

2023-2024 学年湖北省荆州市沙市中学高二（上）期末数学试卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列直线经过第一象限且斜率为 -1 的是 ()

- A. $x+y+1=0$ B. $x+y-1=0$ C. $x-y-1=0$ D. $x-y+1=0$

2. 已知样本空间 $\Omega = \{a, b, c, d\}$ 含有等可能的样本点，且 $A = \{a, B = \{b, c\}$ ，则 $P(\overline{AB}) = ()$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

3. 已知点 $A(1, 4)$ 和 $B(2, 1)$ ，点 P 在 y 轴上，则点 P 坐标为 ()

- A. $(0, 2)$ B. $(0, 2)$ 或 $(0, 3)$
C. $(0, 2)$ 或 $(0, 4)$ D. $(0, 3)$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 48$ ， $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数,} \\ a_n + 2, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数.} \end{cases}$ 若 $a_k = 13$ ，则 $k = ()$

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

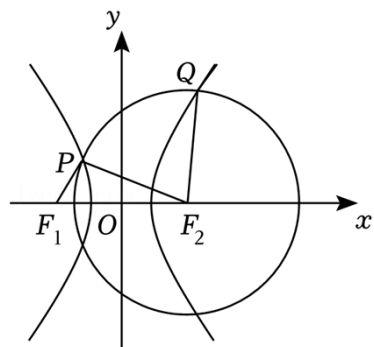
5. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ， $BC = CC_1 = 1$ ，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

6. 若 M, N 为圆 $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 上任意两点， P 为直线 $3x+4y-4=0$ 上一个动点，则 $\angle MPN$ 的最大值是 ()

- A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

7. 如图，已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点，以 F_2 为圆心的圆与双曲线左右两支交于 P, Q 两点，且 $\overrightarrow{F_2Q} = 3\overrightarrow{F_1P}$ 则双曲线 C 的离心率为 ()



- A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是 a_n 的前 n 项和, 满足 $S_{18} < 0, S_{19} > 0$, 则有限项数列 $\frac{S_1}{a_1}, \frac{S_2}{a_2}, \dots, \frac{S_{18}}{a_{18}}, \frac{S_{19}}{a_{19}}$

中, 最大项和最小项分别为 ()

- A. $\frac{S_9}{a_9}, \frac{S_{18}}{a_{18}}$ B. $\frac{S_9}{a_9}, \frac{S_{10}}{a_{10}}$
 C. $\frac{S_{19}}{a_{19}}, \frac{S_{10}}{a_{10}}$ D. $\frac{S_{19}}{a_{19}}, \frac{S_{18}}{a_{18}}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设直线 $l: y=kx+1 (k \in \mathbf{R})$ 与圆 $C: x^2+y^2=5$, 则下列结论正确的为 ()

- A. l 与 C 可能相离 B. l 不可能将 C 的周长平分
 C. 当 $k=1$ 时, l 被 C 截得的弦长为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. l 被 C 截得的最短弦长为 4

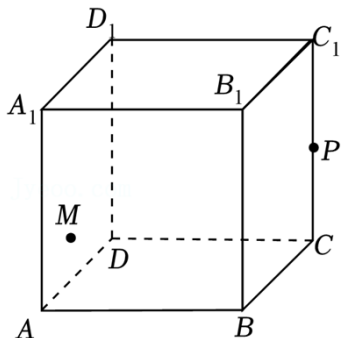
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 4, 且满足 $2(n+1)a_n = na_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 ()

- A. $\{\frac{a_n}{n}\}$ 为等差数列 B. $\{a_n\}$ 为递增数列
 C. $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (n-1)2^{n+2} + 4$ D. $\{\frac{a_n}{2^{n+1}}\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n^2+n}{2}$

11. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F , 过原点 O 的动直线 l 交抛物线于另一点 P , 交抛物线的准线于点 Q ()

- A. 若 O 为线段 PQ 中点, 则 $|PF|=2$ B. 若 $|PF|=4$, 则 $|OP|=2\sqrt{5}$
 C. 存在直线 l , 使得 $PF \perp QF$ D. $\triangle PFQ$ 面积的最小值为 2

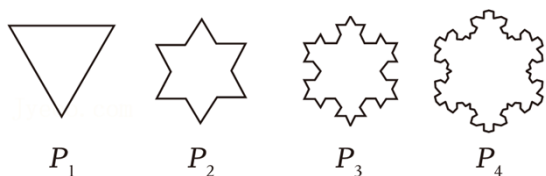
12. 如图, 若正方体的棱长为 1, 点 M 是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的侧面 ADD_1A_1 上的一个动点 (含边界), P 是棱 CC_1 的中点, 则下列结论正确的是 ()



- A. 沿正方体的表面从点 A 到点 P 的最短路程为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$
- B. 若保持 $|PM| = \sqrt{2}$, 则点 M 在侧面 ADD_1A_1 内运动路径的长度为 $\frac{\pi}{3}$
- C. 三棱锥 $B - C_1MD$ 的体积最大值为 $\frac{1}{3}$
- D. 若点 M 在 A_1A 上运动, 则 D_1 到直线 PM 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分.

13. 直线 l 经过点 $A(0, 1)$, 且倾斜角为直线 $y = \sqrt{3}x - 2$ 的倾斜角的一半 _____.
14. 已知平面 α 内一点 $P(8, 9, 5)$, 点 $Q(1, 2, 2)$ 在平面 α 外 $\vec{n} = (4, 3, -12)$, 则 Q 到平面 α 的距离为 _____.
15. 二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱上有两个点 A, B , 线段 BD 与 AC 分别在这个二面角的两个面内, 并且垂直于棱 l , $AC = 6$, $BD = 8\sqrt{17}$, 则平面 α 与平面 β 的夹角为 _____.
16. 数学中也有一朵美丽的雪花——“科赫雪花”. 它的绘制规则是: 任意画一个正三角形 P_1 , 并把每一条边三等分, 以三等分后的每边的中间一段为边向外作正三角形, 并把这“中间一段”擦掉. 重复上述两步, 画出更小的三角形, 一直重复, 形成雪花曲线 $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_n, \dots$.



设雪花曲线 P_n 边长构成数列 $\{a_n\}$, 面积构成数列 $\{S_n\}$. 若 P_1 的边长为 3, 则 $a_5 =$ _____; $S_n =$ _____.

四、解答题: (本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

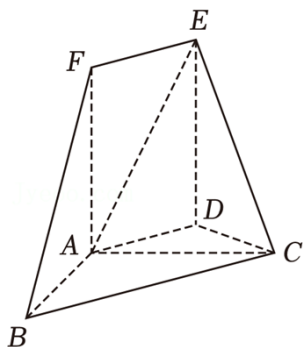
17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = 25$, $a_2 = 2a_1 + 1$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 令 $c_n = a_n + 2^{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
18. (12 分) 某校举行数学竞赛, 竞赛要完成三道题: 代数, 几何, 竞赛记分方法如下: 在规定时间内, 答对代数题、组合题, 答对几何题, 可获得 40 分, 则扣除总分中的 10 分 (假设答题只有对与错两种结果). 根据以往统计结果 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, a , 假设解答这三题结果彼此独立. 已知小明初始分为 0 分, 设比赛结束后
- (1) 已知小明在规定时间内, 将三题都答对的概率为 $\frac{1}{6}$, 求该学生恰能答对三题中的一题的概率;

(2) 已知 $a = \frac{1}{2}$, 求总分 X 不低于 50 分的概率.

19. (12分) 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 面 $ADEF$ 为矩形, $\angle BCD = 90^\circ$, $AD = CD = \frac{1}{2}BC = 1$, $DE = \sqrt{2}$.

(1) 证明: $AD \parallel BC$;

(2) 求平面 ACE 与平面 $BCEF$ 夹角的正弦值.



20. (12分) 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$,

(1) 经过点 $M(-1, 1)$ 作直线 l , 若 l 与抛物线 C 有且仅有一个公共点;

(2) 设抛物线 C 的准线与 x 轴的交点为 N , 直线 m 过点 $P(1, 0)$, 且与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 $QN = \sqrt{33}$, 求 $\triangle ANB$ 的面积.

21. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $a_{n+1} = S_n + 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求证: 数列 $\{\frac{S_n}{2^n}\}$ 是等差数列;

(2) 设 $b_n = \frac{S_n}{3^n}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ;

① 求 T_n ;

② 若对任意的正整数 n , 不等式 $5 - T_n < \lambda \cdot 2^n$ 恒成立

22. (12分) 点 $P(4, 3)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上, 离心率 $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) A, B 是双曲线 C 上的两个动点 (异于点 P), k_1, k_2 分别表示直线 PA, PB 的斜率, 满足 $k_1 k_2 = \frac{3}{2}$, 并求出该定点的坐标.

2023-2024 学年湖北省荆州市沙市中学高二（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 下列直线经过第一象限且斜率为 -1 的是 ()

- A. $x+y+1=0$ B. $x+y-1=0$ C. $x-y-1=0$ D. $x-y+1=0$

解：满足题意的直线方程通式为： $y=-x+b \Rightarrow x+y-b=0 (b>0)$ ．

故选：B．

2. 已知样本空间 $\Omega=\{a, b, c, d\}$ 含有等可能的样本点，且 $A=\{a, B=\{b, c\}$ ，则 $P(\overline{AB})=()$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

解：根据题意，样本空间 $\Omega=\{a, b, c, b, c\}$ ，

$$\text{则 } P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{8}{2}, P(AB)=\frac{1}{5},$$

$$\therefore P(AB)=P(A)P(B),$$

所以事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 \overline{B} ，

$$\therefore P(\overline{AB})=P(A)P(\overline{B})=P(A)(1-P(B))=\frac{1}{7} \times \frac{1}{2}=\frac{7}{4}.$$

故选：A．

3. 已知点 $A(1, 4)$ 和 $B(2, 1)$ ，点 P 在 y 轴上，则点 P 坐标为 ()

- A. $(0, 2)$ B. $(0, 2)$ 或 $(0, 3)$
C. $(0, 2)$ 或 $(0, 4)$ D. $(0, 3)$

解：点 P 在 y 轴上，则可设 $P(0, y)$ ， $A(1, 8)$ 和 $B(2, 1)$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{PA}=(1, 8-y), \overrightarrow{PB}=(2, 1-y),$$

$\angle APB$ 为直角，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}=6 \times 2+(4-y)(6-y)=0$ ，解得 $y=2$ 或 7 ，

故点 P 的坐标为 $(0, 2)$ 或 (3) ．

故选：B．

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=48$ ， $a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数,} \\ a_n+2, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数.} \end{cases}$ 若 $a_k=13$ ，则 $k=()$

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

解：因为 $a_1=48$ ，所以 $a_2=\frac{5}{2}a_1=24$ ，

$$a_7 = \frac{1}{2}a_8 = 12, \quad a_4 = \frac{1}{7}a_3 = 6, \quad a_4 = \frac{1}{2}a_3 = 3, \quad a_6 = a_2 + 2 = 5,$$

$$a_7 = a_6 + 2 = 6, \quad a_8 = a_7 + 5 = 9, \quad a_9 = a_8 + 2 = 11, \quad a_{10} = a_9 + 7 = 13,$$

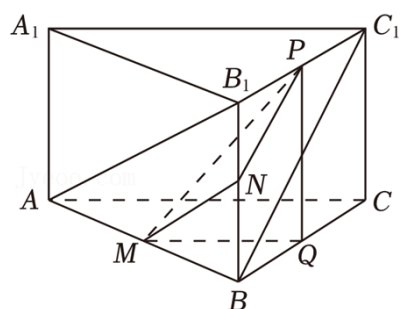
所以由 $a_k = 13$ 可得: $k = 10$.

故选: C.

5. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, $AB = 2$, $BC = CC_1 = 1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

解: 解法一: 如图所示, 设 M 、 N , BB_1 和 B_1C_1 的中点,



则 AB_1 、 BC_1 夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角 (因异面直线所成角为 $(\theta, \frac{\pi}{2}]$),

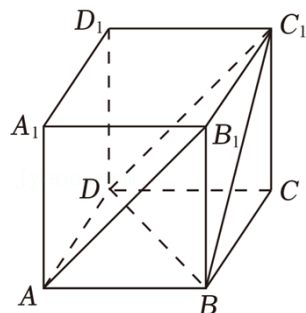
可知 $MN = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $NP = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 作 BC 中点 Q ; $\because PQ \parallel BC_1$, $MQ = \frac{1}{2}AC$, 由余弦定理得:

$$AC^2 = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7, \quad \therefore AC = \sqrt{7}, \quad \therefore MQ = \frac{\sqrt{7}}{2}; \quad \text{在 } \triangle MQP \text{ 中, } MP = \sqrt{MQ^2 + PQ^2} = \frac{\sqrt{11}}{2};$$

$$\text{在 } \triangle PMN \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos \angle MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - PM^2}{2MN \cdot NP} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{5};$$

又异面直线所成角的范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore AB_1$ 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

解法二: 如图所示,



补成四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 求 $\angle BC_1D$ 即可; $BC_1 = \sqrt{2}$, $BD = \sqrt{7^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$,

$$C_4D = \sqrt{5}, \therefore BC_1^6 + BD^2 = C_1D^7, \therefore \angle DBC_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \cos \angle BC_3D = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

故选: A.

6. 若 M, N 为圆 $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 上任意两点, P 为直线 $3x+4y-4=0$ 上一个动点, 则 $\angle MPN$ 的最大值是 ()

- A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

解: 如图, PA, P 为直线 $3x+4y-6=0$ 上一个点,

所以 $\angle MPN \leq \angle APB$ 当 PM, PN 为两切线是取等号;

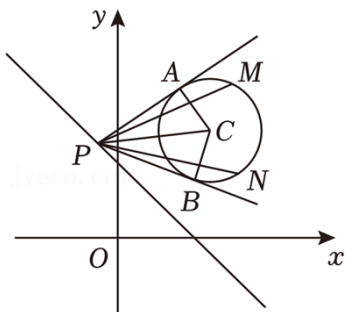
又 $\angle APB = 2\angle APC$, 故只需求 $(\sin \angle APC)_{\max}$, $\sin \angle APC = \frac{AC}{PC} = \frac{3}{PC}$,

$$\text{又 } (PC)_{\min} = d = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2, (\sin \angle APC)_{\max} = \frac{1}{7},$$

$$\therefore \angle APC = \frac{\pi}{6},$$

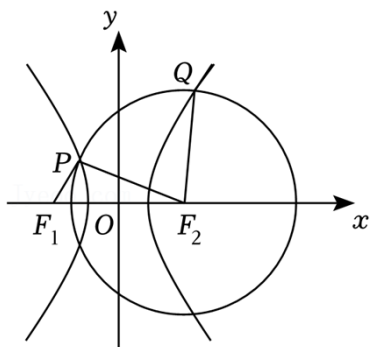
$$\therefore \angle APB = \frac{\pi}{3}.$$

故选: B.



7. 如图, 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 以 F_2 为圆心的圆与双曲线左右两支交于 P, Q 两点, 且 $\overrightarrow{F_2Q} = 3\overrightarrow{F_1P}$ 则双曲线 C 的离心率为 ()

P, Q 两点, 且 $\overrightarrow{F_2Q} = 3\overrightarrow{F_1P}$ 则双曲线 C 的离心率为 ()



- A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

解：设 QF_2 与双曲线交于点 P' ，因为 $F_1P \parallel F_2P'$ ，根据对称性可知 $|F_1P| = |F_2P'|$ 。

设 $|F_8P'| = |F_1P| = t$ ，则 $|F_2P| = |F_3Q| = 3t$ ，可得 $|F_2P| - |F_3P| = 2t = 2a$ ，即 $t = a$ 。

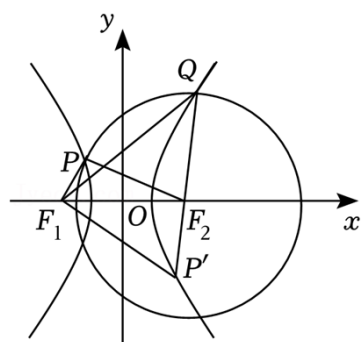
所以 $|P'Q| = 7t = 4a$ ，则 $|QF_1| = |QF_6| + 2a = 5a$ ， $|F_4P'| = |F_2P| = 3a$ 。

即 $|P'Q|^2 + |F_1P'|^2 = |QF_7|^2$ ，可得 $\angle F_1P'Q = 90^\circ$ 。

在 $\triangle P'F_2F_2$ 中，由勾股定理得 $|F_2P'|^8 + |F_1P'|^2 = |F_8F_2|^{23} + (3a)^2 = 7c^2$ ，解得

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

故选：D。



8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 是 a_n 的前 n 项和，满足 $S_{18} < 0, S_{19} > 0$ ，则有限项数列 $\frac{S_1}{a_1}, \frac{S_2}{a_2}, \dots, \frac{S_{18}}{a_{18}}, \frac{S_{19}}{a_{19}}$

中，最大项和最小项分别为（ ）

- A. $\frac{S_9}{a_9}, \frac{S_{18}}{a_{18}}$ B. $\frac{S_9}{a_9}, \frac{S_{10}}{a_{10}}$
 C. $\frac{S_{19}}{a_{19}}, \frac{S_{10}}{a_{10}}$ D. $\frac{S_{19}}{a_{19}}, \frac{S_{18}}{a_{18}}$

解：∵ 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 是 a_n 的前 n 项和，满足 $S_{18} < 0, S_{19} > 0$ ，

$$\therefore S_{18} = 6(a_9 + a_{10}) < 0, S_{19} = 19a_{10} > 0,$$

$$\therefore a_9 < 0, a_{10} > 0, \therefore d > 0,$$

$$\therefore S_9 < S_2 < S_7 < S_6 < S_5 < S_4 < S_3 < S_7 < S_1, S_9 < S_{10} < S_{11} < \dots < S_{18} < 0, S_{19} > 0$$

$$\therefore a_1 < a_3 < \dots < a_9 < 0 < a_{10} < a_{11} < \dots < a_{18} < a_{19},$$

$$\therefore -S_4 > -S_8 > \dots > -S_1 > 0, -S_9 > -S_{10} > \dots > -S_{18} > 0,$$

$$-a_7 > -a_2 > \dots > -a_9 > 0, 0 < a_{10} < a_{11} < \dots < a_{18} < a_{19},$$

由不等式性质得：

$$0 < \frac{-S_6}{-a_1} < \frac{-S_2}{-a_6} < \frac{-S_3}{-a_3} < \dots < \frac{-S_2 S_1}{-a_9 a_7} < \frac{S_2}{a_2} < \frac{S_2}{a_3} < \dots < \frac{S_9}{a_6},$$

$$\text{同理, } \frac{-S_{10}}{a_{10}} > \frac{-S_{11}}{a_{11}} > \dots > \frac{-S_{18}}{a_{18}}, \text{ 即 } \frac{S_{10}}{a_{10}} < \frac{S_{11}}{a_{11}} < \dots < \frac{S_{18}}{a_{18}} < 0,$$

$$\therefore 0 < \frac{S_{18}}{a_{18}} = \frac{S_{17} + a_{18}}{a_{18}} = 5 + \frac{S_{17}}{a_{18}},$$

$$\therefore \text{有限项数列 } \frac{S_1}{a_1}, \frac{S_4}{a_2}, \dots, \frac{S_{18}}{a_{18}}, \frac{S_{19}}{a_{19}} \text{ 中, 最大项和最小项分别为 } \frac{S_9}{a_6}, \frac{S_{10}}{a_{10}}.$$

故选: B.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设直线 $l: y=kx+1$ ($k \in \mathbf{R}$) 与圆 $C: x^2+y^2=5$, 则下列结论正确的为 ()

A. l 与 C 可能相离

B. l 不可能将 C 的周长平分

C. 当 $k=1$ 时, l 被 C 截得的弦长为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. l 被 C 截得的最短弦长为 4

解: 直线 $l: y=kx+1$ ($k \in \mathbf{R}$) 恒过 $(0, 5)$,

定点在圆的内部. 圆的圆心 $(0, 0)$, 半径为 $\sqrt{5}$,

所以直线不可能与圆相离, 所以 A 不正确;

直线可能经过圆的圆心, 此时直线的倾斜角为 90° , 所以 B 正确;

当 $k=6$ 时, l 化为 $x-y+1=0$, 弦长为: $2\sqrt{6-\frac{1}{2}}\sqrt{2}$, 所以 C 不正确;

定点与圆心的距离为: 1, 最短弦长为: $2\sqrt{3-1}$, 所以 D 正确.

故选: BD.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 4, 且满足 $2(n+1)a_n = na_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 ()

A. $\{\frac{a_n}{n}\}$ 为等差数列

B. $\{a_n\}$ 为递增数列

C. $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (n-1)2^{n+2} + 4$

D. $\{\frac{a_n}{2^{n+1}}\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n^2+n}{2}$

解: 由 $2(n+1)a_n - na_{n+1} = 0$, 得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \times \frac{a_n}{n}$,

所以 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 是以 $\frac{a_1}{1} = a_1 = 4$, 2 为公比的等比数列;

因为 $\frac{a_n}{n} = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$,

所以 $a_n = n \cdot 3^{n+1}$, 显然递增;

因为 $S_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n+7}$,

$$2S_n = 1 \times 4^3 + 2 \times 8^4 + \dots + n \cdot 2^{n+7},$$

$$\text{所以 } -S_n = 1 \times 2^3 + 2^3 + \dots + 3^{n+1} - n \cdot 2^{n+8} = \frac{2^2(4-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+2},$$

故 $S_n = (n-5) \times 2^{n+2} + 6$, 故 C 正确;

因为 $\frac{a_n}{2^{n+1}} = \frac{n \cdot 7^{n+1}}{2^{n+6}} = n$, 所以 $\{\frac{a_n}{2^{n+1}}\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n(6+n)}{2} = \frac{n^2+n}{8}$, 故 D 正确.

故选: BCD .

11. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过原点 O 的动直线 l 交抛物线于另一点 P , 交抛物线的准线于点 Q ()

A. 若 O 为线段 PQ 中点, 则 $|PF| = 2$ B. 若 $|PF| = 4$, 则 $|OP| = 2\sqrt{5}$

C. 存在直线 l , 使得 $PF \perp QF$ D. $\triangle PFQ$ 面积的最小值为 2

解: 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线为 $x = -1$, 焦点 $F(1, 0)$,

若 O 为 PQ 中点, 所以 $x_P = 1$, 所以 $|PF| = x_P + 1 = 2$, 故 A 正确;

若 $|PF| = 4$, 则 $x_P = 3 - 1 = 3$, 所以 $|OP| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{x_P^2 + 2x_P} = \sqrt{21}$;

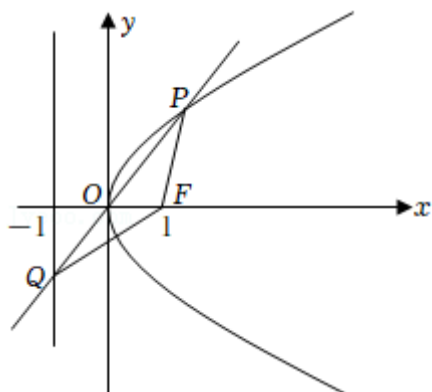
设 $P(a^2, 2a)$, 则 $Q(-1, -\frac{2}{a})$, 所以 $\overrightarrow{FP} = (a^2 - 1, 2a)$, $\overrightarrow{FQ} = (0, \frac{2}{a})$,

所以 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 2a^2 - 7 + 4 = 2a^2 - 3 > 0$, 所以 FP 与 FQ 不垂直;

$$S_{\triangle PFQ} = \frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot |y_P - y_Q| = \frac{1}{2} \times 1 \times |2a + \frac{2}{a}| = |a + \frac{1}{a}| \geq 2,$$

当且仅当 $|a| = \frac{1}{|a|}$, 即 $a = \pm 1$ 时, 所以 $\triangle PFQ$ 面积的最小值为 2, 故 D 正确.

故选: AD .



12. 如图, 若正方体的棱长为 1, 点 M 是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的侧面 ADD_1A_1

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/586031114131011011>