frac{EF}{BF}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$，

∴$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABF}$，$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{6}S_{矩形ABCD}$，

∴$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{12}S_{矩形ABCD}$，

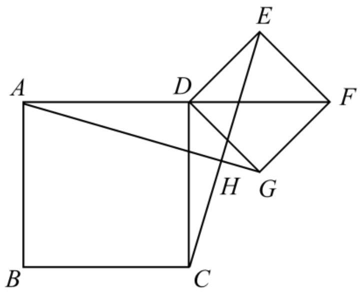
又∵$S_{四边形CDEF}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}-\frac{1}{12}S_{矩形ABCD}=\frac{5}{12}S_{矩形ABCD}$，

∴$S_{\triangle ABF}$：$S_{四边形CDEF}$=2：5，故④正确；

故选D.

二、填空题

4.已知正方形$DEFG$的顶点F在正方形$ABCD$的一边AD的延长线上，连结AG，CE交于点H，若$AB=3$，$DE=\sqrt{2}$，则CH的长为________.



【答案】$\frac{9\sqrt{17}}{17}$

【详解】解：连接EG，与DF交于N，设CD和AH交于M，

∴∠GNA=90°，DN=FN=EN=GN，

∵∠MAD=∠GAN，∠MDA=∠GNA=90°，

∴△ANG∽ADM，

∴$\frac{DM}{NG}=\frac{AD}{AN}$，

∵$DE=\sqrt{2}$，

∴DF=EG=2，

∴DN=NG=1，

∵AD=AB=3，

∴$\frac{DM}{1}=\frac{3}{3+1}$，

解得：DM=$\frac{3}{4}$，

∴MC=$\frac{9}{4}$，AM=$\sqrt{AD^2+DM^2}=\frac{3\sqrt{17}}{4}$，

∵∠ADM+∠MDG=∠EDG+∠CDG，

∴∠ADG=∠EDC，

在△ADG和△CDE中，

$$\begin{cases} AD=CD \\ \angle ADG=\angle CDE \\ DG=DE \end{cases}，$$

∴△ADG≌△CDE（SAS），

∴∠DAG=∠DCE，

∵∠AMD=∠CMH，

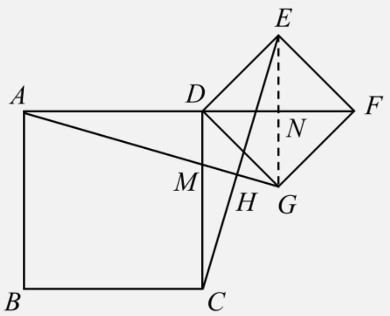
∴∠ADM=∠CHM=90°，

∴△ADM∽△CHM，

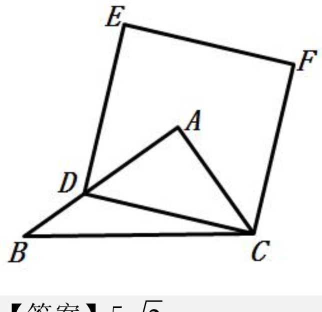
∴$\frac{AD}{CH}=\frac{AM}{CM}$，

即$\frac{3}{CH}=\frac{\frac{3\sqrt{17}}{4}}{\frac{9}{4}}$，

解得：CH=$\frac{9\sqrt{17}}{17}$.

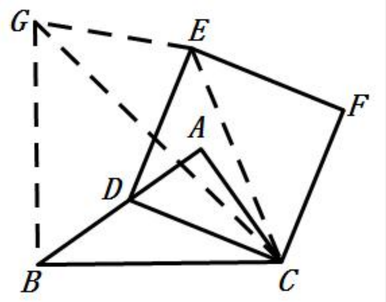


5．如图，在△*ABC*中，*AB*＝5，*D*为边*AB*上一动点，以*CD*为一边作正方形*CDEF*，当点*D*从点*B*运动到点*A*时，点*E*运动的路径长为_________.



【答案】$5\sqrt{2}$

【详解】如图：作GB⊥BC于B，取GB=BC，



当点 D 与点 B 重合时，则点 E 与点 G 重合，

∴∠CBG=90°，

∴CG=$\sqrt{2}$BC，∠GCB=45°，

∵四边形 CDEF 是正方形，

∴CE=$\sqrt{2}$DC，∠ECD=45°，

∴∠BCD+∠DCG =∠GCE+∠DCG =45°，

∴∠BCD =∠GCE，且$\frac{CG}{BC}=\frac{CE}{DC}=\sqrt{2}$，

∴△CGE∽△CBD，

∴$\frac{GE}{BD}=\frac{CE}{DC}=\sqrt{2}$，即 GE=$\sqrt{2}$BD，

∵BD=5，

∴点 *E* 运动的路径长为 GE=$\sqrt{2}$BD=5$\sqrt{2}$.

6．如图，正方形 *ABCD* 中，点 *F* 是 *BC* 边上一点，连接 *AF*，以 *AF* 为对角线作正方形 *AEFG*，边 *FG* 与 *AC* 相交于点 *H*，连接 *DG*．以下四个结论：

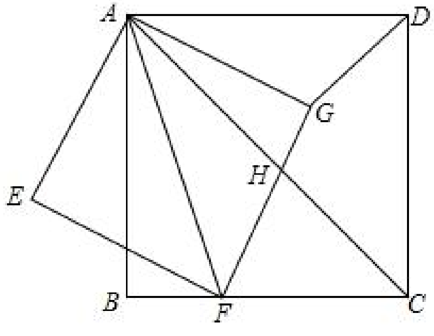
①∠*EAB*＝∠*BFE*＝∠*DAG*;

②△*ACF*∽△*ADG*;

③ $AH\cdot AC=\sqrt{2}AE^{2}$；

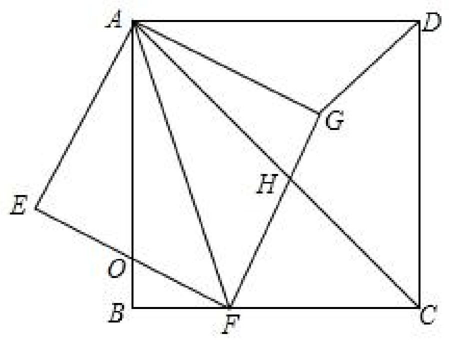
④*DG*⊥*AC*.

其中正确的是_____．（写出所有正确结论的序号）



【答案】①②④

【详解】解：设 *AB* 与 *EF* 相交于点 *O*，如图所示，



∵四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 都是正方形，

∴ $\angle B=\angle E=90^{\circ}$， $\angle EAG=\angle BAD=90^{\circ}$.

又∵ $\angle AOE=\angle BOF$ ，

∴ $\angle EAB=\angle BFE$.

∵ $\angle EAG-\angle BAG=\angle BAD-\angle BAG$ ，

∴ $\angle EAB=\angle DAG$ ，

∴ $\angle EAB=\angle BFE=\angle DAG$ ，

故结论①正确；

∵ AC、AF 是正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ 的对角线，

∴ $AC=\sqrt{2}AD$， $AF=\sqrt{2}AG$ ，

∴ $\frac{AC}{AD}=\frac{AF}{AG}=\sqrt{2}$.

又∵ $\angle FAG=\angle CAD=45^{\circ}$ ，

∴ $\angle FAG-\angle GAH=\angle CAD-\angle GAH$ ，

即 $\angle FAC=\angle GAD$.

∴ $\triangle ACF\backsim\triangle ADG$.

故结论②正确；

由 $\triangle ACF\backsim\triangle ADG$ 可知 $\angle ADG=\angle ACF=45^{\circ}$ ，

∴ DG 平分 $\angle ADC$.

∵ $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，

∴ $DG\perp AC$.

故结论④正确；

∵ $\angle FAC=\angle HAF$ ， $\angle ACF=\angle AFH=45^{\circ}$ ，

∴ $\triangle ACF\backsim\triangle AFH$,

∴ $\frac{AH}{AF}=\frac{AF}{AC}$,

∴ $AH\cdot AC=AF^{2}$.

∵在等腰直角△AEF 中，$AF^2=2AE^2$，

∴ $AH\cdot AC=2AE^2$，

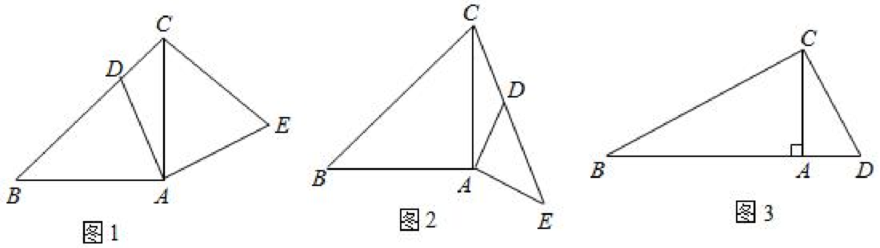
故结论③错误，

∴正确的结论是①②④，

故答案为：①②④.

三、解答题

7.【问题发现】(1) 如图 1，在 Rt△ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 边上一点（不与点 B、C 重合）将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 AE，连接 EC，则线段 BD 与 CE 的数量关系是___，位置关系是___；



【探究证明】(2) 如图 2，在 Rt△ABC 和 Rt△ADE 中，$AB=AC$，$AD=AE$，将△ADE 绕点 A 旋转，当点 C，D，E 在同一直线时，BD 与 CE 具有怎样的位置关系，并说明理由；

【拓展延伸】(3) 如图 3，在 Rt△BCD 中，$\angle BCD=90°$，$BC=2CD=4$，将△ACD 绕顺时针旋转，点 C 对应点 E，设旋转角 $\angle CAE$ 为 α（$0°<\alpha<360°$），当点 C，D，E 在同一直线时，画出图形，并求出线段 BE 的长度.

【答案】(1) $BD=CE$，$BD\perp CE$；(2) $BD\perp CE$，理由见解析；(3) 画出图形见解析，线段 BE 的长度为 $\frac{12}{5}$.

【详解】解：(1) 在 Rt△ABC 中，$AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle ACB=45°$，

$\because \angle BAC=\angle DAE=90°$，

$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，即 $\angle BAD=\angle CAE$，

在△BAD 和△CAE 中，$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAE \\ AD=AE \end{cases}$，

$\therefore$△BAD≌△CAE（SAS），

$\therefore BD=CE$，$\angle B=\angle ACE=45°$，

$\because \angle ACB=45°$，

$\therefore \angle BCE=45°+45°=90°$，

故答案为：$BD=CE$，$BD\perp CE$；

(2) $BD\perp CE$，

理由：如图 2，连接 BD，

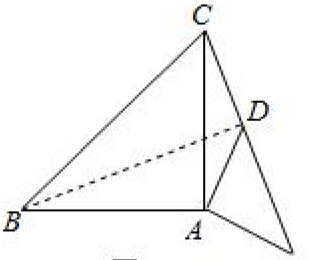


图2

∵在Rt△ABC和Rt△ADE中，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle AEC=45^\circ$，

$\because \angle CAB=\angle DAE=90^\circ$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$，

∵ $AB=AC$，$AE=AD$，

∴△CEA≌△BDA（SAS），

$\therefore \angle BDA=\angle AEC=45^\circ$，

$\therefore \angle BDE=\angle ADB+\angle ADE=90^\circ$，

∴ $BD\perp CE$；

（3）如图3，过 A 作 $AF\perp EC$,

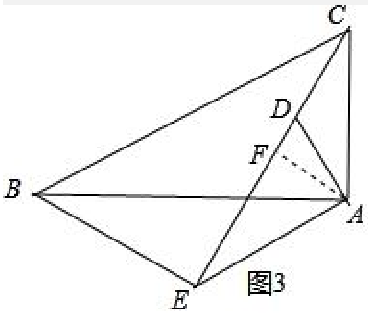


图3

由题意可知Rt△ABC∽Rt△AED，$\angle BAC=\angle EAD=90^\circ$，

∴ $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$，即 $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$，

$\because \angle BAC=\angle EAD=90^\circ$，

$\therefore \angle BAE=\angle CAD$，

∴△BAE∽△CAD，

$\therefore \angle ABE=\angle ACD$，

$\because \angle BEC=180^\circ-\angle CBE+\angle BCE=180^\circ-\angle CBA+\angle ABE+\angle BCE=180^\circ\angle CBA+\angle ACD+\angle BCE=90^\circ$，

$\therefore BE\perp CE$，

在Rt△BCD中，$BC=2CD=4$，

$\therefore BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

$\because AC\perp BD$，

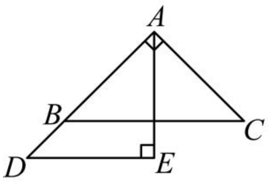
$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}BC\cdot AC$，

$\therefore AC=AE=\frac{4}{5}\sqrt{5}$， $AD=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，

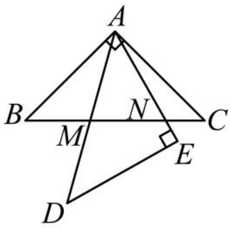
$\therefore AF=\frac{4}{5}$， $CE=2CF=2\times\sqrt{AC^2-AF^2}=\frac{16}{5}$，

$\therefore BE=\sqrt{BC^2-CE^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\frac{12}{5}$.

8．在同一平面内，如图①，将两个全等的等腰直角三角形摆放在一起，点 A 为公共顶点，$\angle BAC=\angle AED=90^\circ$．如图②，若△$ABC$ 固定不动，把△ADE 绕点 A 逆时针旋转，使 AD、AE 与边 BC 的交点分别为 M、N 点 M 不与点 B 重合，点 N 不与点 C 重合）.



图①



图②

【探究】求证：$\triangle BAN\backsim\triangle CMA$.

【应用】已知等腰直角三角形的斜边长为 4.

(1) $BN\cdot CM$ 的值为______.

(2)若 $BM=CN$，则 MN 的长为______.

【答案】(1)8；(2) $4\sqrt{2}-4$

【探究】利用三角形外角的性质可证 $\angle BAN=\angle AMC$，又由 $\angle B=\angle C=45^\circ$，可证明结论；

【应用】(1）首先求出等腰直角三角形的直角边长，再由 $\triangle BAN\backsim\triangle CMA$，得 $\frac{BN}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{CM}$，则 $BN\cdot CM=8$；

（2）由 $BM=CN$，得 $BN=CM$，由（1）知 $BN\cdot CM=8$，得 $BN=CM=2\sqrt{2}$，从而得出答案.

【详解】(1）∵△ABC 为等腰直角三角形，$\angle BAC=90^\circ$，

∴ $\angle B=\angle C=45^\circ$，同理，$\angle DAE=45^\circ$，

∵ $\angle BAN=\angle BAM+\angle DAE=\angle BAM+45^\circ$，

$\angle AMC=\angle BAM+\angle B=\angle BAM+45^\circ$，

∴ $\angle BAN=\angle AMC$，∴ $\triangle BAN\backsim\triangle CMA$；

（2)（1）∵等腰直角三角形的斜边长为 4，

∴ $AB=AC=2\sqrt{2}$，∵ $\triangle BAN\backsim\triangle CMA$，

∴ $\frac{BN}{AC}=\frac{BA}{CM}$，∴ $\frac{BN}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{CM}$，∴ $BN\cdot CM=8$，

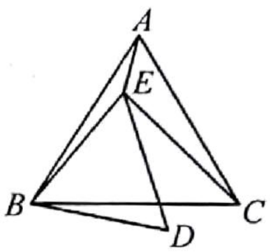
故答案为：8；

（2）∵ $BM=CN$，∴ $BN=CM$，∵ $BN\cdot CM=8$，

∴ $BN=CM=2\sqrt{2}$，∴ $MN=BN+CM-BC=4\sqrt{2}-4$，

故答案为：$4\sqrt{2}-4$.

9．如图，已知点 E 在 $\triangle ABC$ 内，$\angle ABC=\angle EBD=\alpha$，$\angle ACB=\angle EDB=60°$，$\angle AEB=150°$，$\angle BEC=90°$.



（1）当 $\alpha=60°$ 时，求证：$BD=\sqrt{3}AE$；

（2）当 $\alpha=90°$ 时，求 $\dfrac{BD}{AE}$ 的值.

【答案】(1) 见解析；(2) $\dfrac{1}{6}$.

【详解】如图所示图 1，（1）连结 DC，

易证 $\Delta ABE\cong\Delta CBD$，∴ $AE=CD$，证 $\angle EDC=90°$，$\angle CED=30°$，

∴ $BD=ED=\sqrt{3}CD=\sqrt{3}AE$

（2）如图所示图 2，

∴ $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{EB}{BD}$ ∴ $\Delta ABE\sim\Delta CBD$，

∴ $\angle BCD=\angle BAD$ ∴ $CD\perp AD$

又∵ $\angle CED=60°$，

设 $BD=x$，则 $DE=2x$，$CD=2\sqrt{3}x$

∵ $\dfrac{AE}{CD}=\dfrac{AB}{BC}=\sqrt{3}$ ∴ $AE=6x$，∴ $\dfrac{BD}{AE}=\dfrac{1}{6}$

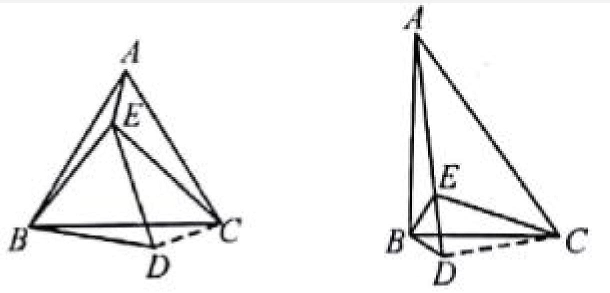


图1　　图2

10．已知 $\triangle ABC$ 中 $\angle ABC=90°$，点 D、E 分别在边 BC、边 AC 上，连接 DE, $DF\perp DE$，点 F、点 C 在直线 DE 同侧，连接 FC，且 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{DF}=k$.

（1）点 D 与点 B 重合时，

①如图 1，$k=1$时，AE 和 FC 的数量关系是_；位置关系是_；

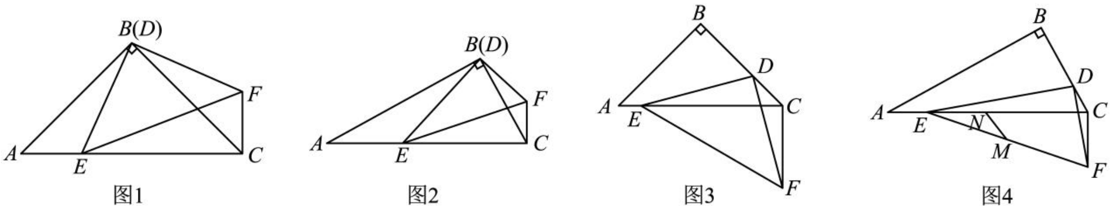


图1　　图2　　图3　　图4

②如图 2，$k=2$时，猜想 AE 和 FC 的关系，并说明理由；

（2）$BD=2CD$时，

③如图 3，$k=1$时，若 $AE=2, S_{\triangle CDF}=6,$ 求 FC 的长度；

④如图 4，$k=2$时，点 M、N 分别为 EF 和 AC 的中点，若 $AB=10$，直接写出 MN 的最小值.

【答案】（1）①AE=FC；$AE\perp FC$；②AE=2FC；$AE\perp FC$；理由见解析；（2）③FC = 6；④MN 的最小值为$\frac{5}{3}$.

【详解】（1）①解：∵$\angle ABC=90^{\circ}, DF\perp DE,$

∴∠ABC=∠EDF=90°，∠A＋∠BCA=90°

∴∠ABE＋∠EDC=∠CDF＋∠EDC

∴∠ABE=∠CDF

∵$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{DF}=k=1$

∴AB=CB，DE=DF

∴△ABE≌△CDF

∴AE=FC，∠A=∠DCF

∴∠DCF＋∠BCA=90°

∴∠ACF=90°

∴AE⊥FC

故答案为：AE=FC；$AE\perp FC$；

②证明：AE=2FC；$AE\perp FC$

∵$DF\perp DE$

∴$\angle EDF=\angle ABC=90^{\circ}$

∴$\angle ABE=\angle CDF$•

∵$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{DF}=2$

∴$\triangle ABE\backsim\triangle CDF$

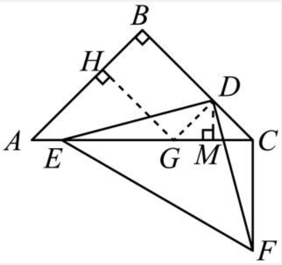
∴$\angle A=\angle DCF$，$\frac{AE}{CF}=2$

∵$\angle A+\angle ACB=90^{\circ}$

∴$\angle DCF+\angle ACB=90^{\circ}$

∴$\angle ACF=90^\circ$；即 $FC\perp AE$·

（2）③解：作 $GD\perp BC$ 于点 D，交 AC 于点 G；作 $GH\perp AB$ 于点 H，交 AB 于点 H；$DM\perp AC$.



∴四边形 $BDGH$ 为矩形

∴$DB=HG$

∵$\angle ABC=90^\circ$，$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{DF}=1$

∴$\angle A=\angle HGA=\angle ACB=45^\circ$

∴$DC=DG$

∵$DE\perp DF$

∴$\angle EDG=\angle FDC$

∴$\triangle EDG\cong\triangle FDC$（SAS）

∴$EG=FC$

∵$BD=2CD$

∴令 $DC=a$，$BD=2a$

∴$AG=2\sqrt{2}a$

∴$EG=2\sqrt{2}a-2$，$MD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$·

∵$S_{\Delta CDF}=6$

∴$S_{\Delta CDF}=\frac{1}{2}EG\cdot MD=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}a-2\right)\frac{\sqrt{2}a}{2}=6$

解得 $a_1=2\sqrt{2}$，$a_2=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$（舍）

∴$FC=EG=6$

④∵$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{DF}=k=2$，AB=10

∴BC=5

∵$BD=2CD$

∴CD=$\frac{1}{3}BC=\frac{5}{3}$

由③易证∠ECF=90°

.

在 Rt△EDF 和 Rt△ECF 中，点 M 为 EF 的中点，连接 MD 和 MC

∴DM=CM=$\frac{1}{2}EF$

∴点 M 的运动轨迹为是 CD 的垂直平分线的一部分，作 CD 的垂直平分线 MH 交 BC 于 H

∴当 NM⊥MH 时，MN 的最小，易知 MN∥BC，MH∥AB，CH=$\frac{1}{2}CD=\frac{5}{6}$

取 BC 的中点 G，连接 NG，则 CG=$\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$

∴NG 为△ABC 的中位线

∴NG∥AB

∴MH∥NG

∴四边形 NMHG 为平行四边形

∴此时 MN=GH=CG－CH=$\frac{5}{3}$

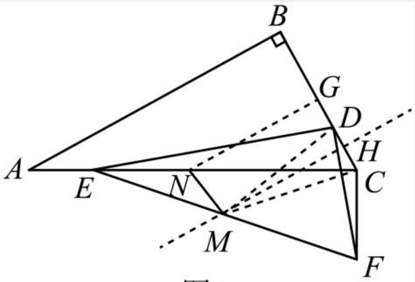


图4

即 MN 的最小值为$\frac{5}{3}$.

11．某校数学活动小组探究了如下数学问题：

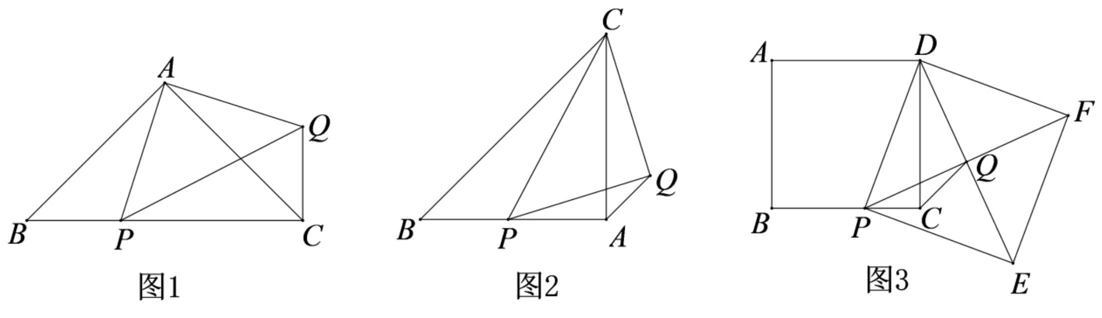


图1　　图2　　图3

(1)问题发现：如图 1，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$．点 P 是底边 BC 上一点，连接 AP，以 AP 为腰作等腰 Rt△APQ，且 $\angle PAQ=90°$，连接 CQ、则 BP 和 CQ 的数量关系是______；

(2)变式探究：如图 2，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$．点 P 是腰 AB 上一点，连接 CP，以 CP 为底边作等腰 Rt△CPQ，连接 AQ，判断 BP 和 AQ 的数量关系，并说明理由；

(3)问题解决：如图 3，在正方形 $ABCD$ 中，点 P 是边 BC 上一点，以 DP 为边作正方形 $DPEF$，点 Q 是正方形 $DPEF$ 两条对角线的交点，连接 CQ. 若正方形 $DPEF$ 的边长为 $\sqrt{10}$，$CQ=\sqrt{2}$，求正方形 $ABCD$ 的边长.

　　　　.

【答案】(1) $BP=CQ$；(2) $BP=\sqrt{2}AQ$；(3) 3

【详解】（1）解：∵ $\triangle APQ$ 是等腰直角三角形，$\angle PAQ=90^\circ$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，

∴ $AP=AQ$，$\angle BAP+\angle PAC=\angle CAQ+\angle PAC$,

∴ $\angle BAP=\angle CAQ$.

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACQ$ 中，$\begin{cases}AB=AC\\ \angle BAP=\angle CAQ\\ AP=AQ\end{cases}$，

∴ $\triangle ABP\cong\triangle ACQ(SAS)$，

∴ $BP=CQ$；

（2）解：判断 $BP=\sqrt{2}AQ$，理由如下：

∵ $\triangle CPQ$ 是等腰直角三角形，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，

∴ $\dfrac{QC}{PC}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle ACB=\angle QCP=45^\circ$.

∵ $\angle BCP+\angle ACP=\angle ACQ+\angle ACP=45^\circ$，

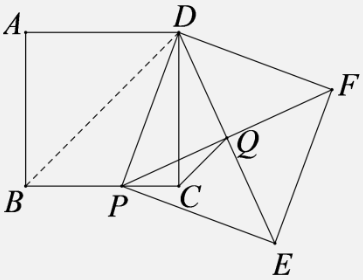
∴ $\angle BCP=\angle ACQ$,

∴ $\triangle CBP\backsim\triangle CAQ$，

∴ $\dfrac{QC}{PC}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AQ}{BP}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $BP=\sqrt{2}AQ$；

（3）解：连接 BD，如图所示，



∵四边形 $ABCD$ 与四边形 $DPEF$ 是正方形，DE 与 PF 交于点 Q,

∴ $\triangle BCD$ 和 $\triangle PQD$ 都是等腰直角三角形，

∴ $\dfrac{QD}{PD}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle BDC=\angle PDQ=45^\circ$.

∵ $\angle BDP+\angle PDC=\angle CDQ+\angle PDC=45^\circ$,

∴ $\angle BDP=\angle CDQ$，

∴ $\triangle BDP\backsim\triangle CDQ$，

$\therefore \frac{QD}{PD}=\frac{CD}{BD}=\frac{CQ}{BP}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because CQ=\sqrt{2}$，

$\therefore BP=\sqrt{2}CQ=2$.

在Rt△PCD中，$CD^2+CP^2=DP^2$，设$CD=x$，则$CP=x-2$，

又$\because$正方形$DPEF$的边长为$\sqrt{10}$，

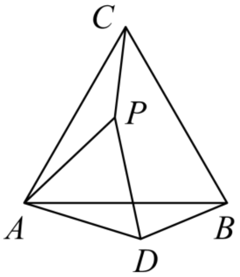
$\therefore DP=\sqrt{10}$，

$\therefore x^2+(x-2)^2=(\sqrt{10})^2$，

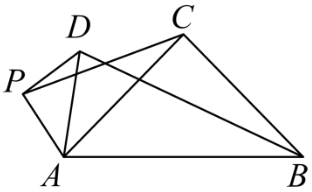
解得$x_1=-1$（舍去），$x_2=3$.

$\therefore$正方形$ABCD$的边长为3.

12．在△ABC中，$CA=CB$，$\angle ACB=\alpha$，点P是平面内不与点A，C重合的任意一点，连接AP，将线段AP绕点P逆时针旋转α得到线段DP，连接AD，BD，CP.



图①



图②

(1)观察猜想

如图①，当$\alpha=60°$时，$\frac{BD}{CP}$的值是_______，直线BD与直线CP相交所成的较小角的度数是________.

(2)类比探究

如图②，当$\alpha=90°$时，请写出$\frac{BD}{CP}$的值及直线BD与直线CP相交所成的较小角的度数，并就图②的情形说明理由.

【答案】(1)1，60°；(2)$\sqrt{2}$，45°，理由见解析

【详解】（1）解：$\because \angle ACB=60°$，$\angle APD=60°$，$CA=CB$，$AP=DP$，

$\therefore$△ACB与△APD都是等边三角形，

$\therefore \angle CAB=\angle PAD=60°$，$AC=AB$，$AP=AD$，

$\therefore \angle CAP=\angle CAB-\angle PAB=\angle PAD-\angle PAB=\angle BAD$，

在△APC与△ADB中，

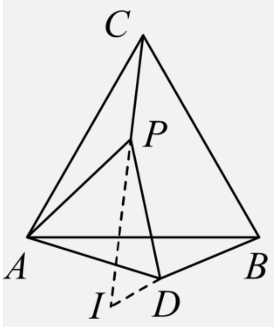
$$\begin{cases}AC=AB\\ \angle CAP=\angle BAD\\ AP=AD\end{cases}$$

$\therefore \triangle APC \cong \triangle ADB(\mathrm{SAS})$，

$\therefore BD = CP$， $\angle ACP = \angle ABD$，

$\therefore \dfrac{BD}{CP} = 1$；

设 CP 与 BD 的延长线交于点 I，如图①，



图①

$\therefore \angle CIB = 180° - \angle PCB - \angle CBD = 180° - (60° - \angle ACP) - (60° + \angle ABD) = 60° + \angle ACP - \angle ABD = 60°$，

∴直线 BD 与直线 CP 相交所成的较小角的度数为 $60°$；

（2）解：$\dfrac{BD}{CP} = \sqrt{2}$，直线 BD 与直线 CP 相交所成的较小角的度数为 $45°$，

理由如下：

$\because \angle ACB = 90°$， $CA = CB$，

$\therefore \angle CAB = 45°$， $\dfrac{AB}{AC} = \sqrt{2}$，

同理可得：$\angle PAD = 45°$， $\dfrac{AD}{AP} = \sqrt{2}$，

$\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AP}$，

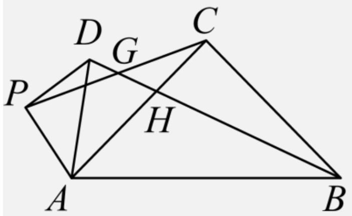
$\because \angle CAB = \angle PAD$.

$\therefore \angle CAB + \angle DAC = \angle PAD + \angle DAC$，即 $\angle DAB = \angle PAC$，

$\therefore \triangle DAB \backsim \triangle PAC$，

$\therefore \dfrac{BD}{CP} = \dfrac{AB}{AC} = \sqrt{2}$， $\angle DBA = \angle PCA$，

设 BD 交 CP 于点 G， BD 交 CA 于点 H，如图②，



图②

$\because \angle BHA=\angle CHG$，

$\therefore \angle CGH=\angle BAH=45^{\circ}$，

∴直线 BD 与直线 CP 相交所成的较小角的度数为 $45°$．

13．如图 1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=BC$，在斜边 AB 上取一点 D，过点 D 作 $DE // BC$，交 AC 于点 E. 现将 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转一定角度到如图 2 所示的位置(点 D 在 $\triangle ABC$ 的内部)，使得 $\angle ABD+\angle ACD=90^{\circ}$．

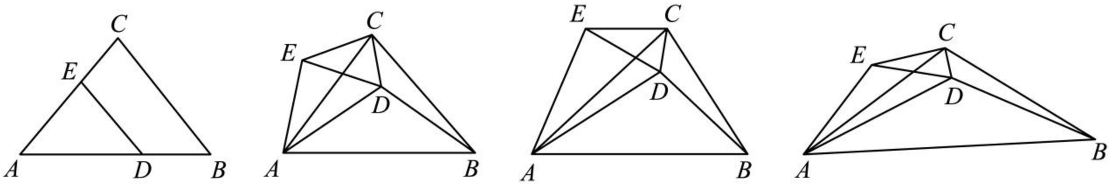


图1　图2　图3　图4

（1）①求证：$\triangle ABD \backsim \triangle ACE$；

②若 $CD=1$, $BD=\sqrt{6}$，求 AD 的长；

（2）如图 3，将原题中的条件“$AC=BC$”去掉，其它条件不变，$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AE}{AD}=k$ 设，若 $CD=1$，$BD=3$，$AD=4$，求 k 的值；

（3）如图 4，将原题中的条件“$\angle ACB=90^{\circ}$”去掉，其它条件不变，若 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{2}{3}$，设 $CD=m$，$BD=n$，$AD=p$，试探究 m，n，p 三者之间满足的等量关系．(直接写出结果，不必写出解答过程)

【答案】(1) ①见解析；② $2\sqrt{2}$；(2) $k=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$；(3) $4p^2=9m^2+4n^2$.

【详解】解：(1) ①∵DE∥BC,

$\therefore \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$，

由旋转知，∠EAC=∠DAB，

∴△ABD∽△ACE，

②在 Rt△ABC 中，AC=BC，

$\therefore AB=\sqrt{2}AC$，

由①知，△ABD∽△ACE，

∴∠ABD=∠ACE，

∵∠ACD+∠ABD=90°，

∴∠ACE+∠ACD=90°，

∴∠DCE=90°，

∵△ABD∽△ACE，

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{BD}{CE}=\sqrt{2}$，

$\therefore AD=\sqrt{2}AE$，$BD=\sqrt{2}CE$

∵ $BD=\sqrt{6}$

∴ $CE=\sqrt{3}$

在 Rt△CDE 中，$CD=1, CE=\sqrt{3}$

根据勾股定理得，DE=2，

在 Rt△ADE 中，AE=DE，

∴ $AD=\sqrt{2}DE=2\sqrt{2}$

（2）由旋转知，∠EAC=∠DAB，

$\because \frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}$,

∴△ABD∽△ACE，

$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{CE}{BD}=k.$

∵AD=4，BD=3，

∴AE=kAD=4k，CE=kBD=3k，

∵△ABD∽△ACE，

∴∠ABD=∠ACE，

∵∠ACD+∠ABD=90°，

∴∠ACE+∠ACD=90°，

∴∠DCE=90°，

在 Rt△CDE 中，$DE^2=CD^2+CE^2=1+9k^2$，

在 Rt△ADE 中，$DE^2=AD^2-AE^2=16-16k^2$，

∴$1+9k^2=16-16k^2$，

∴ $k=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 或 $k=-\frac{\sqrt{15}}{5}$（舍），

（3）由旋转知，∠EAC=∠DAB，

$\because \frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}$

∴△ABD∽△ACE，

$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{CE}{BD}=\frac{2}{3}$

∵AD=p，BD=n，

∴ $AE=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}p, CE=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}n$，

∵△ABD∽△ACE，

∴∠ABD=∠ACE，

∵∠ACD+∠ABD=90°，

∴∠ACE+∠ACD=90°，

∴∠DCE=90°，

在 Rt△CDE 中，$DE^2=CD^2+CE^2=m^2+\frac{4}{9}n^2$，

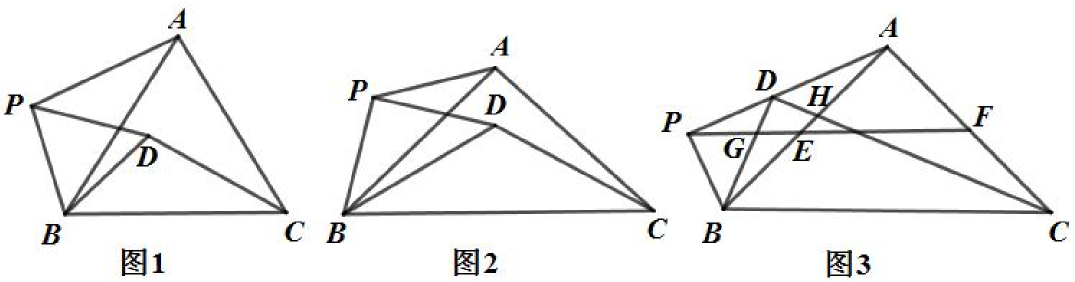
∵ $DE=AE=\frac{2}{3}p$，

∴ $\frac{4}{9}p^2=m^2+\frac{4}{9}n^2$，

∴$4p^2=9m^2+4n^2$.

14．在△*ABC*中，*AB*＝*AC*，∠*BAC*＝α，点 *P* 是△*ABC* 外一点，连接 *BP*，将线段 *BP* 绕点 *P* 逆时针旋转 α 得到线段 *PD*，连接 *BD*，*CD*，*AP*.

观察猜想：



（1）如图 1，当 α＝60° 时，$\frac{CD}{AP}$的值为____，直线 *CD* 与 *AP* 所成的较小角的度数为____°；

类比探究：

（2）如图 2，当 α＝90° 时，求出$\frac{CD}{AP}$的值及直线 *CD* 与 *AP* 所成的较小角的度数；

拓展应用：

（3）如图 3，当 α＝90° 时，点 *E*，*F* 分别为 *AB*，*AC* 的中点，点 *P* 在线段 *FE* 的延长线上，点 *A*，*D*，*P* 三点在一条直线上，*BD* 交 *PF* 于点 *G*，*CD* 交 *AB* 于点 *H*. 若 $CD=2+\sqrt{2}$，求 *BD* 的长.

【答案】（1）1，60；（2）$\frac{CD}{AP}=\sqrt{3}$，直线 *CD* 与 *AP* 所成的较小角的度数为 45°；（3）$BD=\sqrt{2}$.

【详解】（1）∵ α＝60°，*AB*＝*AC*，

∴△*ABC* 是等边三角形，

∴*AB*=*CB*

∵将线段 *BP* 绕点 *P* 逆时针旋转 α 得到线段 *PD*，

∴△*BDP* 是等边三角形，

∴*BP*=*BD*

∵∠*PBA*=∠*PBD*−∠*ABD*=60°−∠*ABD*，∠*DBC*=∠*ABC*−∠*ABD*=60°−∠*ABD*，

∴∠*PBA*=∠*DBC*

∴△PBA≌△DBC，

∴AP=CD

∴$\frac{CD}{AP}$=1

如图，延长CD交AB，AP分别于点G，H，则∠AHC为直线CD与AP所成的较小角，

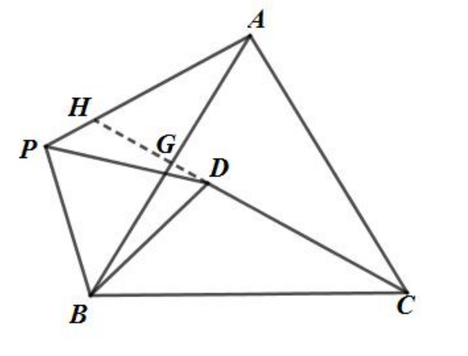
∵△PBA≌△DBC

∴∠PAB=∠DCB

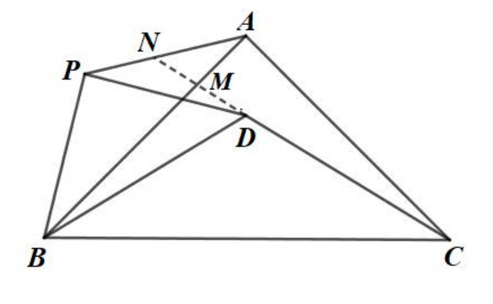
∵∠HGA=∠BGC

∴∠AHC＝∠ABC＝60°

故答案为：1，60；



（2）解：如图，延长CD交AB，AP分别于点M，N，则∠ANC为直线CD与AP所成的较小角，



∵AB＝AC，∠BAC＝90°，

∴∠ABC＝45°．

在Rt△ABC中，$\frac{AB}{BC}$＝cos∠ABC＝cos45°＝$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

∵PB＝PD，∠BPD＝90°，

∴∠PBD＝∠PDB＝45°．

在Rt△PBD中，$\frac{PB}{BD}$＝cos∠PBD＝cos45°＝$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

∴$\frac{AB}{BC}=\frac{PB}{BD}$，∠$ABC$＝∠$PBD$.

∴∠ABC－∠ABD＝∠PBD－∠ABD.

即 $\angle PBA=\angle DBC$.

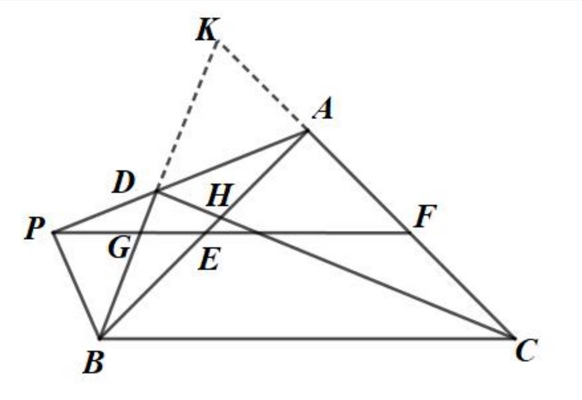
∴ $\triangle PBA\backsim\triangle DBC$.

∴ $\dfrac{CD}{AP}=\dfrac{BC}{AB}=\sqrt{2}$，$\angle PAB=\angle DCB$.

∵ $\angle AMN=\angle CMB$，∴ $\angle ANC=\angle ABC=45°$．

即 $\dfrac{CD}{AP}=\sqrt{2}$，直线 CD 与 AP 所成的较小角的度数为 45°．

(3) 延长 CA，BD 相交于点 K，如图.



∵ $\angle APB=90°$，E 为 AB 的中点，∴ $EP=EA=EB$.

∴ $\angle EAP=\angle EPA$，$\angle EBP=\angle EPB$.

∵点 E，F 为 AB，AC 的中点，

∴ $PF // BC$.

∴ $\angle AFP=\angle ACB=\angle PBD=45°$．

∵ $\angle BGP=\angle FGK$，

∴ $\angle BPE=\angle K$.

∴ $\angle K=\angle EBP$，

∵ $\angle EBP=\angle PEB$，$\angle PEB=\angle DBC$，

∴ $\angle K=\angle CBD$.

∴ $CB=CK$.

∴ $\angle BCD=\angle KCD$.

由 (2) 知 $\angle ADC=\angle PDB=45°$，$\triangle PBA\backsim\triangle DBC$，

∴ $\angle PAB=\angle DCB$.

∴ $\angle BDC=180°-45°-45°=90°=\angle BAC$.

∵ $\angle BHD=\angle CHA$，

∴ $\angle DBA=\angle DCA$.

∴ $\angle DBA=\angle PAB$.

∴ $AD=BD$.

由(2)知 $DC=\sqrt{2}AP$，

∴$AP=\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.

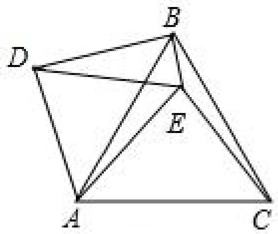
在 $Rt\triangle PBD$ 中，$PB=PD=x$，由勾股定理可得 $BD=\sqrt{PB^2+PD^2}=\sqrt{2}x=AD$.

∴$AD+PD=x+\sqrt{2}x=AP=1+\sqrt{2}$.

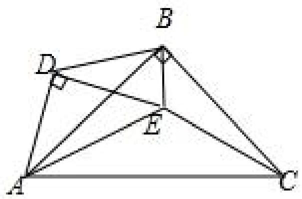
∴$x=1$.

∴$BD=\sqrt{2}$.

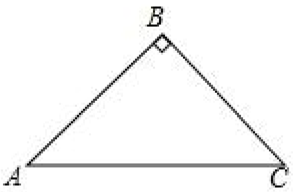
15．在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中，$BA=BC$，$DA=DE$，且 $\angle ABC=\angle ADE=\alpha$，点 E 在 $\triangle ABC$ 的内部，连接 EC，EB，EA 和 BD，并且 $\angle ACE+\angle ABE=90^\circ$.



图①



图②



备用图

【观察猜想】

(1)如图①，当 $\alpha=60^\circ$ 时，线段 BD 与 CE 的数量关系为__________，线段 EA,EB,EC 的数量关系为__________.

【探究证明】

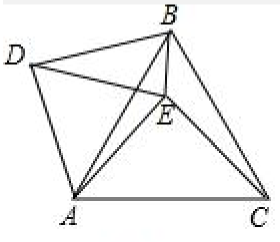
（2）如图②，当 $\alpha=90^\circ$ 时，（1）中的结论是否依然成立？若成立，请给出证明，若不成立，请说明理由；

【拓展应用】

（3）在（2）的条件下，当点 E 在线段 CD 上时，若 $BC=2\sqrt{5}$，请直接写出 $\triangle BDE$ 的面积.

【答案】（1）$BD=CE$，$EB^2+EC^2=EA^2$；（2）不成立，理由见解析；（3）2

【详解】（1）如图①中，



图①

∵$BA=BC$，$DA=DE$. 且 $\angle ABC=\angle ADE=60^\circ$，

∴$\triangle ABC$，$\triangle ADE$ 都是等边三角形，

∴$AD=AE$，$AB=AC$，$\angle DAE=\angle BAC=60^\circ$，

∴$\angle DAB=\angle EAC$，

∴$\triangle DAB\cong\triangle EAC$（$SAS$），

∴$BD=EC$，$\angle ABD=\angle ACE$，

∵$\angle ACE+\angle ABE=90°$，

∴$\angle ABD+\angle ABE=90°$，

∴$\angle DBE=90°$，

∴$DE^2=BD^2+BE^2$,

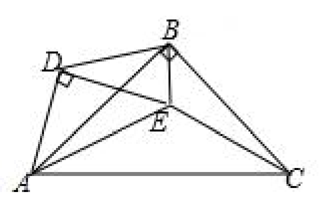
∵$EA=DE$，$BD=EC$,

∴$EA^2=BE^2+EC^2$.

故答案为：$BD=EC$，$EA^2=EB^2+EC^2$.

（2）结论：$EA^2=EC^2+2BE^2$.

理由：如图②中，



图②

∵$BA=BC$，$DA=DE$．且$\angle ABC=\angle ADE=90°$，

∴$\triangle ABC$，$\triangle ADE$都是等腰直角三角形，

∴$\angle DAE=\angle BAC=45°$，

∴$\angle DAB=\angle EAC$,

∵$\frac{AD}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$，

∴$\triangle DAB\backsim\triangle EAC$,

∴$\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle ACE=\angle ABD$,

∵$\angle ACE+\angle ABE=90°$，

∴$\angle ABD+\angle ABE=90°$，

∴$\angle DBE=90°$，

∴$DE^2=BD^2+BE^2$,

∵$EA=\sqrt{2}DE$，$BD=\frac{\sqrt{2}}{2}EC$,

∴$\frac{1}{2}EA^2=\frac{1}{2}EC^2+BE^2$,

∴$EA^2=EC^2+2BE^2$.

（3）如图③中，

.