

第四章 三角函数、解三角形

第一节 任意角和弧度制、任意角的三角函数
第二节 同角三角函数的基本关系与诱导公式
第三节 三角函数的图象与性质
第四节 函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 的图象及三角函数模型的简单应用
第五节 三角恒等变换
第六节 正弦定理和余弦定理

第一节 任意角和弧度制、任意角的三角函数

本节主要包括 3 个知识点：

1. 角的概念；
2. 弧度制及其应用；
3. 任意角的三角函数.

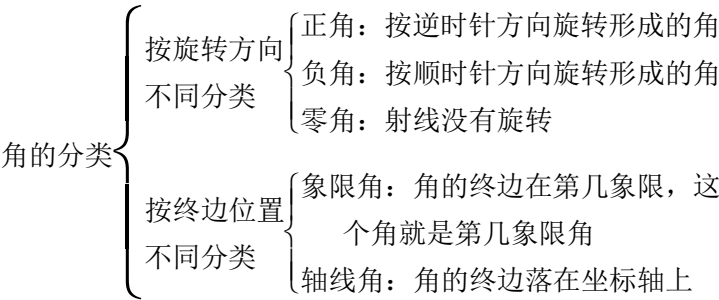
突破点(一) 角的概念

[基本知识]

1. 角的定义

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

2. 角的分类



3. 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合： $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
或 $\{\beta | \beta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

[基本能力]

1. 判断题

- (1) 第二象限角大于第一象限角. ()
- (2) 三角形的内角是第一象限角或第二象限角. ()
- (3) 终边在 $y=x$ 上的角构成的集合可表示为 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. ()

2. 填空题

- (1) 719° 是第_____象限角, -719° 是第_____象限角.
- (2) 所有与 60° 终边相同的角构成的集合为_____.

[全析考法]

角的有关概念

- (1) 要使角 β 与角 α 的终边相同, 应使角 β 为角 α 与 π 的偶数倍(不是整数倍)的和.
- (2) 注意锐角(集合为 $\{\alpha \mid 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$)与第一象限角(集合为 $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$)的区别, 锐角是第一象限角, 仅是第一象限角中的一部分, 但第一象限角不一定是锐角.

[例] (1) 给出下列四个命题:

① $-\frac{3\pi}{4}$ 是第二象限角;

② $\frac{4\pi}{3}$ 是第三象限角;

③ -400° 是第四象限角;

④ -315° 是第一象限角.

其中正确的命题有()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

(2) 若 α 是第二象限角, 则 $\frac{\alpha}{3}$ 一定不是()

A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

(3) 在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 范围内所有与 45° 终边相同的角为_____.

[方法技巧]

确定 $\frac{\alpha}{n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$) 终边位置的方法步骤

讨论法	(1) 用终边相同角的形式表示出角 α 的范围; (2) 写出 $\frac{\alpha}{n}$ 的范围;
-----	--

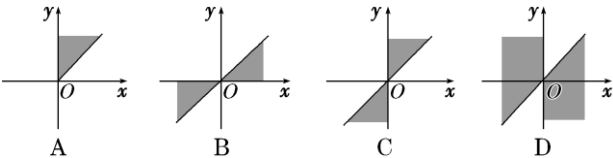
	(3) 根据 k 的可能取值讨论确定 $\frac{\alpha}{n}$ 的终边所在位置
等分象限角法	已知角 α 是第 m ($m=1, 2, 3, 4$) 象限角, 求 $\frac{\alpha}{n}$ 是第几象限角. (1) 等分: 将每个象限分成 n 等份; (2) 标注: 从 x 轴正半轴开始, 按照逆时针方向顺次循环标上 1, 2, 3, 4, 直至回到 x 轴正半轴; (3) 选答: 出现数字 m 的区域, 即为 $\frac{\alpha}{n}$ 的终边所在的象限

[全练题点]

1. 若 $\alpha=k \cdot 360^{\circ}+\theta, \beta=m \cdot 360^{\circ}-\theta(k, m \in \mathbf{Z})$, 则角 α 与 β 的终边的位置关系是()

A. 重合 B. 关于原点对称 C. 关于 x 轴对称 D. 关于 y 轴对称

2. 集合 $\left\{\alpha \left| k \pi+\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq k \pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right.\right\}$ 中的角所表示的范围(阴影部分)是()



3. 若角 α 是第二象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是()

A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第一或第三象限角 D. 第二或第四象限角

4. 终边在直线 $y=\sqrt{3} x$ 上的角的集合为_____.

突破点(二) 弧度制及其应用

[基本知识]

- 弧度制的定义

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角, 弧度记作 rad .
- 弧度制下的有关公式

角 α 的弧度数公式	$ \alpha =\frac{l}{r}$ (弧长用 l 表示)
角度与弧度的换算	① $1^{\circ}=\frac{\pi}{180} rad$; ② $1 rad=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$
弧长公式	弧长 $l= \alpha r$

扇形面积公式

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$$

[基本能力]

1. 判断题

- (1) 不论是用角度制还是用弧度制度量一个角，它们与扇形半径的大小无关. ()
- (2) 1 弧度是长度等于半径长的弦所对的圆心角的大小. ()
- (3) $60^\circ = \frac{\pi}{6}rad$. ()

2. 填空题

- (1) 圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 弧度，半径为 2 的扇形的弧长为_____.
- (2) 扇形半径为 $20cm$ ，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ ，则该扇形的面积为_____ cm^2 .

[全析考法]

扇形的弧长及面积公式

[例] (1) 已知扇形的周长是 6，面积是 2，则扇形的圆心角的弧度数是()

- A. 1 B. 4 C. 1 或 4 D. 2 或 4

(2) 若扇形的圆心角是 $\alpha = 120^\circ$ ，弦长 $AB = 12\text{ cm}$ ，则弧长 $l =$ _____ cm .

[方法技巧]

弧度制下有关弧长、扇形面积问题的解题策略

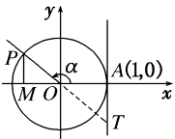
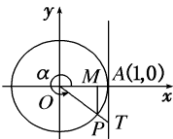
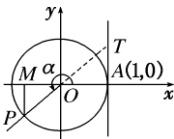
- (1) 明确弧度制下弧长及扇形面积公式，在使用公式时，要注意角的单位必须是弧度.
- (2) 分析题目已知哪些量、要求哪些量，然后灵活地运用弧长公式、扇形面积公式直接求解，或合理地利用圆心角所在三角形列方程(组)求解.

[全练题点]

1. 若一扇形的圆心角为 72° ，半径为 20 cm ，则扇形的面积为()
- A. $40\pi cm^2$ B. $80\pi cm^2$ C. $40cm^2$ D. $80cm^2$
2. 如果一个圆的半径变为原来的一半，而弧长变为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍，则该弧所对的圆心角是原来的_____倍.
3. 弧长为 3π ，圆心角为 135° 的扇形半径为_____，面积为_____.
4. 已知扇形周长为 40，当它的半径和圆心角分别取何值时，扇形的面积最大？

突破点(三) 任意角的三角函数

[基本知识]

三角函数		正弦	余弦	正切
定义		设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ ，那么		
		y 叫做 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$	x 叫做 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$	$\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切，记作 $\tan\alpha$
各象限符号	I	+	+	+
	II	+	-	-
	III	-	-	+
	IV	-	+	-
三角函数线		 有向线段 MP 为正弦线	 有向线段 OM 为余弦线	 有向线段 AT 为正切线

[基本能力]

1. 判断题

- (1) 若角 θ 的终边在直线 $y=2x$ 上，则 $\tan\alpha=2$. ()
- (2) 若 $\sin\theta\cos\theta>0$ ，则 θ 在第一象限内. ()
- (3) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ，则 $\sin\alpha<\tan\alpha$. ()

2. 填空题

- (1) 已知角 α 的始边是 x 轴非负半轴，终边过点 $P(1, \sqrt{3})$ ，则 $\sin\alpha=$ _____， $\tan\alpha=$ _____.
- (2) 若角 α 终边上有一点 $P(x, 5)$ ，且 $\cos\alpha=\frac{x}{13}(x\neq0)$ ，则 $\sin\alpha=$ _____.
- (3) 比较大小(填 “>”、“<” 或 “=”)

① $\sin\frac{\pi}{4}$ _____ $\cos\frac{\pi}{4}$;

② $\sin\frac{\pi}{5}$ _____ $\cos\frac{\pi}{5}$;

③ $\sin \frac{2\pi}{3}$ _____ $\tan \frac{2\pi}{3}$.

[全析考法]

三角函数值的符号

[例 1] (1) 若 $\sin \alpha \tan \alpha < 0$, 且 $\frac{\cos \alpha}{\tan \alpha} < 0$, 则角 α 是()

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

(2) $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \tan 4$ 的值()

- A. 小于 0 B. 大于 0 C. 等于 0 D. 不确定

三角函数定义的应用

[例 2] (1) 点 P 从 $(-1, 0)$ 出发, 沿单位圆顺时针方向运动 $\frac{8\pi}{3}$ 弧长到达点 Q , 求点 Q 的坐标.

(2) 已知角 α 的终边上一点 $P(-\sqrt{3}, m)$ ($m \neq 0$), 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}m}{4}$, 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 的值.

[方法技巧]

利用定义求三角函数值问题的常见类型及解法

(1) 已知角 α 终边上一点 P 的坐标, 根据三角函数的定义求出相应的值即可.

(2) 若已知角 α 的终边所在直线的方程求三角函数值, 可以先设出终边上一点的坐标, 再根据定义求相应的值.

(3) 若角 α 终边上的点的坐标中含参数, 要讨论参数的各种情况, 以确定角 α 终边所在的象限, 进一步正确得出各个三角函数值. 此时注意不要漏解或多解.

[提醒] 认清角的终边所在的象限, 以确定三角函数值的符号, 防止出现错误.

[全练题点]

1. 已知 $\sin \theta - \cos \theta > 1$, 则角 θ 的终边在()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知角 α 终边上一点 P 的坐标是 $(2\sin 2, -2\cos 2)$, 则 $\sin \alpha =$ ()

- A. $\sin 2$ B. $-\sin 2$ C. $\cos 2$ D. $-\cos 2$

3. 在平面直角坐标系中, 点 $M(3, m)$ 在角 α 的终边上, 点 $N(2m, 4)$ 在角 $\alpha + \frac{\pi}{4}$ 的终边上, 则 $m =$ ()

- A. -6 或 1 B. -1 或 6 C. 6 D. 1

4. 已知角 θ 的终边经过点 $P(x, 3)$ ($x < 0$) 且 $\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}x$, 则 $x =$ ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{3}$ C. -3 D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

对点练(一) 角的概念

1. 设角 α 是第三象限角, 且 $\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = -\sin \frac{\alpha}{2}$, 则角 $\frac{\alpha}{2}$ 是第_____象限角.
2. 与 2019° 的终边相同, 且在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内的角是_____.
3. 已知 α 是第二象限的角, 则 $180^\circ - \alpha$ 是第_____象限的角.

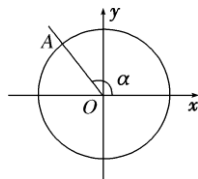
对点练(二) 弧度制及其应用

1. 将表的分针拨慢 10 分钟, 则分针转过的角的弧度数是_____.
2. 若一圆弧长等于其所在圆的内接正三角形的边长, 则其圆心角 α ($0 < \alpha < \pi$) 的弧度数为_____.
3. 一扇形是从一个圆中剪下的一部分, 半径等于圆半径的 $\frac{2}{3}$, 面积等于圆面积的 $\frac{5}{27}$, 则扇形的弧长与圆周长之比为_____.

对点练(三) 任意角的三角函数

1. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 的终边与单位圆交于点 A , 点 A 的纵坐标为 $\frac{4}{5}$, 则 $\cos \alpha$ 的值为()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$



2. 设 α 是第二象限角, $P(x, 4)$ 为其终边上的一点, 且 $\cos \alpha = \frac{1}{5}x$, 则 $\tan \alpha =$ ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $-\frac{4}{3}$

3. 已知 $A(x_A, y_A)$ 是单位圆(圆心在坐标原点 O)上任意一点, 将射线 OA 绕 O 点逆时针旋转 30° , 交单位圆于点 $B(x_B, y_B)$, 则 $x_A - y_B$ 的取值范围是()

- A. $[-2, 2]$ B. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ C. $[-1, 1]$ D. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

4. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边在直线 $y=2x$ 上, 则 $\cos 2\theta =$ ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

5. 已知角 θ 的顶点为坐标原点, 始边为 x 轴的非负半轴, 若 $P(4, y)$ 是角 θ 终边上一点, 且 $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $y =$ _____.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称. 若 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\beta =$ _____.

[大题综合练——迁移贯通]

1. 已知角 α 的终边在直线 $y = -3x$ 上, 求 $10\sin\alpha + \frac{3}{\cos\alpha}$ 的值.
2. 已知扇形 AOB 的周长为 8.
 - (1) 若这个扇形的面积为 3, 求圆心角的大小;
 - (2) 求这个扇形的面积取得最大值时圆心角的大小和弦长 AB .
3. 已知 $\sin\alpha < 0$, $\tan\alpha > 0$.
 - (1) 求 α 角的集合;
 - (2) 求 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在的象限;
 - (3) 试判断 $\tan\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ 的符号.

[返回](#)

第二节 同角三角函数的基本关系与诱导公式

本节主要包括 2 个知识点：

- 1. 同角三角函数的基本关系；
- 2. 三角函数的诱导公式.

突破点(一) 同角三角函数的基本关系

[基本知识]

1. 同角三角函数的基本关系

(1)平方关系： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\ (\alpha\in R)$.

(2)商数关系： $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right)$.

2. 同角三角函数基本关系式的应用技巧

技巧	解读	适合题型
切弦互化	主要利用公式 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 化成正弦、余弦， 或者利用公式 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ 化成正切	表达式中含有 $\sin\theta$ ， $\cos\theta$ 与 $\tan\theta$
“1” 的变换	$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)=$ $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2\mp2\sin\theta\cos\theta=\tan\frac{\pi}{4}$	表达式中需要利用 “1” 转化
和积转换	利用关系式 $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta$ 进行变形、转化	表达式中含有 $\sin\theta\pm\cos\theta$ 或 $\sin\theta\cos\theta$

[基本能力]

1. 判断题

(1)若 α,β 为锐角，则 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$. ()

(2)若 $\alpha\in R$ ，则 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 恒成立. ()

2. 填空题

(1)已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ， $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ，则 $\tan\alpha=$ _____.

(2)若 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ ， $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ ，则 $\tan\alpha=$ _____.

(3)已知 $\tan\alpha=2$ ，则 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值为_____.

[全析考法]

“知一求二”问题

利用同角三角函数的基本关系求解问题的关键是熟练掌握同角三角函数的基本关系的正用、逆用、变形. 同角三角函数的基本关系本身是恒等式, 也可以看作是方程, 对于一些题, 可利用已知条件, 结合同角三角函数的基本关系列方程组, 通过解方程组达到解决问题的目的.

[例 1] (1) 已知 $\cos\alpha=k$, $k\in R$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\sin(\pi+\alpha)=(\quad)$

- A. $-\sqrt{1-k^2}$ B. $\sqrt{1-k^2}$ C. $\pm\sqrt{1-k^2}$ D. $-k$

(2) 若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$, 则 $\tan\alpha=(\quad)$

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

[易错提醒]

知弦求弦、切或知切求弦时要注意判断角所在的象限, 不要弄错切、弦的符号.

知切求 $f(\sin\alpha, \cos\alpha)$ 值问题

若已知正切值, 求一个关于正弦和余弦的齐次分式的值, 则可以通过分子、分母同时除以一个余弦的齐次幂将其转化为一个关于正切的分式, 代入正切值就可以求出这个分式的值, 这是同角三角函数关系中的一类基本题型.

[例 2] 已知 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$, 则 $\sin\alpha \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha)=(\quad)$

- A. $\frac{21}{25}$ B. $\frac{25}{21}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{4}$

$\sin\alpha \pm \cos\alpha$ 与 $\sin\alpha\cos\alpha$ 关系的应用

[例 3] 已知 $x\in(-\pi, 0)$, $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$.

(1) 求 $\sin x - \cos x$ 的值;

(2) 求 $\frac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{1 - \tan x}$ 的值.

[方法技巧]

同角三角函数关系式的方程思想

对于 $\sin\alpha + \cos\alpha$, $\sin\alpha - \cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\alpha$ 这三个式子, 知一可求二, 若令 $\sin\alpha + \cos\alpha = t$, 则 $\sin$

$acos\alpha = \frac{t^2-1}{2}$, $sin\alpha - cos\alpha = \pm\sqrt{2-t^2}$ (注意根据 α 的范围选取正、负号), 体现了方程思想的应用.

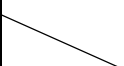
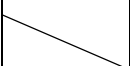
[全练题点]

- 若 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $sin\alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $cos(-\alpha) = (\quad)$
 A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$
- 已知 $tan\theta = 2$, 则 $sin^2\theta + sin\theta cos\theta - 2cos^2\theta = (\quad)$
 A. $-\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$
- 已知 $sin\alpha + cos\alpha = \frac{1}{5}$, $\alpha \in [0, \pi]$, 则 $tan\alpha = (\quad)$
 A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$
- 已知 $sin\alpha cos\alpha = \frac{1}{8}$, 且 $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, 则 $cos\alpha - sin\alpha$ 的值为 $(\quad)$
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}$
- 已知 $tan\alpha = -\frac{4}{3}$, 求:
 (1) $\frac{sin\alpha - 4cos\alpha}{5sin\alpha + 2cos\alpha}$ 的值;
 (2) $\frac{1}{cos^2\alpha - sin^2\alpha}$ 的值;
 (3) $sin^2\alpha + 2sin\alpha cos\alpha$ 的值.

突破点(二) 三角函数的诱导公式

[基本知识]

组数	一	二	三	四	五	六
角	$2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$	$\pi + \alpha$	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
正弦	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$cos\alpha$
余弦	$cos\alpha$	$-cos\alpha$	$cos\alpha$	$-cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$

正切	$\tan \alpha$	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\tan \alpha$		
----	---------------	---------------	----------------	----------------	---	--

[基本能力]

1. 判断题

(1) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ 成立的条件是 α 为锐角. ()

(2) 诱导公式的记忆口诀中“奇变偶不变，符号看象限”，其中的奇、偶是指 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍、偶数倍，变与不变指函数名称是否变化. ()

2. 填空题

(1) 如果 $\sin(\pi + A) = \frac{1}{2}$, 那么 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - A\right)$ 的值是_____.

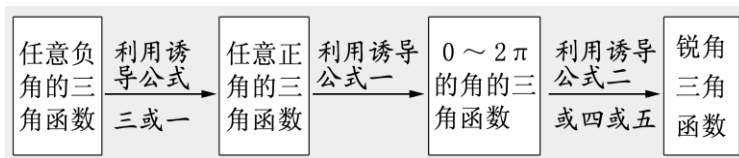
(2) 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\tan\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) =$ _____.

(3) 化简: $\frac{\sin \pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] \tan \alpha} =$ _____.

[全析考法]

诱导公式的应用

1. 利用诱导公式把任意角的三角函数转化为锐角三角函数的步骤



也就是：“负化正，大化小，化到锐角就好了.”

2. 利用诱导公式化简三角函数的要求

(1) 化简过程是恒等变形;

(2) 结果要求项数尽可能少，次数尽可能低，结构尽可能简单，能求值的要求出值.

[例] (1) 若 $f(x) = \tan x - \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1}{\sin(\pi + x)\cos(\pi - x)}$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为()

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) 若 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) =$ ()

A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{7}{9}$

[方法技巧]

应用诱导公式化简求值的常见问题及注意事项

- (1) 已知角求值问题. 关键是利用诱导公式把任意角的三角函数值转化为锐角的三角函数值求解. 转化过程中注意口诀“奇变偶不变, 符号看象限”的应用.
- (2) 对给定的式子进行化简或求值问题. 要注意给定的角之间存在的特定关系, 充分利用给定的关系结合诱导公式将角进行转化. 特别要注意每一个角所在的象限, 防止符号及三角函数名出错.

[全练题点]

1. 已知 $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$, 那么 $\tan\alpha$ 的值为()
- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\pm\frac{4}{3}$ D. $\pm\frac{3}{4}$
2. 已知 $a=\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$, $b=\cos\frac{23\pi}{4}$, $c=\sin\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系为()
- A. $a>b>c$ B. $b>a>c$ C. $b>c>a$ D. $a>c>b$
3. 已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 且 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, 则 $\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\alpha+\pi)}=()$
- A. $\frac{12}{13}$ B. $-\frac{12}{13}$ C. $\frac{13}{12}$ D. $-\frac{13}{12}$
4. 已知 $A=\frac{\sin(k\pi+\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\cos(k\pi+\alpha)}{\cos\alpha}$ ($k\in Z$), 则 A 的值构成的集合是()
- A. $\{1, -1, 2, -2\}$ B. $\{-1, 1\}$ C. $\{2, -2\}$ D. $\{1, -1, 0, 2, -2\}$
5. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\tan\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=$ _____.

[全国卷5年真题集中演练——明规律]

1. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha=()$
- A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{7}{9}$
2. 若 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$, 则 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=()$
- A. $\frac{64}{25}$ B. $\frac{48}{25}$ C. 1 D. $\frac{16}{25}$

3. 已知 θ 是第四象限角, 且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$ _____.

对点练(一) 同角三角函数的基本关系

1. 若 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, 且 α 为第四象限角, 则 $\tan\alpha$ 的值为()

- A. $\frac{12}{5}$ B. $-\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $-\frac{5}{12}$

2. 已知 $2\sin\alpha=1+\cos\alpha$, 则 $\tan\alpha$ 的值为()

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ 或0 D. $\frac{4}{3}$ 或0

3. 若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$, 则 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=$ ()

- A. $\frac{5}{18}$ B. $-\frac{5}{18}$ C. $\frac{18}{5}$ D. $-\frac{18}{5}$

4. 已知 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\sin\theta+\cos\theta=a$, 其中 $a\in(0, 1)$, 则 $\tan\theta$ 的可能取值是()

- A. -3 B. 3 或 $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. -3 或 $-\frac{1}{3}$

5. 已知 A 为三角形的内角, $\sin A=\frac{4}{5}$, 则 $\frac{5\cos A+2}{3\tan A-2}=$ _____.

6. 已知 θ 是三角形的一个内角, 且 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 是关于 x 的方程 $4x^2+px-2=0$ 的两根, 则 $\theta=$ _____.

7. 已知 $\alpha\in R$, $\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=\frac{5}{2}$, 则 $\tan\alpha=$ _____.

对点练(二) 三角函数的诱导公式

1. 已知 $\sin(\pi+\theta)=-\sqrt{3}\cos(2\pi-\theta)$, $|\theta|<\frac{\pi}{2}$, 则 $\theta=$ ()

- A. $-\frac{\pi}{6}$ B. $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

2. 已知 $\sin\theta=\frac{1}{3}$, $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin(\pi-\theta)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$ 的值为()

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $-\frac{1}{9}$

3. 已知 $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+x\right)=\frac{1}{5}$, 则 $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=$ ()

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

4. 已知 α 为锐角, 且 $2\tan(\pi-\alpha)-3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)+5=0$, $\tan(\pi+\alpha)+6\sin(\pi+\beta)-1=0$, 则 $\sin\alpha$ 的值是()

A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{1}{3}$

5. 已知 $\tan(\pi-\alpha)=-\frac{2}{3}$, 且 $\alpha\in\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{\cos(-\alpha)+3\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+9\sin\alpha}=(\quad)$

A. $-\frac{1}{5}$ B. $-\frac{3}{7}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{7}$

6. 已知角 θ 的顶点在坐标原点, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $4x-y=0$ 上, 则

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi-\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sin(\pi-\theta)}=(\quad)$$

A. $-\frac{2}{3}$ B. 2 C. 0 D. $\frac{2}{3}$

[大题综合练——迁移贯通]

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $\tan(\alpha+\pi)+\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}$ 的值.

2. 已知 α 为第三象限角, $f(\alpha)=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\tan(\pi-\alpha)}{\tan(-\alpha-\pi)\cdot\sin(-\alpha-\pi)}$.

(1) 化简 $f(\alpha)$;

(2) 若 $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{5}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

3. 已知 $\sin(3\pi+\alpha)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, 求下列各式的值.

(1) $\frac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{5\sin\alpha+2\cos\alpha}$;

(2) $\sin^2\alpha+\sin 2\alpha$.

[返回](#)

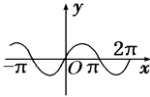
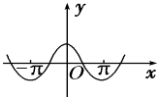
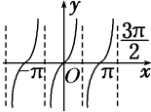
第三节 三角函数的图象与性质

本节主要包括 2 个知识点：

- 1. 三角函数的定义域和值域；
- 2. 三角函数的性质.

突破点(一) 三角函数的定义域和值域

[基本知识]

三角函数	正弦函数 $y=\sin x$	余弦函数 $y=\cos x$	正切函数 $y=\tan x$
图象			
定义域	R	R	$\left\{x \mid x \in R, \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R
最值	当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k \in Z)$ 时, 取得最大值 1; 当且仅当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k \in Z)$ 时, 取得最小值 -1	当且仅当 $x=2k\pi(k \in Z)$ 时, 取得最大值 1; 当且仅当 $x=\pi+2k\pi(k \in Z)$ 时, 取得最小值 -1	

[基本能力]

1. 判断题

- (1) 函数 $y=\sin x$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的最大值为 1. ()
- (2) 函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 的定义域为 $x \neq -\frac{\pi}{4}$. ()
- (3) 函数 $y=\sqrt{\cos x}$ 的定义域为 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right], k \in Z$. ()

2. 填空题

- (1) 函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域为_____.
- (2) 函数 $y=\ln\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)$ 的定义域为_____.

(3) 函数 $y=2\cos x-3$ 在 $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的值域为_____.

[全析考法]

三角函数的定义域

[例 1] 函数 $y=\lg(2\sin x-1)+\sqrt{1-2\cos x}$ 的定义域是_____.

[方法技巧]

三角函数定义域的求法

求三角函数定义域实际上是构造简单的三角不等式(组), 常借助三角函数线或三角函数图象来求解.

[提醒] 解三角不等式时要注意周期, 且 $k\in\mathbb{Z}$ 不可以忽略.

三角函数的值域(最值)

[例 2] (1) 函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$ ($0\leq x\leq 9$) 的最大值与最小值之和为()

A. $2-\sqrt{3}$ B. 0 C. -1 D. $-1-\sqrt{3}$

(2) 函数 $y=\cos 2x+2\sin x$ 的最大值为()

A. $\frac{3}{4}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

[方法技巧]

三角函数值域或最值的三种求法

直接法	形如 $y=asin x+k$ 或 $y=acos x+k$ 的三角函数, 直接利用 $\sin x$, $\cos x$ 的值域求出
化一法	形如 $y=asin x+bcos x+k$ 的三角函数, 化为 $y=Asin(\omega x+\varphi)+k$ 的形式, 确定 $\omega x+\varphi$ 的范围, 根据正弦函数单调性写出函数的值域(最值)
换元法	形如 $y=asin^2 x+bsin x+k$ 的三角函数, 可先设 $\sin x=t$, 化为关于 t 的二次函数求值域(最值); 形如 $y=asin xcos x+b(\sin x\pm\cos x)+c$ 的三角函数, 可先设 $t=\sin x\pm\cos x$, 化为关于 t 的二次函数求值域(最值)

[全练题点]

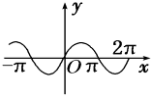
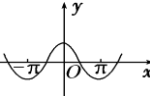
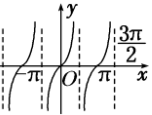
1. 函数 $y=\sqrt{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 的定义域为()

- A. $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ B. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$
- C. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$ D. $(-\infty, +\infty)$

2. 函数 $y = \lg(\sin 2x) + \sqrt{9 - x^2}$ 的定义域为_____.
3. 函数 $y = 3 - \sin x - 2\cos^2 x$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 的值域为_____.
4. 求函数 $y = \sin x + \cos x + 3\cos x \sin x$ 的最值.

突破点(二) 三角函数的性质

[基本知识]

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
最小正周期	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	$\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 为增; $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 为减, $k \in \mathbb{Z}$	$[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 为减; $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 为增, $k \in \mathbb{Z}$	$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 为增, $k \in \mathbb{Z}$
对称中心	$(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$	$\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbb{Z}$
对称轴	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	

[基本能力]

1. 判断题

- (1) 函数 $y = \sin x$ 的图象关于点 $(k\pi, 0) (k \in \mathbb{Z})$ 中心对称. ()
- (2) 正切函数 $y = \tan x$ 在定义域内是增函数. ()
- (3) $y = \sin|x|$ 是偶函数. ()

2. 填空题

(1) 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则 $\omega =$ _____.

(2) 若函数 $f(x) = \sin\frac{x+\varphi}{3}$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$) 是偶函数, 则 $\varphi =$ _____.

(3) 函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega \neq 0$) 对任意 x 都有 $f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, 则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 等于_____.

(4) 函数 $y = -\tan\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间为_____.

[全析考法]

三角函数的单调性

考法(一) 求三角函数的单调区间

[例 1] 求下列函数的单调区间:

(1) $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in [0, \pi]$;

(2) $f(x) = |\tan x|$;

(3) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

[方法技巧]

求三角函数单调区间的两种方法

代换法	就是将比较复杂的三角函数含自变量的代数式整体当作一个角 u (或 t), 利用基本三角函数的单调性列不等式求解
图象法	画出三角函数的正、余弦曲线, 结合图象求它的单调区间

[提醒] 求解三角函数的单调区间时, 若 x 的系数为负, 应先化为正, 同时切莫忽视函数自身的定义域.

考法(二) 已知单调区间求参数的值或范围

[例 2] (1) 已知 $f(x) = \cos 2x + a \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $[-2, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$ C. $(-\infty, -4)$ D. $(-\infty, -4]$

(2) 若函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 则 $\omega =$ _____.

[方法技巧]

已知单调区间求参数范围的三种方法

子集法	求出原函数的相应单调区间，由已知区间是所求某区间的子集，列不等式(组)求解
反子集法	由所给区间求出整体角的范围，由该范围是某相应正、余弦函数的某个单调区间的子集，列不等式(组)求解
周期性法	由所给区间的两个端点到其相应对称中心的距离不超过 $\frac{1}{4}$ 周期列不等式(组)求解

三角函数的周期性

[例 3] (1) 函数 $y = |\tan(2x + \varphi)|$ 的最小正周期是 ()

- A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

(2) 函数 $f(x) = (\sqrt{3}\sin x + \cos x)(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$ 的最小正周期是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 2π

[方法技巧]

三角函数周期的求解方法

公式法	(1) 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 的最小正周期分别为 2π, 2π, π; (2) $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 和 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{ \omega }$, $y = \tan(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{ \omega }$
图象法	利用三角函数图象的特征求周期. 如: 相邻两最高点(最低点)之间为一个周期, 最高点与相邻的最低点之间为半个周期

三角函数的奇偶性

[例 4] 已知函数 $f(x) = \sin(x + \theta) + \sqrt{3}\cos(x + \theta)$ ($\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) 是偶函数, 则 θ 的值为 ()

- A. 0 B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

[方法技巧]

与三角函数奇偶性相关的结论

三角函数中，判断奇偶性的前提是定义域关于原点对称，奇函数一般可化为 $y=Asin\omega x$ 或 $y=Atan\omega x$ 的形式，而偶函数一般可化为 $y=Acos\omega x+b$ 的形式。常见的结论有：

- (1) 若 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 为偶函数，则有 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ ；若为奇函数，则有 $\varphi=k\pi(k\in Z)$ 。
- (2) 若 $y=Acos(\omega x+\varphi)$ 为偶函数，则有 $\varphi=k\pi(k\in Z)$ ；若为奇函数，则有 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 。
- (3) 若 $y=Atan(\omega x+\varphi)$ 为奇函数，则有 $\varphi=k\pi(k\in Z)$ 。

三角函数的对称性

- (1) 求形如 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=Acos(\omega x+\varphi)$ 函数的图象对称轴或对称中心时，都是把 “ $\omega x+\varphi$ ” 看作一个整体，然后根据三角函数图象的对称轴或对称中心列方程进行求解。
- (2) 在判断对称轴或对称中心时，用以下结论可快速解题：设 $y=f(x)=Asin(\omega x+\varphi)$ ， $g(x)=Acos(\omega x+\varphi)$ ， $x=x_0$ 是对称轴方程 $\Leftrightarrow f(x_0)=\pm A$ ， $g(x_0)=\pm A$ ； $(x_0, 0)$ 是对称中心 $\Leftrightarrow f(x_0)=0$ ， $g(x_0)=0$ 。

[例 5] (1) 若函数 $y=cos(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega\in N^*)$ 图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ ，则 ω 的最小值为()

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

(2) 函数 $f(x)=sin(x-\frac{\pi}{4})$ 图象的一条对称轴是()

- A. $x=\frac{\pi}{4}$ B. $x=\frac{\pi}{2}$ C. $x=-\frac{\pi}{4}$ D. $x=-\frac{\pi}{2}$

[方法技巧]

三角函数对称轴和对称中心的求解方法

定义法	正(余)弦函数的对称轴是过函数的最高点或最低点且垂直于 x 轴的直线，对称中心是图象与 x 轴的交点，即函数的零点
公式法	函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 的对称轴为 $x=\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}$ ，对称中心为 $(\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}, 0)$ ； 函数 $y=Acos(\omega x+\varphi)$ 的对称轴为 $x=\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$ ，对称中心为 $(\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}, 0)$ ； 函数 $y=Atan(\omega x+\varphi)$ 的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}, 0)$ 。 上述 $k\in Z$

[全练题点]

- 函数 $y=3\cos\left(\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是()
 A. $\frac{2\pi}{5}$ B. $\frac{5\pi}{2}$ C. 2π D. 5π
- 函数 $y=\sin\left[\frac{\pi}{2}-2x\right]$, $x\in R$ 是()
 A. 最小正周期为 π 的奇函数 B. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数
 C. 最小正周期为 π 的偶函数 D. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数
- 下列函数中, 最小正周期是 π 且在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上是增函数的是()
 A. $y=\sin 2x$ B. $y=\sin x$ C. $y=\tan\frac{x}{2}$ D. $y=\cos 2x$
- 已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$ ($|\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调且最大值不大于 $\sqrt{3}$, 则 φ 的取值范围是()
 A. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ B. $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ C. $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ D. $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$
- 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$, $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 且其图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象, 则函数 $f(x)$ 的图象()
 A. 关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称 B. 关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称
 C. 关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称 D. 关于点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 对称

[全国卷5年真题集中演练——明规律]

- 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为()
 A. 4π B. 2π C. π D. $\frac{\pi}{2}$
- 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$, $|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}$), $x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上单调, 则 ω 的最大值为()
 A. 11 B. 9 C. 7 D. 5
- 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论错误的是()

A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π B. $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

C. $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$ D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递减

4. 函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}$ ($x\in[0, \frac{\pi}{2}]$) 的最大值是_____.

对点练(一) 三角函数的定义域和值域

1. 已知函数 $y=2\cos x$ 的定义域为 $[\frac{\pi}{3}, \pi]$, 值域为 $[a, b]$, 则 $b-a$ 的值是()

A. 2 B. 3 C. $\sqrt{3}+2$ D. $2-\sqrt{3}$

2. 函数 $y=\cos^2x-2\sin x$ 的最大值与最小值分别为()

A. 3, -1 B. 3, -2 C. 2, -1 D. 2, -2

3. 已知函数 $f(x)=a(2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x)+b$, 若 $x\in[0, \pi]$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域是 $[5, 8]$, 则 ab 的值为()

A. $15\sqrt{2}-15$ 或 $24-24\sqrt{2}$ B. $15\sqrt{2}-15$ C. $24-24\sqrt{2}$ D. $15\sqrt{2}+15$ 或 $24+24\sqrt{2}$

4. 定义运算: $a*b=\begin{cases} a, & a\leq b, \\ b, & a>b. \end{cases}$ 例如 $1]()$

A. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ B. $[-1, 1]$ C. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ D. $[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

5. 函数 $y=3-2\cos(x+\frac{\pi}{4})$ 的最大值为_____, 此时 $x=_____$.

对点练(二) 三角函数的性质

1. $y=2\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$ 的单调递增区间为()

A. $[k\pi-\frac{\pi}{12}, k\pi+\frac{5\pi}{12}](k\in Z)$ B. $[k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\pi+\frac{11\pi}{12}](k\in Z)$

C. $[k\pi-\frac{\pi}{3}, k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in Z)$ D. $[k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in Z)$

2. 下列函数中, 存在最小正周期的是()

A. $y=\sin|x|$ B. $y=\cos|x|$ C. $y=\tan|x|$ D. $y=(x^2+1)^0$

3. 若函数 $f(x)=3\cos(\omega x-\frac{\pi}{4})$ ($1<\omega<14$) 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称, 则 $\omega=()$

A. 2 B. 3 C. 6 D. 9

4. 若函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 对任意 x 都有 $f\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = f(-x)$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = (\quad)$
- A. 2 或 0 B. 0 C. -2 或 0 D. -2 或 2
5. 若函数 $f(x)$ 同时具有以下两个性质: ① $f(x)$ 是偶函数; ② 对任意实数 x , 都有 $f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$. 则 $f(x)$ 的解析式可以是 $(\quad)$
- A. $f(x) = \cos x$ B. $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ C. $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$ D. $f(x) = \cos 6x$
6. 已知 $f(x) = a\sin 2x + b\cos 2x$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$. 若 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\quad)$
- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$ B. $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$
- C. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$ D. $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$
7. 若函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(2x + \theta) + \cos(2x + \theta)$ ($0 < \theta < \pi$) 的图象关于 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值是 $(\quad)$
- A. -1 B. $-\sqrt{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

[大题综合练——迁移贯通]

1. 设函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和对称轴方程;
- (2) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.
2. 已知函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + \cos 2x - 1$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.
3. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos 2x$ ($x \in \mathbb{R}$).
- (1) 若 $f(\alpha) = \frac{1}{2}$ 且 $\alpha \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right)$, 求 $\cos 2\alpha$ 的值;
- (2) 记函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 b , 且函数 $f(x)$ 在 $[a\pi, b\pi]$ ($a < b$) 上单调递增, 求实数

a 的最小值.

[返回](#)

第四节 函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 的图象及三角函数模型的简单应用

本节主要包括 2 个知识点：

- 1. 函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 的图象；
- 2. 三角函数模型的简单应用.

突破点(一) 函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 的图象

[基本知识]

1. $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 的有关概念

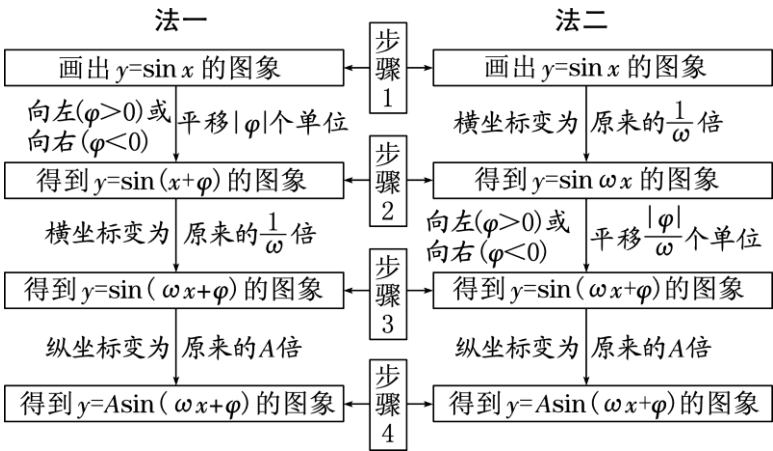
	振幅	周期	频率	相位	初相
$y=Asin(\omega x+\varphi) \ (A>0, \omega>0)$	A	$T=\frac{2\pi}{\omega}$	$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$	$\omega x+\varphi$	φ

2. 用五点法画 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 一个周期内的简图

用五点法画 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 一个周期内的简图时，要找五个关键点，如下表所示：

x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi-\varphi}{2\omega}$	$\frac{\pi-\varphi}{\omega}$	$\frac{3\pi-\varphi}{2\omega}$	$\frac{2\pi-\varphi}{\omega}$
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=Asin(\omega x+\varphi)$	0	A	0	$-A$	0

3. 由函数 $y=sinx$ 的图象变换得到 $y=Asin(\omega x+\varphi) \ (A>0, \omega>0)$ 的图象的两种方法



[基本能力]

1. 判断题

(1)利用图象变换作图时“先平移,后伸缩”与“先伸缩,后平移”中平移的单位长度一致.()

(2) 将 $y=3\sin 2x$ 的图象左移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位后所得图象的解析式是 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. ()

2. 填空题

(1) 函数 $y=\frac{2}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的振幅为_____，周期为_____，初相为_____.

(2) 用五点法作函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在一个周期内的图象时，主要确定的五个点是_____、
_____、_____、_____、_____.

(3) 把 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象上点的横坐标变为原来的 2 倍得到 $y=\sin\omega x$ 的图象，则 ω 的值为_____.

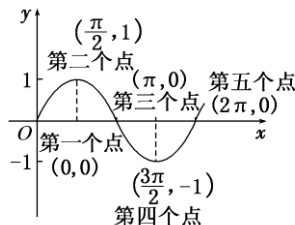
(4) 要得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象，只需把函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移_____个单位长度.

[全析考法]

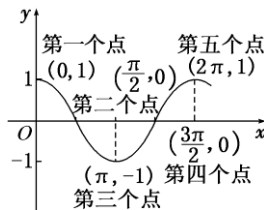
函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 的图象及变换

1. “五点法”画图

(1) $y=\sin x$ 的图象在 $[0, 2\pi]$ 上的五个关键点的坐标为 $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$, $(2\pi, 0)$ ，图象如图①所示.



图①



图②

(2) $y=\cos x$ 的图象在 $[0, 2\pi]$ 上的五个关键点的坐标为 $(0, 1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(\pi, -1)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $(2\pi, 1)$ ，图象如图②所示.

2. 三角函数图象的变换

函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)+k$ ($A>0, \omega>0$) 中，参数 A, ω, φ, k 的变化引起图象的变换： A 的变化引起图象中振幅的变换，即纵向伸缩变换； ω 的变化引起周期的变换，即横向伸缩变换； φ 的变化引起左右平移变换， k 的变化引起上下平移变换. 图象平移遵循的规律为：“左加右减，上加下减”.

[例 1] (1) 若函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ ，为了得到函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象，则只需将 $f(x)$ 的图象()

A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/587024053200010023>