

@备考首选

通关无忧 轻松拿下考试

-  基础阶段－专业知识
-  刷题阶段－重点题库
-  冲刺阶段－押题点睛
-  考点覆盖－精编习题
-  紧扣考纲－直击考点
-  历年真题－押题抢分

本封面内容仅供参考，实际内容请认真预览本电子文本

祝您考试顺利

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷

(非数学类,2009)

考试形式：闭卷

考试时间：120 分钟

满分：100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	20	5	15	15	10	10	15	10	100
得分									

- 注意：1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得 分	
评阅人	

一、填空题 (每小题 5 分，共 20 分)

- (1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dx dy=$ _____, 其中区域 D 表示由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.
- (2) 设 $f(x)$ 是连续函数，且满足

$$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x) dx-2,$$

则 $f(x)=$ _____.

- (3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是_____.
- (4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$ ，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ _____.

得 分	
评阅人	

正整数.

二、(5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的

得 分	
评阅人	

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

三、(15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且

得 分	
评阅人	

四、(15 分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$,

L 为 D 的正向边界, 试证 :

- (1) $\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx;$
- (2) $\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2.$

得 分	
评阅人	

五、(10 分) 已知

$$y_1 = x e^x + e^{2x}, y_2 = x e^x + e^{-x}, y_3 = x e^x + e^{2x} - e^{-x}$$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

得 分	
评阅人	

六、(10 分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2 \ln c$ 过原点，当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $y \geq 0$ ，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c ，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

姓名_____

身份证号_____

所在院校_____

年级_____

专业_____

.....

密.....

封.....

.....

线.....

.....

得 分	
评阅人	

七、(15 分) 已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x \, (n = 1, 2, \cdots),$$

且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

得 分	
评阅人	

八、(10 分) 求 $x \rightarrow 1^-$ 时, 与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

首届全国大学生数学竞赛决赛试卷

(非数学类,2010)

考试形式：闭卷

考试时间：150 分钟

满分：100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	20	10	10	10	12	14	12	12	100
得分									

- 注意：1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得 分	
评阅人	

一、计算下列各题 (共 20 分，每小题各 5 分，要求写出重要步骤).

- (1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n^2}$.
- (2) 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{ax \, dydz + (z+a)^2 \, dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ，其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}$ 的上侧， $a > 0$.
- (3) 现要设计一个容积为 V 的一个圆柱体的容器. 已知上下两底的材料费为单位面积 a 元，而侧面的材料费为单位面积 b 元. 试给出最节省的设计方案：即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少？
- (4) 已知 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 内满足 $f'(x) = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ ，求 $f(x)$.

得 分	
评阅人	

二、(10 分) 求下列极限

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right);$
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} \right)^n$, 其中 $a > 0, b > 0, c > 0$.

得 分	
评阅人	

三、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 点附近有定义, 且在 $x = 1$

点可导, $f(1) = 0, f'(1) = 2$. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2 + x \tan x}$.

姓名_____

氣

评阅人

收敛. 求 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^y x f(x) dx$.

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 无穷积分 $\int_0^{\infty} f(x) dx$

得 分	
评阅人	

五、(12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可微, 且 $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. 证明 :

- (1) 存在 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 使得 $f(\xi) = \xi$;
- (2) 存在 $\eta \in (0, \xi)$ 使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

得 分	
评阅人	

六、(14 分) 设 $n > 1$ 为整数,

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \right) dt.$$

证明 : 方程 $F(x) = \frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2}, n\right)$ 内至少有一个根.

得 分	
评阅人	

$$f(f(x)) = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5?$$

若存在, 请给出一个例子; 若不存在, 请给出证明.

得 分	
评阅人	

八、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x \in [0, \infty)$, 当自然数 $n \rightarrow \infty$ 时 $f(x+n) \rightarrow 0$. 证明: 函数序列 $\{f(x+n): n = 1, 2, \dots\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0.

第二届全国大学生数学竞赛预赛试卷 (非数学类,2010)

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	25	15	15	15	15	15	100
得分							

- 注意：1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效。
2. 密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记。
3. 如答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号。

得 分	
评阅人	

一、(本题共 5 小题，各小题 5 分，共 25 分) 计算下列各题
(要求写出重要步骤)。

- (1) 设 $x_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$ ，其中 $|a| < 1$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。
- (2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ 。
- (3) 设 $s > 0$ ，求 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$ ($n = 1, 2, \cdots$)。
- (4) 设函数 $f(t)$ 有二阶导数， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$ ，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ 。
- (5) 求直线 $l_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离。

得 分	
评阅人	

二、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数，并且

$$f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0,$$

且存在一点 x_0 ，使得 $f(x_0) < 0$. 证明 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 恰有两实根.

得 分	
评阅人	

得 分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \Psi(t) \end{cases}$ ($t > -1$) 所确定, 且 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 其中 $\Psi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y = \Psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切, 求函数 $\Psi(t)$.

得 分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 设 $a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 证明:

- (1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛;
- (2) 当 $\alpha \leq 1$, 且 $S_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

线

氣

組

得 分	
评阅人	

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) 的直线, 均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ (其中 $0 < c < b < a$, 密度为 1) 绕 l 旋转.

- (1) 求其转动惯量；
- (2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值.

得 分	
评阅人	

六、(本题 15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分 $\oint_C \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, 证明

$$\oint_C \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} = 0;$$

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求

$$\oint_C \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2}.$$

第二届全国大学生数学竞赛决赛试卷

(非数学类,2011 年 3 月)

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	15	10	15	17	16	12	15	100
得分								

- 注意：1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得 分	
评阅人	

一、(本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分) 计算下列各题（要求写出重要步骤）.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}};$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right);$
- (3) 已知 $\begin{cases} x = \ln(1 + e^{2t}) \\ y = t - \arctan e^t, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}.$

得 分	
评阅人	

二、(本题 10 分) 求方程 $(2x + y - 4) dx + (x + y - 1) dy = 0$ 的通解.

得 分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0), f'(0), f''(0)$ 均不为零. 证明: 存在唯一一组实数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0.$$

评阅人

$c > 0, \sum_2: z^2 = x^2 + y^2, \Gamma$ 为 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 的交线. 求椭球面 $\sum_1$ 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

姓名_____身份证号_____所在院校_____年级_____专业_____

氣

第 3 頁 (共 6 頁)

得 分	
评阅人	

五、(本题 16 分) 已知 S 是空间曲线 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分 ($z \geq 0$) (取上侧), Π 是 S 在 $P(x, y, z)$ 点处的切平面, $\rho(x, y, z)$ 是原点到切平面 Π 的距离, λ, μ, ν 表示 S 的正法向的方向余弦. 计算 :

- (1) $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS;$
- (2) $\iint_S z (\lambda x + 3\mu y + \nu z) dS.$

得 分	
评阅人	

七、(本题 15 分) 是否存在区间 $[0, 2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$, 满足 $f(0) = f(2) = 1, |f'(x)| \leq 1, \left| \int_0^2 f(x) \, dx \right| \leq 1$? 请说明理由.

第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷

(非数学类,2011)

考试形式：闭卷

考试时间：150 分钟

满分：100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	24	16	15	15	15	15	100
得分							

- 注意：1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得 分	
评阅人	

一、(本大题共 4 小题，各小题 6 分，共 24 分) 计算下列各题（要求写出重要步骤）.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.
- (2) 设 $a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (3) 求 $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1) \, dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.
- (4) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

得 分	
评阅人	

二、(本题 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列, a, λ 为有限数, 求证:

- (1) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.
- (2) 如果存在正整数 p , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$.

姓名_____

身份证号_____

所在院校_____

年级_____

专业_____

密

封

线

得 分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有连续的三阶导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$. 求证: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 x_0 , 使得 $f'''(x_0) = 3$.

得 分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 在平面上，有一条从点 $(a, 0)$ 向右的射线，其线密度为 ρ ，在点 $(0, h)$ 处 (其中 $h > 0$) 有一质量为 m 的质点，求射线对该质点的引力.

姓名_____

身份证号_____

所在院校_____

年级_____

专业_____

密

封

线

得 分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程

$$F\left(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}\right) = 0$$

确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ 和 } x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x + y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/586152044002010133>