习 题 六

1.设有总体 X 的10个独立观察值

19.1，20.0，21.2，18.8，19.6，20.5，22.0，21.6，19.4，20.3

求样本均值 $\overline{X}$，样本方差 S^2 和样本二阶中心矩 S_n^2.

解：$\overline{X}$=20.25，

$$S^2=1.165,$$
$$S_n^2=1.0485$$

2.设 $X_1,X_2,$…，X_n 是来自于 $U(0,\theta)$ 的样本,求 $X_{(1)}与X_{(n)}$ 的分布函数和密度函数.

解：

$$F_{X(1)}(x)=1-(1-F(x))^n=\begin{cases}1-(1-\frac{x}{\theta})^n,0<x<\theta\\ 0,x\le 0\\ 1,x\ge\theta\end{cases}$$

$$f_{X(1)}(x)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^{n-1},0<x<\theta\\ 0,其它\end{cases}$$

$$F_{X(n)}(x)=F^n(x)=\begin{cases}(\frac{x}{\theta})^n,0<x<\theta\\ 0,x\le 0\\ 1,x\ge\theta\end{cases}$$

$$f_{X(n)}(x)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{n-1},0<x<\theta\\ 0,其它\end{cases}$$

3.从总体

$$N(12,4)$$

中抽取容量为 5 的样本

$$X_1,X_2,\dots,X_5$$

.求:

(1)样本均值大于 13 的概率;

(2)样本极小值小于 10 的概率;

(3)样本极大值大于 15 的概率.

解：（1）：

$$P(\overline{X}>13)=P(\frac{\overline{X}-12}{2}\sqrt{5}>\frac{13-12}{2}\sqrt{5})=1-\Phi(\sqrt{5}/2)\approx 0.1314$$

（2）：

$$P(X_{(1)}<10)=F_{X(1)}(10)=1-(1-\Phi(\frac{10-12}{2})^5\approx 0.5785$$

(3)：

$$P(X_{(n)}>15)=1-F_{X(n)}(15)=1-\Phi^5(1.5)\approx 0.2923$$

4.从总体

$$N\left(240,20^2\right)$$

中独立地进行两次抽样,容量分别为36和49,那么这两个样本均值之差的绝对值不超过10的概率是多少?

解：

$$\because \overline{X}\sim N(240,\frac{400}{36}),\overline{Y}\sim N(240,\frac{400}{49})\therefore \overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,400(\frac{1}{36}+\frac{1}{49}))$$

$$P(\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|\le 10)=2\Phi(\frac{21}{\sqrt{85}})-1=0.9774$$

5.设某电子元件的寿命(时数)服从参数为

$$\lambda=0.0015$$

的指数分布,即有密度

$$f\left(x\right)=0.0015e^{-0.0015x}\left(x>0\right)$$

.今测试6个元件,并记录下它们各自失效的时间(单位:小时).试问:

(1)至800小时时没有一个元件失效的概率是多少?

(2)至3000小时时所有元件都失效的概率是多少?

解：（1）

$$P(X_{(1)}\ge 800)=1-F_{X(1)}(800)=(\int_{800}^{\infty}0.0015e^{-0.0015x}dx)^6=e^{-7.2}$$

（2）

$$P(X_{(6)}\le 3000)=(1-\int_{-\infty}^{3000}0.0015e^{-0.0015x}dx)^6=(1-e^{-4.5})^6$$

6.设总体服从N(20,3), 问应取样本容量n为多大,才能以0.95的概率保证样本均值与总体均值之差的绝对值不超过0.3?

解：设样本容量为 n, 则

$$\overline{X} \sim N(20, \frac{3}{n}),$$

$$P(\left|\overline{X}-20\right| \le 0.3) = 2\Phi(\frac{0.3\sqrt{n}}{\sqrt{3}})-1$$

$$2\Phi(\frac{0.3\sqrt{n}}{\sqrt{3}})-1 \ge 0.95 \Rightarrow \Phi(\frac{0.3\sqrt{n}}{\sqrt{3}}) \ge 0.975 \Rightarrow \frac{0.3\sqrt{n}}{\sqrt{3}} \ge 1.96$$

$$n \ge 1.96^2 * 3/0.09 = 128.053 \Rightarrow n = 129$$

7. 设

$$X_{1,} X_{2,} \cdots, X_{10}$$

为

$$N(0, 0.3^2)$$

的样本, 求 C 使

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \le C\right\} = 0.95$$

.

解：

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \le C\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{0.3^2} \le \frac{C}{0.09}\right\} = 0.95$$

$$\Rightarrow \chi_{0.95}^2(10) = 18.307 = \frac{C}{0.09} \Rightarrow C = 1.64763$$

8. 已知

$$T \sim t(n), \text{则} T^2 \sim F(1, n)$$

.

证：

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

,

$$T^2=\frac{X^2}{Y/n}$$

，其中，

$$X^2\sim\chi^2(1),Y\sim\chi^2(n),\text{且}X^2\text{与}Y\text{独立}$$

$$\text{故}T^2\sim F(1,n)$$

9.设

$$X_1,X_2,\cdots,X_n$$

是来自正态总体

$$N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

的样本，

$$X\text{与}S^2$$

分别为样本均值和样本方差;又设

$$X_{n+1}$$

与

$$X_1,X_2,\cdots,X_n$$

独立同分布,试求统计量

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\ \text{和}\ \frac{n}{n+1}\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{S^2}$$

的分布.

解：

$$\because\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}),X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2),\text{且}\overline{X}\text{与}X_{n+1}\text{独立}$$

$$\therefore X_{n+1}-\overline{X}\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)\Rightarrow\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$$\text{又}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\text{且与}\overline{X}\text{独立}$$

，故有

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$$

$$\frac{n}{n+1}\frac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$$

10. 设

$$X_1, X_2$$

是来自

$$N\left(0,\sigma^2\right)$$

的样本.

(1) 求

$$\frac{\left(X_1-X_2\right)^2}{\left(X_1+X_2\right)^2}$$

的分布;

(2) 求常数

$$k$$

, 使

$$P\left\{\frac{\left(X_1+X_2\right)^2}{\left(X_1+X_2\right)^2+\left(X_1-X_2\right)^2}>k\right\}=0.10$$

解:

$$\because X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2), X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)$$

$$又E(X_1-X_2)(X_1+X_2)=0\Rightarrow X_1-X_2与X_1+X_2独立$$

$$\therefore\frac{(X_1-X_2)^2}{(X_1+X_2)}\sim F(1,1)$$

$$原式等价于P\left\{\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)}>\frac{k}{1-k}\right\}=0.1,即\frac{k}{1-k}=39.9$$

故

$$k=0.97555$$

11. 设

$$X_1, X_2, \cdots, X_5$$

是来自总体

$$N\left(0, \sigma^2\right)$$

的样本. 求常数 C,使统计量

$$\frac{C\left(X_1 + X_2\right)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$$

服从 t- 分布.

解：

$$\because X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2), \frac{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3),$$

且它们相互独立，

故

$$\pm \frac{(X_1 + X_2)\sigma\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}} \sim t(3) \Rightarrow C = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

12. 设

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$

是来自指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(

$$\lambda$$

>0)

的样本, 证明

$$2n\lambda \overline{X} \sim \chi^2\left(2n\right)$$

.

证：令

$$Y_i = 2\lambda X_i$$

,则

$$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$$

相互独立，且

$$Y_i \sim \chi^2(2)$$

,由开方分布的可加性

可知

$$Y_1 + Y_2 + \cdots\cdots + Y_n = 2\lambda n\overline{X} \sim \chi^2(2n)$$

13.设从正态总体

$$N(\mu, \sigma^2)$$

中抽取一容量为 16 的样本，这里

$$\mu, \sigma^2$$

未知.

$$S^2$$

为样本方差.求:

(1)

$$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.0385\right\};$$

(2)

$$D(S^2).$$

解：（1）

$$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.0385\right\} = P\left\{\frac{15S^2}{\sigma^2} \le 30.5775\right\} = P\left\{\chi^2(15) \le 30.5775\right\} = 0.99$$

(2)

$$\because \frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$$

$$\therefore D\left\{\frac{15S^2}{\sigma^2}\right\} = 30,$$

故有

$$D(S^2)=\frac{2}{15}\sigma^4$$

14.设总体

$$X\sim b(1,p),X_1,X_2,\cdots,X_n$$

是来自

$$X$$

的样本.

(1)求

$$\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

的分布律；(2)求

$$E(\overline{X}),D(\overline{X}),ES^2.$$

解：（1）：

$$\because X_i^2=X_i\therefore\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$$

$$E(\overline{X})=p,D(\overline{X})=\frac{p(1-p)}{n}$$

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)=p(1-p)$$

15．设

$$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

是来自总体

$$X$$

的样本.记

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$

现添加一次试验,得样本

$$(X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1})$$

再记

$$\overline{X}_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}X_i\,,\quad S_{n+1}^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(X_i-\overline{X}_{n+1})^2$$

则有下列递推公式:

$$\overline{X}_{n+1}=\overline{X}_n+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n),$$

$$S_{n+1}^2=\frac{n}{n+1}[S_n^2+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2].$$

证:

$$X_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}X_i=\frac{1}{n+1}(n\overline{X}_n+X_{n+1})=\overline{X}_n+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)$$

$$\begin{aligned}S_{n+1}^2&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(X_i-\overline{X}_{n+1})^2\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(X_i-\overline{X}_n)^2-\frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n+1}(X_i-\overline{X}_n)(X_{n+1}-\overline{X}_n)+\frac{1}{(n+1)^2}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2\\&=\frac{1}{n+1}(nS_n^2+(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2)-\frac{2}{(n+1)^2}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2+\frac{1}{(n+1)^2}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2\\&=\frac{n}{n+1}(S_n^2+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2)\end{aligned}$$

16.设总体

X

的容量为 50 的样本频数分布为

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

解:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<1\\ \frac{1}{5}, 1\le x<4\\ \frac{1}{2}, 4\le x<6\\ 1, x>6\end{cases}$$

求

X

的经验分布函数.

17.设总体

X

的容量为100的样本观察值如下:

15	20	15	20	25	25	30	15	30	25
15	30	25	35	30	35	20	35	30	25
20	30	20	25	35	30	25	20	30	25
35	25	15	25	35	25	25	30	35	25
35	20	30	30	15	30	40	30	40	15
25	40	20	25	20	15	20	25	25	40
25	25	40	35	25	30	20	35	20	15
35	25	25	30	25	30	25	30	43	25
43	22	20	23	20	25	15	25	20	25
30	43	35	45	30	45	30	45	45	35

作总体

X

的直方图.

解: 略.

使用一测量仪器对同一值进行了 12 次独立测量,其结果为(单位:mm)

232.50	232.48	232.15	232.52	232.53	232.30
232.48	232.05	232.45	232.60	232.47	232.30

用矩估计法估计测量的真值和方差(设仪器无系统误差).

解　设 μ 为待测量的真值,则测量值 X_i 与 μ 有以下关系式

$$X_i = \mu + \varepsilon_i,\ \ E\varepsilon_i = 0,\ D(\varepsilon_i) = \sigma^2,\ i = 1, 2, \cdots, 12$$

故 μ 和 σ^2 的矩估计值为

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 232.4025,\ \ \hat{\sigma}^2 = S_n^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(X_i - \bar{X})^2 = 0.02555$$

2. 设总体 X 服从正态 $N(\mu, 1)$,今观察了 20 次 ,只记录是否为负值,若事件 $\{X \le 0\}$ 出现了 14 次,试按频率估计概率的原理,求 μ 的估计值.

令

$$\frac{14}{20}=P\left\{X\le 0\right\}=P\left\{X-\mu\le-\mu\right\}=\Phi(-\mu)$$

查正态分布表得

$$\mu=-0.525$$

.

3.设总体

$$X$$

具有密度函数

$$f(x:\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$X_1,X_2,\cdots,X_n$$

是其样本,求

$$\theta$$

的矩估计.

解

$$EX=\int_0^\theta x\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)dx=2\theta\int_0^1 t(1-t)dt=\frac{\theta}{3}$$

，由矩法令

$$\overline{X}=\frac{\theta}{3}$$

，解得

$$\hat{\theta}=3\overline{X}$$

.

4.设

$$X\sim b(N,p),0<p<1,X_1,X_2,\cdots,X_n$$

为其样本.求

$$N$$

和

$$p$$

.

解　因

$$EX = Np, D(X) = Np(1-p)$$

，由例 7-1，令

$$\overline{X} = Np, S_n^2 = Np(1-p)$$

解得

$$\hat{p} = 1 - \frac{S_n^2}{\overline{X}}, \quad \hat{N} = \frac{\overline{X}}{\hat{p}}$$

.

5.设总体

$$X$$

的密度函数(或分布律)为

$$f(x;\theta), X_1, X_2, \cdots, X_n$$

为其样本,求下列情况下

$$\theta$$

的极大似然估计.

$$(1) \quad f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}, & x = 0,1,2\cdots \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(\theta > 0)$$

$$(2) \quad f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(\theta > 0)$$

$$(3) \quad f(x;\theta) = \begin{cases} \theta \alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x^{\alpha}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(\alpha \text{已知})$$

$$(4) \quad f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\theta x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$(r$已知$)$

$$(5)\quad f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$(\theta>0)$

解

(1)

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{X_i}}{X_i!}e^{-\theta}=\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n}X_i}}{\prod_{i=1}^{n}X_i!}e^{-n\theta}=\frac{\theta^{n\overline{X}}}{\prod_{i=1}^{n}X_i!}e^{-n\theta}$$

似然方程为

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n\overline{X}}{\theta}-n=0$$

解得

$$\hat{\theta}=\overline{X}$$

.

(2)

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta X_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\theta-1}$$

似然方程为

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$$

解得