2024 届辽宁省两校联考高三 5 月领军考试数学试题

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0．5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用 05 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

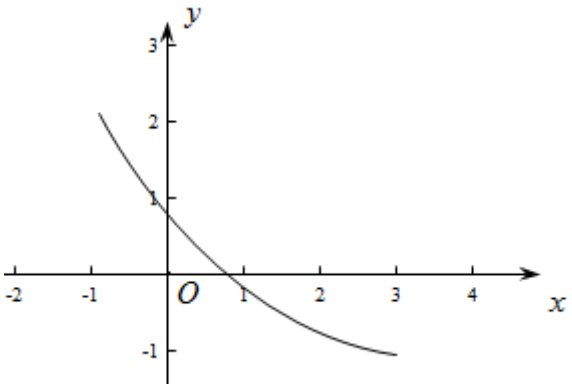
1．函数 $f(x)=\cos(2x+\frac{2\pi}{3})$ 的对称轴不可能为（　　）

A．$x=-\frac{5\pi}{6}$　　B．$x=-\frac{\pi}{3}$　　C．$x=\frac{\pi}{6}$　　D．$x=\frac{\pi}{3}$

2．已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且满足 $f(x)=f(2-x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x$，则函数 $F(x)=f(x)+\frac{x+4}{1-2x}$ 在区间 $[-9,10]$ 上零点的个数为（　　）

A．9　　B．10　　C．18　　D．20

3．已知函数 $y=\log_a(x+c)$（a，c 是常数，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$）的大致图象如图所示，下列关于 a，c 的表述正确的是（　　）



A．$a>1$，$c>1$　　B．$a>1$，$0<c<1$

C．$0<a<1$，$c>1$　　D．$0<a<1$，$0<c<1$

4．已知 $a=5^{\frac{1}{5}},b=\log_4\sqrt{5},c=\log_5 2$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$b>a>c$　　D．$c>b>a$

5．数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，例如：四叶草曲线就是其中一种，其方程为 $\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2$．给出下列四个结论：

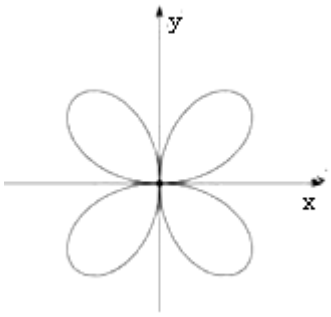
①曲线 C 有四条对称轴；

②曲线C上的点到原点的最大距离为$\frac{1}{4}$；

③曲线C第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为$\frac{1}{8}$；

④四叶草面积小于$\frac{\pi}{4}$.

其中，所有正确结论的序号是（　）



A．①②　　B．①③　　C．①③④　　D．①②④

6．已知随机变量X服从正态分布$N(1,4)$，$P(X>2)=0.3$，$P(X<0)=$（　　）

A．0.2　　B．0.3　　C．0.7　　D．0.8

7．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线与抛物线$y^2=2px,(p>0)$的准线分别交于点$A$、$B$，O为坐标原点．若双曲线的离心率为2，三角形AOB的面积为$\sqrt{3}$，则p=（ ）.

A．1　　B．$\frac{3}{2}$　　C．2　　D．3

8．已知定点A,B都在平面α内，定点$P\notin\alpha,PB\perp\alpha,C$是$\alpha$内异于$A,B$的动点，且$PC\perp AC$，那么动点$C$在平面$\alpha$内的轨迹是（　　）

A．圆，但要去掉两个点　　B．椭圆，但要去掉两个点

C．双曲线，但要去掉两个点　　D．抛物线，但要去掉两个点

9．抛物线$y^2=2x$的焦点为F，则经过点F与点$M(2,2)$且与抛物线的准线相切的圆的个数有（　　）

A．1个　　B．2个　　C．0个　　D．无数个

10．若$(1+ax)(1+x)^5$的展开式中x^2,x^3的系数之和为-10，则实数a的值为（　　）

A．-3　　B．-2　　C．-1　　D．1

11．已知*l*，*m*是两条不同的直线，*m*⊥平面α，则“$l//\alpha$”是“*l*⊥*m*”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

12．若$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中二项式系数和为256，则二项式展开式中有理项系数之和为（　　）

A．85　　B．84　　C．57　　D．56

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．如果函数$f\left(x\right)=\left(m-2\right)x^2+2\left(n-8\right)x+1$（$m,n\in R$且$m\geq 2,n\geq 0$）在区间$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递减,那么$mn$的最大值为_____.

14．$\left(x^2-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^6$的展开式中的常数项为_____.

15．3张奖券分别标有特等奖、一等奖和二等奖．甲、乙两人同时各抽取1张奖券,两人都未抽得特等奖的概率是_____.

16．（5分）某膳食营养科研机构为研究牛蛙体内的维生素E和锌、硒等微量元素（这些元素可以延缓衰老，还能起到抗癌的效果）对人体的作用，现从4只雌蛙和2只雄蛙中任选2只牛蛙进行抽样试验，则选出的2只牛蛙中至少有1只雄蛙的概率是_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）某单位准备购买三台设备，型号分别为A,B,C已知这三台设备均使用同一种易耗品，提供设备的商家规定：可以在购买设备的同时购买该易耗品，每件易耗品的价格为100元，也可以在设备使用过程中，随时单独购买易耗品，每件易耗品的价格为200元.为了决策在购买设备时应购买的易耗品的件数.该单位调查了这三种型号的设备各60台，调查每台设备在一个月中使用的易耗品的件数，并得到统计表如下所示.

每台设备一个月中使用的易耗品的件数		6	7	8
频数	型号*A*	30	30	0
	型号*B*	20	30	10
	型号*C*	0	45	15

将调查的每种型号的设备的频率视为概率，各台设备在易耗品的使用上相互独立.

（1）求该单位一个月中A,B,C三台设备使用的易耗品总数超过21件的概率；

（2）以该单位一个月购买易耗品所需总费用的期望值为决策依据，该单位在购买设备时应同时购买20件还是21件易耗品？

18．（12分）已知函数$f\left(x\right)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+bx$，函数$f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线斜率为0.

（1）试用含有 a 的式子表示 b，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）对于函数 $f(x)$ 图象上的不同两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，如果在函数 $f(x)$ 图象上存在点 $M(x_0,y_0)(x_0\in(x_1,x_2))$，使得在点 M 处的切线 $l//AB$，则称 AB 存在“跟随切线”.特别地，当 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 时，又称 AB 存在“中值跟随切线”.试问：函数 $f(x)$ 上是否存在两点 A,B 使得它存在“中值跟随切线”，若存在，求出 A,B 的坐标，若不存在，说明理由.

19.（12 分）设函数 $f(x)=ax(2+\cos x)-\sin x$，$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数.

（1）若 $a=1$，证明 $f'(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上没有零点；

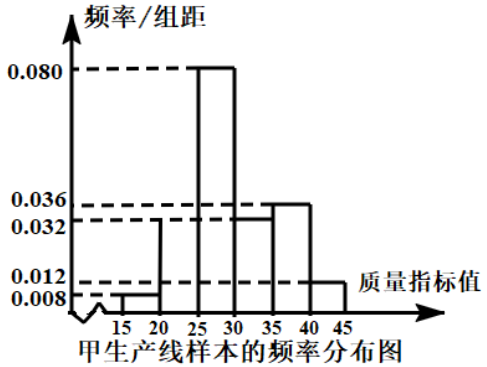
（2）在 $x\in(0,+\infty)$ 上 $f(x)>0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

20.（12 分）已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且短轴的一个端点 B 与两焦点 A，C 组成的三角形面积为 $\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）若点 P 为椭圆 E 上的一点，过点 P 作椭圆 E 的切线交圆 O：$x^2+y^2=a^2$ 于不同的两点 M，N（其中 M 在 N 的右侧），求四边形 $ACMN$ 面积的最大值.

21.（12 分）某企业原有甲、乙两条生产线，为了分析两条生产线的效果，先从两条生产线生产的大量产品中各抽取了 100 件产品作为样本，检测一项质量指标值．该项指标值落在 $[20,40)$ 内的产品视为合格品，否则为不合格品.



甲生产线样本的频率分布图

乙生产线样本的频数分布表

质量指标	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$	$[40,45]$	合计
频数	2	18	48	14	16	2	100

（1）根据甲生产线样本的频率分布直方图，以从样本中任意抽取一件产品且为合格品的频率近似代替从甲生产线生产的产品中任意抽取一件产品且为合格品的概率，估计从甲生产线生产的产品中任取 5 件恰有 2 件为合格品的概率；

（2）现在该企业为提高合格率欲只保留其中一条生产线，根据上述图表所提供的数据，完成下面的 2×2 列联表，并判断是否有 90%把握认为该企业生产的这种产品的质量指标值与生产线有关？若有 90%把握，请从合格率的角度分析保留哪条生产线较好？

	甲生产线	乙生产线	合计
合格品			
不合格品			
合计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

22.（10 分）设$\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c.设 S 为$\triangle ABC$ 的面积，满足

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+c^2-b^2\right).$$

(1)求 B；

(2)若 $b=\sqrt{3}$，求 $\left(\sqrt{3}-1\right)a+2c$ 的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由条件利用余弦函数的图象的对称性，得出结论.

【详解】

对于函数 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，令 $2x+\frac{2\pi}{3}=k\pi,k\in Z$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3},k\in Z$，

当 $k=-1,0,1$ 时，函数的对称轴为 $x=-\frac{5\pi}{6}$，$x=-\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{\pi}{6}$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查余弦函数的图象的对称性，属于基础题.

2、B

【解析】

由已知可得函数 f（x）的周期与对称轴，函数 F（x）$=f$（x）$+\frac{x+4}{1-2x}$ 在区间 $[-9,10]$ 上零点的个数等价于函数 f（x）与 g（x）$=-\frac{x+4}{1-2x}$ 图象在 $[-9,10]$ 上交点的个数，作出函数 f（x）与 g（x）的图象如图，数形结合即可得到答案.

【详解】

函数 F（x）$=f$（x）$+\frac{x+4}{1-2x}$ 在区间 $[-9,10]$ 上零点的个数等价于函数 f（x）与 g（x）$=-\frac{x+4}{1-2x}$ 图象在 $[-9,10]$ 上交点的个数，

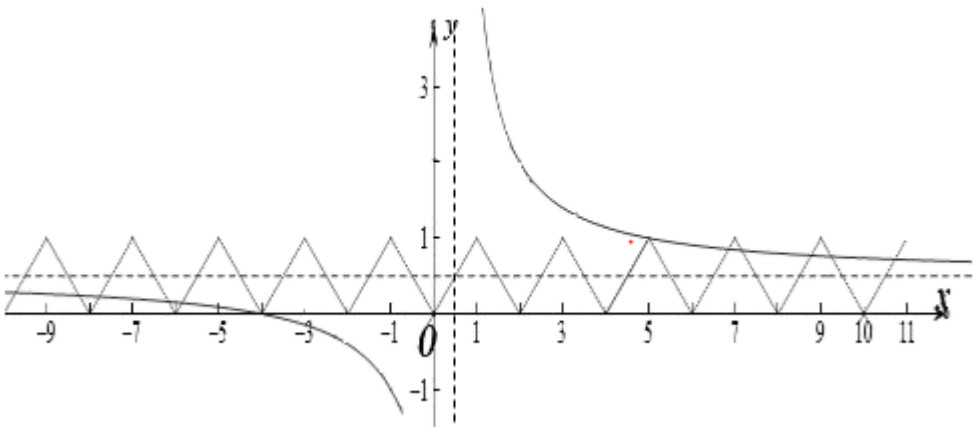
由 f（x）$=f$（$2-x$），得函数 f（x）图象关于 $x=1$ 对称，

∵f（x）为偶函数，取 $x=x+2$，可得 f（$x+2$）$=f$（$-x$）$=f$（x），得函数周期为 2.

又∵当 $x\in[0,1]$ 时，f（x）$=x$，且 f（x）为偶函数，∴当 $x\in[-1,0]$ 时，f（x）$=-x$，

g（x）$=-\frac{x+4}{1-2x}=\frac{x+4}{2x-1}=\frac{1}{2}+\frac{9}{4x-2}$，

作出函数 f（x）与 g（x）的图象如图：



由图可知，两函数图象共 10 个交点，

即函数 $F(x)=f(x)+\frac{x+4}{1-2x}$ 在区间 $[-9,10]$ 上零点的个数为 10.

故选：B.

【点睛】

本题考查函数的零点与方程根的关系，考查数学转化思想方法与数形结合的解题思想方法，属于中档题.

3、D

【解析】

根据指数函数的图象和特征以及图象的平移可得正确的选项.

【详解】

从题设中提供的图像可以看出 $0<a<1,\log_a c>0,\log_a(1+c)>0$，

故得 $0<c<1,0<a<1$，

故选：D.

【点睛】

本题考查图象的平移以及指数函数的图象和特征，本题属于基础题.

4、A

【解析】

根据指数函数的单调性，可得 $a=5^{\frac{1}{5}}>1$，再利用对数函数的单调性，将 b,c 与 $1,\frac{1}{2}$ 对比，即可求出结论.

【详解】

由题知 $a=5^{\frac{1}{5}}>5^0=1,1>b=\log_4\sqrt{5}>\log_4 2=\frac{1}{2}$，

$c=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，则 $a>b>c$.

故选:A.

【点睛】

本题考查利用函数性质比较大小，注意与特殊数的对比，属于基础题..

5、C

【解析】

①利用 x,y 之间的代换判断出对称轴的条数；②利用基本不等式求解出到原点的距离最大值；③将面积转化为 x,y 的关系式，然后根据基本不等式求解出最大值；④根据 x,y 满足的不等式判断出四叶草与对应圆的关系，从而判断出面积是否小于 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】

①：当x变为$-x$时，$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2$不变，所以四叶草图象关于$y$轴对称；

当y变为$-y$时，$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2$不变，所以四叶草图象关于$x$轴对称；

当y变为x时，$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2$不变，所以四叶草图象关于$y=x$轴对称；

当y变为$-x$时，$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2$不变，所以四叶草图象关于$y=-x$轴对称；

综上可知：有四条对称轴，故正确；

②：因为$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2$，所以$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2\le\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2$，

所以$x^2+y^2\le\frac{1}{4}$，所以$\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$，取等号时$x^2=y^2=\frac{1}{8}$，

所以最大距离为$\frac{1}{2}$，故错误；

③：设任意一点$P\left(x,y\right)$，所以围成的矩形面积为xy，

因为$\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2$，所以$x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^3\ge\left(2xy\right)^3$，所以$xy\le\frac{1}{8}$，

取等号时$x=y=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以围成矩形面积的最大值为$\frac{1}{8}$，故正确；

④：由②可知$x^2+y^2\le\frac{1}{4}$，所以四叶草包含在圆$x^2+y^2=\frac{1}{4}$的内部，

因为圆的面积为：$S=\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$，所以四叶草的面积小于$\frac{\pi}{4}$，故正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查曲线与方程的综合运用，其中涉及到曲线的对称性分析以及基本不等式的运用，难度较难.分析方程所表示曲线的对称性，可通过替换方程中x,y去分析证明.

6、B

【解析】

利用正态分布密度曲线的对称性可得出$P\left(X<0\right)=P\left(X>2\right)$，进而可得出结果.

【详解】

Q$X:\ N\left(1,4\right)$，所以，$P\left(X<0\right)=P\left(X>2\right)=0.3$.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用正态分布密度曲线的对称性求概率，属于基础题.

7、C

【解析】

试题分析：抛物线 $y^2=2px,(p>0)$ 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$，双曲线的离心率为 2，则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}=4$，

$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，求出交点 $A(-\frac{p}{2},\frac{\sqrt{3}p}{2})$，$B(-\frac{p}{2},-\frac{\sqrt{3}p}{2})$，$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}p\times$

$\frac{p}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}p^2=\sqrt{3}$，则 $p=2$；选 C

考点：1.双曲线的渐近线和离心率；2.抛物线的准线方程；

8、A

【解析】

根据题意可得 $AC\perp BC$,即知 ***C*** 在以 ***AB*** 为直径的圆上.

【详解】

Q $PB\perp\alpha, AC\subset\alpha$，

$\therefore PB\perp AC$,

又 $PC\perp AC$， $PB\cap PC=P$,

$\therefore AC\perp$ 平面 PBC ,又 $BC\subset$ 平面 PBC

$\therefore AC\perp BC$，

故 C 在以 AB 为直径的圆上，

又 C 是 α 内异于 A,B 的动点，

所以 C 的轨迹是圆，但要去掉两个点 ***A,B***

故选：***A***

【点睛】

本题主要考查了线面垂直、线线垂直的判定，圆的性质，轨迹问题，属于中档题.

9、B

【解析】

圆心在 FM 的中垂线上，经过点 F， M 且与 l 相切的圆的圆心到准线的距离与到焦点 F 的距离相等，圆心在抛物线上，直线与抛物线交于 2 个点，得到 2 个圆.

【详解】

因为点$M(2,2)$在抛物线$y^2=2x$上，

又焦点$F(\frac{1}{2},\ 0)$，

由抛物线的定义知，过点F、M且与l相切的圆的圆心即为线段FM的垂直平分线与抛物线的交点，

这样的交点共有2个，

故过点F、M且与l相切的圆的不同情况种数是2种.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查抛物线的简单性质，本题解题的关键是求出圆心的位置，看出圆心必须在抛物线上，且在垂直平分线上.

10、B

【解析】

由$(1+ax)(1+x)^5=(1+x)^5+ax(1+x)^5$，进而分别求出展开式中$x^2$的系数及展开式中$x^3$的系数，令二者之和等于$-10$，可求出实数$a$的值.

【详解】

由$(1+ax)(1+x)^5=(1+x)^5+ax(1+x)^5$，

则展开式中x^2的系数为$C_5^2+aC_5^1=10+5a$，展开式中x^3的系数为$C_5^3+aC_5^2=10+10a$，

二者的系数之和为$(10+5a)+(10a+10)=15a+20=-10$，得$a=-2$.

故选：B.

【点睛】

本题考查二项式定理的应用，考查学生的计算求解能力，属于基础题.

11、A

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义，结合线面垂直的性质进行判断即可.

【详解】

当$m\perp$平面α时，若$l\parallel\alpha$”则“$l\perp m$”成立，即充分性成立，

若$l\perp m$，则$l\parallel\alpha$或$l\subset\alpha$，即必要性不成立，

则“$l\parallel\alpha$”是“$l\perp m$”充分不必要条件，

故选：A.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/586235145224010210