

三角恒等变换

考纲原文

1. 和与差的三角函数公式

- (1) 会用向量的数量积推导出两角差的余弦公式.
- (2) 能利用两角差的余弦公式导出两角差的正弦、正切公式.
- (3) 能利用两角差的余弦公式导出两角和的正弦、余弦、正切公式, 导出二倍角的正弦、余弦、正切公式, 了解它们的内在联系.

2. 简单的三角恒等变换

能运用上述公式进行简单的恒等变换(包括导出积化和差、和差化积、半角公式, 但对这三组公式不求记忆).



一、两角和与差的三角函数公式

1. 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

- (1) $C_{(\alpha-\beta)}$: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- (2) $C_{(\alpha+\beta)}$: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- (3) $S_{(\alpha+\beta)}$: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- (4) $S_{(\alpha-\beta)}$: $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- (5) $T_{(\alpha+\beta)}$: $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} (\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z})$
- (6) $T_{(\alpha-\beta)}$: $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} (\alpha, \beta, \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z})$

2. 二倍角公式

- (1) $S_{2\alpha}$: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- (2) $C_{2\alpha}$: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- (3) $T_{2\alpha}$: $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} (\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 且 } \alpha \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z})$

3. 公式的常用变形

$$(1) \tan \alpha \pm \tan \beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan \alpha \tan \beta); \quad \tan \alpha \tan \beta = 1 - \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan(\alpha - \beta)} - 1$$

$$(2) \text{降幂公式: } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$(3) \text{升幂公式: } 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha; \quad 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha; \quad 1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2;$$

$$1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$$

$$(4) \text{辅助角公式: } a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \quad \text{其中 } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}$$

二、简单的三角恒等变换

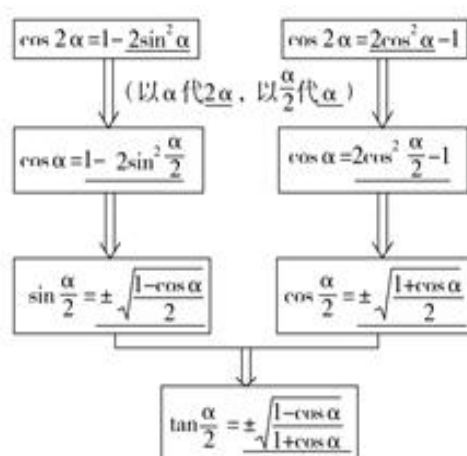
1. 半角公式

$$(1) \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$(2) \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$(3) \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

【注】此公式不用死记硬背，可由二倍角公式推导而来，如下图：



2. 公式的常见变形（和差化积、积化和差公式）

(1) 积化和差公式：

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] ;$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] ;$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] ;$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] .$$

(2) 和差化积公式:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} ;$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} ;$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} ;$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} .$$



考向一 三角函数式的化简

1. 化简原则

- (1) 一看角之间的差别与联系, 把角进行合理的拆分, 正确使用公式;
- (2) 二看函数名称之间的差异, 确定使用的公式, 常见的有“切化弦”;
- (3) 三看结构特征, 找到变形的方向, 常见的有“遇到分式要通分”, “遇到根式一般要升幂”等.

2. 化简要求

- (1) 使三角函数式的项数最少、次数最低、角与函数名称的种类最少;
- (2) 式子中的分母尽量不含根号.

3. 化简方法

- (1) 切化弦;
- (2) 异名化同名;
- (3) 异角化同角;
- (4) 降幂或升幂.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/585333221010012020>