

2024 届广东省五粤名校联盟高三第一次联考 数学 试题

本试卷分选择题和非选择题两部分.第 I 卷(选择题)第 1 页,第 II 卷(非选择题)第 2 页,共 2 页.满分 150 分,考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填在答题卡规定的位置上.
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其他答案标号.
3. 答非选择题时,必须使用钢笔或黑色墨迹签字笔作答,将答案书写在答题卡规定的位置上,答题卡上不得使用铅笔或涂改液.
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效.

第 I 卷(选择题,共 58 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 在复数范围内,方程 $z^2 = 3 + 2i$ 的解有 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无数个

2. 二项式 $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^9$ 的各项系数之和为 ()

- A. 512 B. $\frac{1}{512}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

3. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线交抛物线于 A, B 两点. 则 $|AF| + 4|BF|$ 的最小值为 ()

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

4. 现有随机事件 A, B , 其中 $P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{1}{6}$, 则下列说法不正确的是 ()

- A. 事件 A, B 不相互独立 B. $P(A|B) = \frac{1}{2}$
C. $P(B|A)$ 可能等于 $P(B)$ D. $P(A+B) = \frac{11}{30}$

5. 将边长为 2 的正三角形沿某条线折叠, 使得折叠后的立体图形有外接球, 则当此立体图形体积最大时, 其外接球表面积为 ()

- A. 4π B. $\frac{68-16\sqrt{3}}{9}\pi$ C. $\frac{11}{2}\pi$ D. $\frac{52-16\sqrt{3}}{9}\pi$

6. 令 $a_n = \sin 0.5^\circ (\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos n^\circ), n \in \mathbb{N}_+$. 则 a_n 的最大值在如下哪个区间中 ()

- A. (0.49,0.495) B. (0.495,0.5)
C. (0.5,0.505) D. (0.505,0.51)

7. 若在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3, BC=1, AA_1=4$. 则四面体 ABB_1C_1 与四面体 A_1C_1BD 公共部分的体积为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{13}$ C. $\frac{10}{39}$ D. $\frac{7}{26}$

8. 设有正数列 $\{a_n\}$, 其前 k 项和为 S_k . 则下列哪一个 $f(n) \geq 0$ 能使对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$ 都有

$$\frac{f(n)}{S_n} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{a_k} \text{ 成立 ()}$$

- A. $f(n) = 2n$ B. $f(n) = \frac{n^2}{2}$
C. $f(n) = \ln n$ D. $f(n) = \frac{1}{n}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 6 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 设 $0 \leq p \leq 1$, 随机变量 X 的分布列如下图所示, 则下列说法正确的有 ()

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1+p}{4}$

- A. $E(X)$ 恒为 1 B. $E(X)$ 随 p 增大而增大
C. $D(X)$ 恒为 $\frac{1}{2}$ D. $D(X)$ 最小值为 0

10. 关于函数的周期性, 下列说法正确的有 ()

- A. $\sin x^2$ 是周期函数, 最小正周期为 $\sqrt{\pi}$
B. $\sin(\cos x + \sin x)$ 是周期函数, 最小正周期为 4π
C. $\cos x \cos 2x \cos 3x$ 是周期函数, 最小正周期为 π
D. $(\cos 2x)^{\sin 3x}$ 是周期函数, 最小正周期为 2π

11. 设有数列 $\{a_n\}, n \in \mathbf{N}$, 记 $f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, 其中 $a_n \neq 0$. 则下列说法正确的有 ()

- A. $f_n(x)$ 有零点对任意奇数 n 成立
- B. 若 n 为偶数且 $a_0 < 0$, 则 $f_n(x)$ 至少有两个零点
- C. 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 与 $M > 0$, 一定存在 X 使当 $x > X$ 时, $|f_n(x)| > M$ 恒成立
- D. 若 $\{a_n\}$ 恒为 1, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 2$ 都有唯一正零点, 且一定大于 $\frac{1}{2}$

第 II 卷 (非选择题, 共 92 分)

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 若 $xy = 3$, 则 $x\sqrt{\frac{y}{x}} + y\sqrt{\frac{x}{y}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $f(x) = \cos x \cos 2x$ 在 $x \in [0, \pi]$ 的极值点个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个.

14. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心, 且 $\vec{AO} \cdot \vec{BC} = 1, |\vec{BC}| = 1$. 设实数 λ, μ 满足 $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$, 则 $\frac{2\lambda}{2\mu-1}$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为等差数列, $a_2 = b_3$, $a_1 = 2b_1$, $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $\frac{19n+n^2}{2}$.

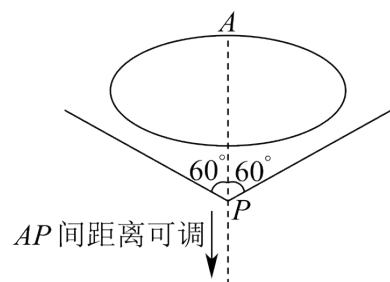
(1) 求出 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 是否存在每一项都是整数的等差数列 $\{c_n\}$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}_+$, c_n 都能满足

$$\frac{|a_n + b_n| - |a_n - b_n|}{2} \leq c_n \leq \frac{|a_n + b_n| + |a_n - b_n|}{2}.$$

若存在, 求出所有上述的 $\{c_n\}$; 若不存在, 请说明理由.

16. 现有一“V”型的挡板如图所示, 一椭圆形物件的短轴顶点被固定在 A 点. 物件可绕 A 点在平面内旋转. AP 间距离可调节且与两侧挡板的夹角固定为 60° . 已知椭圆长轴长为 4, 短轴长为 2.



(1) 在某个角度固定椭圆, 则当椭圆不超过挡板时 AP 间距离最短为多少;

(2) 为了使椭圆物件能自由绕 A 点自由转动, AP 间距离最短为多少. 求出最短距离并证明其可行性.

17. 已知 $f(x) = e^{ax} - x$, $g(x) = ae^{ax} - 2ax + \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个零点 x_1, x_3 ($x_1 < x_3$), 证明: $g(x)$ 存在三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$;

(3) 在 (2) 的条件下, 证明: $x_1 x_3 < x_2^2$.

18. 在组合恒等式的证明中, 构造一个具体的计数模型从而证明组合恒等式的方法叫做组合分析法, 该方法体现了数学的简洁美, 我们将通过如下的例子感受其妙处所在.

(1) 对于 n 元一次方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, 试求其正整数解的个数;

(2) 对于 n 元一次方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_m = p+1 \\ x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n = q+1 \end{cases}$, 试求其非负整数解的个数;

(3) 证明: $C_{p+q+n+1}^n = \sum_{k=0}^n C_{p+k}^k C_{q+n-k}^{n-k}$ (可不使用组合分析法证明).

注: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 = b \\ x_2 = a \end{cases}$ 可视为二元一次方程的两组不同解.

19. 设 X, Y 为任意集合, 映射 $f: X \rightarrow Y$. 定义: 对任意 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 此时的 f 为单射.

(1) 试在 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 上给出一个非单射的映射;

(2) 证明: f 是单射的充分必要条件是: 给定任意其他集合 Z 与映射 $g, h: Z \rightarrow X$, 若对任意 $z \in Z$, 有 $f(g(z)) = f(h(z))$, 则 $g = h$;

(3) 证明: f 是单射的充分必要条件是: 存在映射 $\varphi: Y \rightarrow X$, 使对任意 $x \in X$, 有 $\varphi(f(x)) = x$.

2024 届广东省五粤名校联盟高三第一次联考 数学 试题

本试卷分选择题和非选择题两部分.第 I 卷(选择题)第 1 页,第 II 卷(非选择题)第 2 页,共 2 页.满分 150 分,考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填在答题卡规定的位置上.
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其他答案标号.
3. 答非选择题时,必须使用钢笔或黑色墨迹签字笔作答,将答案书写在答题卡规定的位置上,答题卡上不得使用铅笔或涂改液.
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效.

第 I 卷(选择题,共 58 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 在复数范围内,方程 $z^2 = 3 + 2i$ 的解有 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无数个

【答案】C

【解析】

【分析】设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 根据复数相等得到方程组, 消元求出 a 的值, 即可判断.

【详解】设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 则 $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$,

又 $z^2 = 3 + 2i$, 所以 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 2 \end{cases}$, 消元整理得 $a^4 - 3a^2 - 1 = 0$,

解得 $a^2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ 或 $a^2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < 0$ (舍去)

所以 $a = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}$,

故在复数范围内, 方程 $z^2 = 3 + 2i$ 有两个解.

故选: C

2. 二项式 $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^9$ 的各项系数之和为 ()

A. 512

B. $\frac{1}{512}$

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】令 $x=1$ 进而求解即得.【详解】令 $x=1$, 则二项式 $\left(1-\frac{1}{2}x\right)^9$ 的各项系数之和为 $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$,

故选: B

3. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线交抛物线于 A, B 两点. 则 $|AF|+4|BF|$ 的最小值为 ()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】D

【解析】

【分析】利用抛物线的焦点弦性质结合基本不等式计算即可.

【详解】由题意可知 $F(1,0)$, 设 $l_{AB}: x=ky+1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,联立直线 AB 与抛物线方程 $\begin{cases} y^2=4x \\ x=ky+1 \end{cases} \Rightarrow y^2-4ky-4=0 \Rightarrow y_1y_2=-4$,所以 $x_1x_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = 1$,而 $|AF|+4|BF| = x_1+1+4(x_2+1) = x_1+4x_2+5 \geq 2\sqrt{x_1 \cdot 4x_2}+5=9$.当且仅当 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$ 时取得等号.

故选: D

4. 现有随机事件 A, B , 其中 $P(A)=\frac{1}{5}, P(B)=\frac{1}{3}, P(AB)=\frac{1}{6}$, 则下列说法不正确的是 ()A. 事件 A, B 不相互独立B. $P(A|B)=\frac{1}{2}$ C. $P(B|A)$ 可能等于 $P(B)$ D. $P(A+B)=\frac{11}{30}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用独立事件的乘法公式、条件概率公式、和事件的概率公式计算即可.

【详解】易知 $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \neq P(AB)$, 所以事件 A, B 不相互独立, 即 A 正确;

由条件概率公式可知 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$,

故 B 正确, C 错误;

由和事件的概率公式可知 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$,

故 D 正确;

故选: C

5. 将边长为 2 的正三角形沿某条线折叠, 使得折叠后的立体图形有外接球, 则当此立体图形体积最大时, 其外接球表面积为 ()

- A. 4π B. $\frac{68-16\sqrt{3}}{9}\pi$ C. $\frac{11}{2}\pi$ D. $\frac{52-16\sqrt{3}}{9}\pi$

【答案】B

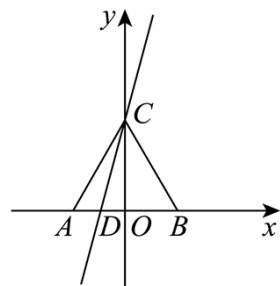
【解析】

【分析】首先分类讨论得出, 满足题意的直线为 $EF: y = \sqrt{3}\left(x - 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 且此时

$d_3 = |BG| = \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2} = 1$, 进一步求出底面四边形外接圆圆心 O_1 坐标、半径, 从而得 O_1 到直线 EF 的距

离 d_4 , 设出外接球球心到底面的距离 h_1 , 结合 $OA = OB = R$ 可得 $R^2 = r^2 + h_1^2 = (d_3 - h_1)^2 + d_4^2$, 由此可得外接球半径 R , 进而即可求解.

【详解】若将边长为 2 的正三角形沿某条线折叠, 且这条线过三角形的某个顶点且不垂直于三角形的边, 由题意以 D 为原点, 以边长为 2 的等边三角形的 AB 边为 x 轴, AB 边上的高 CD 为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系:



由题意 $A(-1, 0), B(1, 0), C(0, \sqrt{3})$,

不失一般性, 设 $CD: y = kx + \sqrt{3}, (k > \sqrt{3})$ (也就是设点 D 在不包含端点的线段 OA 上),

在 $CD: y = kx + \sqrt{3}, (k > \sqrt{3})$ 中, 令 $y = 0$ 得 $x = -\frac{\sqrt{3}}{k}$,

所以 $\triangle BCD$ 的面积为 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot CO = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{k}\right) \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{k + \sqrt{3}}{k}$,

而点 $A(-1, 0)$ 到直线 $CD: y = kx + \sqrt{3}, (k > \sqrt{3})$ 的距离为 $d_1 = \frac{k - \sqrt{3}}{\sqrt{k^2 + 1}}$,

此时三棱锥 $A-BCD$ 体积的最大值为 $V_1 = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot d_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{k^2 - 3}{k\sqrt{k^2 + 1}}$ (此时面 $ACD \perp$ 面 BCD),

所以 $0 < V_1^2 = \frac{(k^2 - 3)^2}{12k^2(k^2 + 1)} = \frac{1}{12\left(\frac{3}{k^2 - 3} + 1\right)\left(\frac{4}{k^2 - 3} + 1\right)} < \frac{1}{12}$,

所以 $0 < V_1 < \frac{\sqrt{3}}{6}$;

若将边长为 2 的正三角形沿某条线折叠, 且这条线过三角形的某个顶点且垂直于三角形的边,

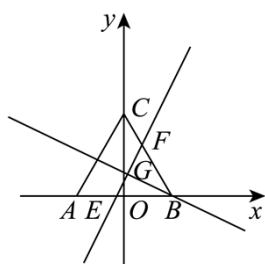
此时上述情况中的点 D 于原点 O 重合,

此时三棱锥 $A-BCD$ 体积的最大值为

$V_2 = \frac{1}{3}S_{\triangle BCO} \cdot d_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}BO \cdot OC\right) \cdot AO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (此时面 $ACO \perp$ 面 BCO),

其中 d_2 为点 A 到 OC 的距离, 即 AO 的长度;

将边长为 2 的正三角形沿某条线折叠, 且这条线不过三角形的任何顶点, 如图所示:



不失一般性, 设该直线分别与 AB, BC 交于点 E, F ,

折叠后的立体图形有外接球, 则 A, E, F, G 四点共圆, 从而 $\angle CFE + \angle CAE = \pi$,

又因为 $\angle CFE = \angle FEB + \angle FBE = \angle FEB + \frac{\pi}{3}, \angle CAE = \frac{\pi}{3}$,

所以 $\angle FEB = \frac{\pi}{3} = \angle CAB$, 所以 $\triangle FEB \sim \triangle CAB$,

由题意 $A(-1,0), B(1,0), C(0,\sqrt{3})$, 设 $EF: y = \sqrt{3}(x-a), (-1 < a < 1)$,

$$\text{所以 } S_{\text{四边形}AEFC} = \left[1 - \left(\frac{1-a}{2} \right)^2 \right] S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \left[1 - \left(\frac{1-a}{2} \right)^2 \right] = \frac{\sqrt{3}(1+a)(3-a)}{4},$$

$$\text{过点 } B \text{ 向 } EF \text{ 引垂线, 垂足为 } G, \text{ 则 } d_3 = |BG| = \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2},$$

所以四棱锥 $B-AEFC$ 体积的最大值为

$$V_3 = \frac{1}{3} S_{\text{四边形}AEFC} \cdot d_3 = \frac{(a+1)(a-1)(a-3)}{8} = \frac{1}{8} (a^2-1)(a-3) = \frac{1}{8} (a^3-3a^2-a+3), (-1 < a < 1) \quad (\text{此时四边}$$

形 $AEFC$ 与三角形 BEF 垂直),

$$\text{从而 } V_3'(a) = \frac{1}{8} (3a^2-6a-1), \quad V_3'(a) = \frac{1}{8} (3a^2-6a-1) = 0 \Rightarrow a = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } a = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{当 } -1 < a < 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } V_3'(a) > 0, \quad V_3(a) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{当 } 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < a < 1 \text{ 时, } V_3'(a) < 0, \quad V_3(a) \text{ 单调递减,}$$

$$\text{所以当且仅当 } a = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 有}$$

$$(V_3)_{\max} = V_3 \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{1}{8} \times \left[\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 1 \right] \times \left[\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) - 3 \right] = \frac{2\sqrt{3}}{9} > \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\text{综上所述, 满足题意的直线为 } EF: y = \sqrt{3} \left(x - 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right), \text{ 且此时 } d_3 = |BG| = \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2} = 1,$$

此时我们首先来求四边形 $AEFC$ 外接圆圆心 O_1 ,

$$\text{因为 } AB \text{ 中点坐标为 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad AB \text{ 斜率为 } \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } AB \text{ 的垂直平分线方程为 } y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \left(x + \frac{1}{2} \right),$$

$$\text{而 } AE \text{ 中垂线方程为 } x = \frac{-1 + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

从而解得 $O_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)$,

所以四边形 $AEFC$ 外接圆半径为 $r = |O_1A| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}{3}$,

而 O_1 到直线 $EF: y = \sqrt{3}\left(x-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 的距离为 $d_4 = \frac{\left|\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right|}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{3}$,

又满足题意的四棱锥 $B-AEFC$ 的高为 $d_3 = |BG| = \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2} = 1$,

设满足题意的四棱锥 $B-AEFC$ 的外接球球心为 O ,

设球心到平面 $AEFC$ 的距离为 h_1 ,

则由 $OA = OB = R$ 可得, $R^2 = r^2 + h_1^2 = (d_3 - h_1)^2 + d_4^2$, 即 $\frac{16-4\sqrt{3}}{9} = 1 - 2h_1 + \frac{13-4\sqrt{3}}{9}$,

解得 $h_1 = \frac{1}{3}$, $R^2 = \frac{16-4\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{17-4\sqrt{3}}{9}$,

从而满足题意的球表面积 $S = \frac{68-16\sqrt{3}}{9}\pi$.

故选: B.

【点睛】关键点点睛: 关键是得出满足题意的直线为 $EF: y = \sqrt{3}\left(x-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 且此时

$d_3 = |BG| = \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2} = 1$, 由此即可顺利得解.

6. 令 $a_n = \sin 0.5^\circ (\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos n^\circ)$, $n \in \mathbb{N}_+$. 则 a_n 的最大值在如下哪个区间中 ()

A. (0.49, 0.495)

B. (0.495, 0.5)

C. (0.5, 0.505)

D. (0.505, 0.51)

【答案】B

【解析】

【分析】先通过 $\sin 0.5^\circ \cos n^\circ = \frac{1}{2} [\sin(n^\circ + 0.5^\circ) - \sin(n^\circ - 0.5^\circ)]$, 利用裂项相消法求出 a_n , 观察得其

最大值可取 a_{90} , 然后计算其范围即可.

【详解】由于 $\sin 0.5^\circ \cos n^\circ = \frac{1}{2} [\sin(n^\circ + 0.5^\circ) - \sin(n^\circ - 0.5^\circ)]$

$$a_n = \sin 0.5^\circ (\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos n^\circ)$$

$$= \sin 0.5^\circ \cos 1^\circ + \sin 0.5^\circ \cos 2^\circ + \sin 0.5^\circ \cos 3^\circ + \dots + \sin 0.5^\circ \cos n^\circ$$

$$= \frac{1}{2} [\sin 1.5^\circ - \sin 0.5^\circ + \sin 2.5^\circ - \sin 1.5^\circ + \sin 3.5^\circ - \sin 2.5^\circ + \dots + \sin(n^\circ + 0.5^\circ) - \sin(n^\circ - 0.5^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(n^\circ + 0.5^\circ) - \sin 0.5^\circ]$$

根据三角函数的性质可知,

当 $n = 90 + k \cdot 360, k \in \mathbb{Z}$ 或 $n = 89 + k \cdot 360, k \in \mathbb{Z}$ 时, $\sin(n^\circ + 0.5^\circ)$ 取最大值,

不妨取 $n = 90$,

$$\text{则 } \frac{1}{2} [\sin(90^\circ + 0.5^\circ) - \sin 0.5^\circ] = \frac{1}{2} (\cos 0.5^\circ - \sin 0.5^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 44.5^\circ < \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 45^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \frac{1}{2} (\cos 0.5^\circ - \sin 0.5^\circ) = \frac{1}{2} (\sqrt{1 - \sin^2 0.5^\circ} - \sin 0.5^\circ),$$

因为当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\sin x \leq x$

$$\text{所以 } \sqrt{1 - \sin^2 0.5^\circ} - \sin 0.5^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{360}} - \sin \frac{\pi}{360} > \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{360}\right)^2} - \frac{\pi}{360}$$

要比较 $\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{360}\right)^2} - \frac{\pi}{360}$ 与 0.495 的大小,

即比较 $1 - \left(\frac{\pi}{360}\right)^2$ 与 $\left(\frac{99}{200} + \frac{\pi}{360}\right)^2$ 的大小,

$$1 - \left(\frac{\pi}{360}\right)^2 - \left(\frac{99}{200} + \frac{\pi}{360}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{\pi}{360}\right)^2 - \left(\frac{99}{200}\right)^2 - \frac{99\pi}{36000}$$

$$> 1 - \frac{2\pi^2}{360^2} - \left(\frac{100}{200}\right)^2 - \frac{100\pi}{36000} = \frac{3}{4} - \frac{2\pi^2}{360^2} - \frac{\pi}{360} > \frac{3}{4} - \frac{2 \times 4^2}{360^2} - \frac{4}{360} = \frac{3}{4} - \frac{92}{90 \times 90} > 0$$

$$\text{故 } \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{360}\right)^2} - \frac{\pi}{360} > 0.495.$$

$$\text{所以 } 0.495 < \frac{1}{2} [\sin(90^\circ + 0.5^\circ) - \sin 0.5^\circ] < \frac{1}{2}.$$

故选: B.

证明: 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\sin x \leq x$

设 $f(x) = \sin x - x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

所以 $f(x) \leq f(0) = 0$, 即当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\sin x \leq x$.

【点睛】关键点点睛: 本题的关键是利用 $\sin x \leq x$ 对式子进行放缩, 可以将三角运算转化为非三角运算.

7. 若在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3, BC=1, AA_1=4$. 则四面体 ABB_1C_1 与四面体 A_1C_1BD 公共部分的体积为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{13}$ C. $\frac{10}{39}$ D. $\frac{7}{26}$

【答案】A

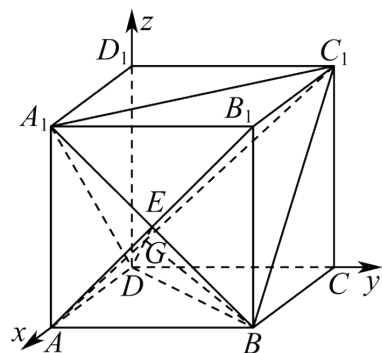
【解析】

【分析】设 $AB_1 \cap A_1B = O$, $AC_1 \cap \text{平面 } A_1BD = G$, 可知四面体 ABB_1C_1 与四面体 A_1C_1BD 公共部分为四面体 $GEBC_1$, 建系, 利用空间向量分析可知 G 为 $\triangle A_1BD$ 的重心, 进而根据体积关系运算求解.

【详解】设 $AB_1 \cap A_1B = O$, $AC_1 \cap \text{平面 } A_1BD = G$,

可知四面体 ABB_1C_1 与四面体 A_1C_1BD 公共部分为四面体 $GEBC_1$,

以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x, y, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系,



则 $A(1,0,0), B(1,3,0), D(0,0,0), E\left(1, \frac{3}{2}, 2\right), A_1(1,0,4), C_1(0,3,4)$,

可得 $\overrightarrow{DA_1} = (1,0,4), \overrightarrow{DB} = (1,3,0), \overrightarrow{DE} = \left(1, \frac{3}{2}, 2\right), \overrightarrow{AC_1} = (-1,3,4)$,

设平面 A_1BD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DA_1} = x + 4z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = x + 3y = 0 \end{cases}$,

令 $x=12$, 则 $y=-4, z=-3$, 可得 $\vec{n} = (12, -4, -3)$,

$$\text{设 } \overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AC_1} = (-\lambda, 3\lambda, 4\lambda),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = (1-\lambda, 3\lambda, 4\lambda),$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{DG} \perp \vec{n}, \text{ 则 } 12(1-\lambda) - 12\lambda - 12\lambda = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{3},$$

$$\text{可得 } \overrightarrow{DG} = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right), \text{ 即 } \overrightarrow{DG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DE},$$

$$\text{在 } \triangle A_1BD \text{ 中, 结合 } E \text{ 为 } A_1B \text{ 的中点, 可知 } G \text{ 为 } \triangle A_1BD \text{ 的重心, 则 } S_{\triangle BEG} = \frac{1}{6} S_{\triangle A_1BD},$$

$$\text{所以四面体 } GEBC_1 \text{ 的体积 } V_{GEBC_1} = \frac{1}{6} V_{A_1C_1BD} = \frac{1}{18} V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{18} \times 3 \times 1 \times 4 = \frac{2}{3}.$$

故选: A.

【点睛】关键点点睛: 根据题意分析可知公共部分, 利用空间向量的相关知识确定点 G 的位置, 即可得结果.

8. 设有正数列 $\{a_n\}$, 其前 k 项和为 S_k . 则下列哪一个 $f(n) \geq 0$ 能使对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$ 都有

$$\frac{f(n)}{S_n} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{a_k} \text{ 成立 ()}$$

A. $f(n) = 2n$

B. $f(n) = \frac{n^2}{2}$

C. $f(n) = \ln n$

D. $f(n) = \frac{1}{n}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】首先当 $n=1$ 时, 要满足 $f(1) \leq 1$, 故可排除 A, 先证明两个引理, 借助引理说明 B 选项符合题意;

对于 CD 而言只需分别证明 $\ln n \leq \frac{n^2}{2}, \frac{1}{n} \leq \frac{n^2}{2}$ 即可说明 CD 符合题意.

【详解】首先取 $n=1$, 则有 $\frac{f(1)}{a_1} + \frac{1}{a_1} \leq \frac{2}{a_1}$ 成立, 其中 $a_1 > 0$ (因为数列 $\{a_n\}$ 是正数列),

从而需要满足 $f(1) \leq 1$, 对比选项可知 A 不符合题意,

接下来我们证明如下引理 1: $\sum_{i=k}^n \frac{1}{i(i+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \frac{1}{2k^2}, (n \geq k),$

证明: 首先当 $n=k$ 时, 左边等于 $\frac{1}{k(k+1)^2} + \frac{1}{2(k+1)^2} = \frac{k+2}{2k(k+1)^2} = \frac{k(k+2)}{2k^2(k+1)^2} \leq \frac{(k+1)^2}{2k^2(k+1)^2} = \frac{1}{2k^2},$

其次假设结论已对 n 成立, 即 $\sum_{i=k}^n \frac{1}{i(i+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \frac{1}{2k^2}$ (*),

$$\text{由于 } \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \geq \frac{2n+2}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)^2},$$

$$\text{从而 } \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} + \frac{1}{2(n+2)^2} \leq \frac{1}{2(n+1)^2} (**),$$

(*) 与 (**) 相加有 $\sum_{i=k}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)^2} + \frac{1}{2(n+2)^2} \leq \frac{1}{2k^2}$, 故结论对 $n+1$ 也成立,

综上所述, 引理 1 成立,

我们继续来证明引理 2: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \right) \geq (1+2+\dots+n)^2, (a_1, a_2, \dots, a_n > 0)$,

证明: 当 $n=1$ 时, 左边 $= a_1 \cdot \frac{1^2}{a_1} = 1 \geq 1 =$ 右边, 即此时引理 1 成立,

设结论已经对 n 成立, 即 $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \right) \geq (1+2+\dots+n)^2$,

记 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = p, \frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} = q$, 显然 $p, q > 0$,

$$\begin{aligned} & \text{从而 } (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} + \frac{(n+1)^2}{a_{n+1}} \right) \\ &= (p + a_{n+1}) \left(q + \frac{(n+1)^2}{a_{n+1}} \right) = pq + p \frac{(n+1)^2}{a_{n+1}} + qa_{n+1} + (n+1)^2 \\ &\geq pq + 2(n+1)\sqrt{pq} + (n+1)^2 \\ &= (\sqrt{pq} + n+1)^2 = [1+2+\dots+n+(n+1)]^2, \end{aligned}$$

故结论对 $n+1$ 也成立,

综上, 引理 2 成立,

现在我们回到原题, 对于 B, 也就是 $f(n) = \frac{n^2}{2}$,

$$\begin{aligned} & \text{则 } \frac{f(n)}{S_n} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} = \frac{f(n)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} \\ &\leq \frac{f(n)}{(1+2+\dots+n)^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{k}{(1+2+\dots+k)^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{k^2}{a_k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{k^2}{a_k} \right) + 4 \frac{f(n)}{n^2(n+1)^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \right) \\
&= 4 \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} \left[\sum_{i=k}^n \frac{1}{i(i+1)^2} + \frac{f(n)}{n^2(n+1)^2} \right] = 4 \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} \left[\sum_{i=k}^n \frac{1}{i(i+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} \right] \\
&\leq 4 \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} \cdot \frac{1}{2k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{a_k}, \text{ 故 B 符合题意,}
\end{aligned}$$

对于 C, 当 $n=1$ 时, $f(1)=\ln 1=0 \leq 1$ 满足题意,

当 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ 时, 我们来比较 $\ln n, \frac{n^2}{2}$ 的大小,

令 $g(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x, x \geq 2$, 从而 $g'(x) = x - \frac{1}{x} > 0$, 即 $g(x)$ 单调递增从而 $g(x) \geq g(2) = 2 - \ln 2 > 0$,

也就是当 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ 时, $\ln n < \frac{n^2}{2}$,

结合 B 选项分析可知 C 选项也符合题意;

对于 D, 当 $n=1$ 时, $f(1) = \frac{1}{1} = 1 \leq 1$ 满足题意,

当 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ 时, 我们来比较 $\frac{1}{n}, \frac{n^2}{2}$ 的大小,

显然此时 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} = \frac{2^2}{2} \leq \frac{n^2}{2}$, 结合 B 选项分析可知 D 选项也符合题意.

故选: BCD.

【点睛】关键点点睛: 关键是先证明上述两个引理, 从而当 $f(n) = \frac{n^2}{2}$ 时, 有 $\frac{f(n)}{S_n} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{a_k}$ 成立, 由此即可顺利得解.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设 $0 \leq p \leq 1$, 随机变量 X 的分布列如下图所示, 则下列说法正确的有 ()

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1+p}{4}$

A. $E(X)$ 恒为 1

B. $E(X)$ 随 p 增大而增大

C. $D(X)$ 恒为 $\frac{1}{2}$

D. $D(X)$ 最小值为 0

【答案】AC

【解析】

【分析】由概率之和为 1 求出 $p=0$ ，再由数学期望和方差的公式求解即可。

【详解】因为 $\frac{1}{4} + \frac{1-p}{2} + \frac{1+p}{4} = 1$ ，解得： $p=0$ ，

所以随机变量 X 的分布列如下图，

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

因为 $E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$ ，

$E(X)$ 恒为 1，故 A 正确；B 错误；

$D(X) = (0-1)^2 \times \frac{1}{4} + (1-1)^2 \times \frac{1}{2} + (2-1)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ，

故 C 正确，D 错误。

故选：AC。

10. 关于函数的周期性，下列说法正确的有（ ）

A. $\sin x^2$ 是周期函数，最小正周期为 $\sqrt{\pi}$

B. $\sin(\cos x + \sin x)$ 是周期函数，最小正周期为 4π

C. $\cos x \cos 2x \cos 3x$ 是周期函数，最小正周期为 π

D. $(\cos 2x)^{\sin 3x}$ 是周期函数，最小正周期为 2π

【答案】CD

【解析】

【分析】根据给定条件，利用周期函数的定义，结合正余弦函数的最小正周期逐项判断即得。

【详解】对于 A，假设 $\sin x^2$ 是周期函数，则对任意实数 x ，存在非零常数 T ，使得

$$\sin x^2 = \sin(x+T)^2,$$

即 $\sin x^2 = \sin(x^2 + 2Tx + T^2)$ ，显然 $2Tx + T^2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 对任意实数 x 不恒成立，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/585141212142011201>