浙江省绍兴市绍兴一中 2023 年高三 4 月数学试题考试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

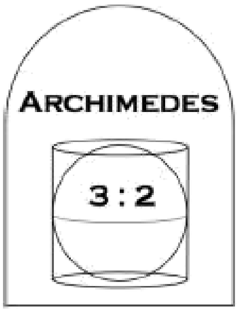
3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

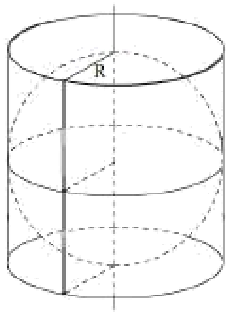
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的焦距为$2c$，焦点到双曲线$C$的渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}c$，则双曲线的渐近线方程为（）

A．$y=\pm\sqrt{3}x$　　B．$y=\pm\sqrt{2}x$　　C．$y=\pm x$　　D．$y=\pm 2x$

2．阿基米德（公元前 287 年—公元前 212 年）是古希腊伟大的哲学家、数学家和物理学家，他和高斯、牛顿并列被称为世界三大数学家.据说，他自己觉得最为满意的一个数学发现就是“圆柱内切球体的体积是圆柱体积的三分之二，并且球的表面积也是圆柱表面积的三分之二”.他特别喜欢这个结论，要求后人在他的墓碑上刻着一个圆柱容器里放了一个球，如图，该球顶天立地，四周碰边，表面积为54π的圆柱的底面直径与高都等于球的直径，则该球的体积为 （　　）





A．4π　　B．16π　　C．36π　　D．$\frac{64\pi}{3}$

3．设一个正三棱柱$ABC-DEF$，每条棱长都相等，一只蚂蚁从上底面ABC的某顶点出发，每次只沿着棱爬行并爬到另一个顶点，算一次爬行，若它选择三个方向爬行的概率相等，若蚂蚁爬行 10 次，仍然在上底面的概率为P_{10}，则P_{10}为（　　）

A．$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{1}{2}$　　B．$\left(\frac{1}{3}\right)^{11}+\frac{1}{2}$

C．$\left(\frac{1}{3}\right)^{11}-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{1}{2}$

4．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为 120°，则$\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|=$（　　）

A．$\sqrt{11}$　　B．$\sqrt{37}$　　C．$2\sqrt{10}$　　D．$\sqrt{43}$

5．复数 $\dfrac{5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的虚部是（　）

A．i　　B．$-\mathrm{i}$　　C．1　　D．-1

6．已知 $a+bi\,(a,b\in R)$ 是 $\dfrac{1+i}{1-i}$ 的共轭复数,则 $a+b=$（　　）

A．-1　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．1

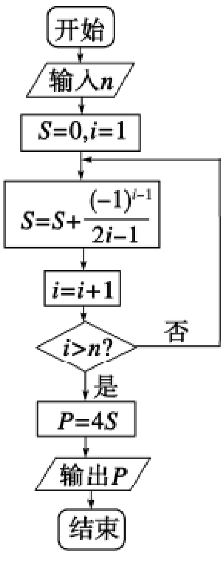
7．已知 $\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(2,2),\vec{c}=(n,-1)$，若 $(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$，则 n 等于（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

8．已知集合 $M=\left\{(x,y)\,|\,x+y<4,x、y\in N^{*}\right\}$，则集合 M 的非空子集个数是（　　）

A．2　　B．3　　C．7　　D．8

9．德国数学家莱布尼兹(1646 年-1716 年)于 1674 年得到了第一个关于 π 的级数展开式,该公式于明朝初年传入我国.在我国科技水平业已落后的情况下,我国数学家、天文学家明安图(1692 年-1765 年)为提高我国的数学研究水平,从乾隆初年(1736 年)开始,历时近 30 年,证明了包括这个公式在内的三个公式,同时求得了展开三角函数和反三角函数的 6 个新级数公式,著有《割圆密率捷法》一书,为我国用级数计算 π 开创了先河.如图所示的程序框图可以用莱布尼兹“关于 π 的级数展开式”计算 π 的近似值(其中 P 表示 π 的近似值),若输入 $n=10$,则输出的结果是(　　)



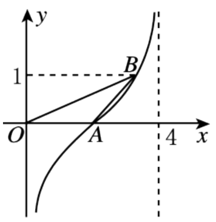
A．$P=4(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{17})$　　B．$P=4(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots-\dfrac{1}{19})$

C．$P=4(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{21})$　　D．$P=4(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots-\dfrac{1}{21})$

10．数列$\{a_n\}$，满足对任意的 $n\in N_+$，均有 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$ 为定值.若 $a_7=2$，$a_9=3$，$a_{98}=4$，则数列$\{a_n\}$的前 100 项的和 S_{100}=(　　)

A．132　　B．299　　C．68　　D．99

11．函数 $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=$（　　）



A．6　　　　**B．5**　　　　**C．4**　　　　**D．3**

12．已知各项都为正的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_3+a_4=15$，若 a_1+2，a_3+4，a_6+16 成等比数列，则 $a_{10}=$（ ）

A． 19　　　　**B．** 20　　　　**C．** 21　　　　**D．** 22

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知实数 x，y 满足 $\begin{cases} y\le\sqrt{1-x^2}, \\ y\ge 0, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的取值范围是______.

14．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$a_6+a_5=4, a_4+a_3-a_2-a_1=1$，则 a_1 的值为________.

15．实数 x，y 满足 $\begin{cases} y\ge 1 \\ y\le 2x-1 \\ x+y\le m \end{cases}$，如果目标函数 $z=x-y$ 的最小值为 -2，则 $\dfrac{y}{x}$ 的最小值为_______.

16．若函数 $f(x)=a\ln x,(a\in R)$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x}$，在公共点处有共同的切线，则实数 a 的值为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）已知直线 l 的参数方程：$\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \end{cases}$（$t$ 为参数）和圆 C 的极坐标方程：$\rho=2\sin\theta$

（1）将直线 l 的参数方程化为普通方程，圆 C 的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）已知点 $M(1,3)$，直线 l 与圆 C 相交于 A、B 两点，求 $|MA|+|MB|$ 的值.

18.（12 分）在直角坐标系 xOy 中，长为 **3** 的线段的两端点 A、B 分别在 x 轴、y 轴上滑动，点 P 为线段 AB 上的点，且满足 $|AP|=2|PB|$.记点 P 的轨迹为曲线 E.

（1）求曲线 E 的方程；

（2）若点 M、N 为曲线 E 上的两个动点，记 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=m$，判断是否存在常数 m 使得点 O 到直线 MN 的距离为定值？若存在，求出常数 m 的值和这个定值；若不存在，请说明理由.

19.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知平行于 x 轴的动直线 l 交抛物线 C：$y^2=4x$ 于点 P，点 F 为 C 的焦点．圆心不在 y 轴上的圆 M 与直线 l，PF，x 轴都相切，设 M 的轨迹为曲线 E.

（1）求曲线 ***E*** 的方程；

（2）若直线 l_1 与曲线 ***E*** 相切于点 $Q(s,t)$，过 ***Q*** 且垂直于 l_1 的直线为 l_2，直线 l_1， l_2 分别与 ***y*** 轴相交于点 ***A***， B.当线段 ***AB*** 的长度最小时，求 ***s*** 的值.

20.（12 分）设函数 $f(x)=ax-(a+1)\ln(x+1)$.

（1） $a=1$时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a>0$ 时，设 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$，若 $g(a)<t$ 恒成立，求实数 ***t*** 的取值范围.

21.（12 分）已知首项为 **2** 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{2na_n+2^{n+1}}{n+1}$.

（1）证明：数列 $\left\{\dfrac{na_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列.

（2）令 $b_n=a_n+n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

22.（10 分）已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-3x$ （ $a\in\mathbf{R}$ ）

（1）函数 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-2$，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $a=1$时，对于任意 $x_1,x_2\in[1,10]$，当 $x_2>x_1$ 时，不等式 $f(x_1)-f(x_2)>\dfrac{m(x_2-x_1)}{x_2x_1}$ 恒成立，求出实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1． **A**

【解析】

利用双曲线 C ： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点到渐近线的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$，求出 a， b 的关系式，然后求解双曲线的渐近线方程.

【详解】

双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的焦点$\left(c,0\right)$到渐近线$bx+ay=0$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}c$，

可得：$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$，可得$\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，则$C$的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.

故选**A**.

【点睛】

本题考查双曲线的简单性质的应用，构建出a,b的关系是解题的关键，考查计算能力，属于中档题.

2．**C**

【解析】

设球的半径为***R***，根据组合体的关系，圆柱的表面积为$S=2\pi R^2+2\pi R\times 2R=54\pi$，解得球的半径$R=3$，再代入球的体积公式求解.

【详解】

设球的半径为***R***，

根据题意圆柱的表面积为$S=2\pi R^2+2\pi R\times 2R=54\pi$，

解得$R=3$，

所以该球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\times\pi\times 3^3=36\pi$.

故选：**C**

【点睛】

本题主要考查组合体的表面积和体积，还考查了对数学史了解，属于基础题.

3．**D**

【解析】

由题意，设第n次爬行后仍然在上底面的概率为P_n.①若上一步在上面，再走一步要想不掉下去，只有两条路，其概率为$\frac{2}{3}P_{n-1}$；②若上一步在下面，则第$n-1$步不在上面的概率是$1-P_{n-1}$.如果爬上来，其概率是$\frac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right)$，两种事件又是互斥的,可得$P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right)$，根据求数列的通项知识可得选项.

【详解】

由题意，设第n次爬行后仍然在上底面的概率为P_n.

①若上一步在上面，再走一步要想不掉下去，只有两条路，其概率为$\frac{2}{3}P_{n-1}\left(n\geq 2\right)$；

②若上一步在下面，则第 $n-1$ 步不在上面的概率是 $1-P_{n-1},(n\ge 2)$.如果爬上来，其概率是 $\frac{1}{3}(1-P_{n-1}),(n\ge 2)$，

两种事件又是互斥的,∴ $P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$，即 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}$，∴ $P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$，

∴数列 $\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，而 $P_1=\frac{2}{3}$，所以 $P_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$，

∴当 $n=10$ 时，$P_{10}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{1}{2}$，

故选：**D.**

【点睛】

本题考查几何体中的概率问题，关键在于运用递推的知识，得出相邻的项的关系，这是常用的方法，属于难度题.

4．**D**

【解析】

先计算 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，然后将 $\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|$ 进行平方,，可得结果.

【详解】

由题意可得：

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos120^\circ=1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

∴$\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2=1+6+36=43$

∴则 $\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{43}$.

故选：***D.***

【点睛】

本题考查的是向量的数量积的运算和模的计算，属基础题。

5．**C**

【解析】

因为 $\frac{5i}{1+2i}=\frac{5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{10+5i}{5}=2+i$ ，所以 $\frac{5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的虚部是 1 ，故选 **C.**

6．**A**

【解析】

先利用复数的除法运算法则求出 $\frac{1+i}{1-i}$ 的值，再利用共轭复数的定义求出 ***a*+*bi***，从而确定 ***a***，***b*** 的值，求出 ***a*+*b***.

【详解】

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{2}=\boldsymbol{i}$,

∴***a*+*bi***＝﹣ ***i***，

∴***a***＝0，***b***＝﹣ 1，

∴***a*+*b***＝﹣ 1，

故选：*A*.

【点睛】

本题主要考查了复数代数形式的乘除运算，考查了共轭复数的概念，是基础题.

7．C

【解析】

先求出 $\vec{a}-\vec{c}=(1-n,4)$，再由 $(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$，利用向量数量积等于 0，从而求得 n.

【详解】

由题可知 $\vec{a}-\vec{c}=(1-n,4)$，

因为 $(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$，所以有 $(1-n)\times 2+2\times 4=0$，得 $n=5$，

故选：C.

【点睛】

该题考查的是有关向量的问题，涉及到的知识点有向量的减法坐标运算公式，向量垂直的坐标表示，属于基础题目.

8．C

【解析】

先确定集合 M 中元素，可得非空子集个数.

【详解】

由题意 $M=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$，共 3 个元素，其子集个数为 $2^3=8$，非空子集有 7 个.

故选：C.

【点睛】

本题考查集合的概念，考查子集的概念，含有 n 个元素的集合其子集个数为 2^n，非空子集有 2^n-1 个.

9．B

【解析】

执行给定的程序框图，输入$n=10$，逐次循环，找到计算的规律，即可求解.

【详解】

由题意，执行给定的程序框图，输入$n=10$，可得：

第 **1** 次循环：$S=1,i=2$；

第 **2** 次循环：$S=1-\frac{1}{3},i=3$；

第 **3** 次循环：$S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5},i=4$；

……

第 **10** 次循环：$S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots-\frac{1}{19},i=11$，

此时满足判定条件，输出结果$P=4S=4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots-\frac{1}{19})$，

故选：*B*.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的计算与输出，其中解答中认真审题，逐次计算，得到程序框图的计算功能是解答的关键，着重考查了分析问题和解答问题的能力，属于基础题.

10．**B**

【解析】

由$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$为定值，可得$a_{n+3}=a_n$，则$\left\{a_n\right\}$是以 **3** 为周期的数列，求出a_1,a_2,a_3，即求S_{100}.

【详解】

对任意的$n\in\mathbf{N}_+$，均有$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$为定值，

$\therefore\left(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\right)-\left(a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\right)=0$，

故$a_{n+3}=a_n$，

$\therefore\left\{a_n\right\}$是以 **3** 为周期的数列，

故$a_1=a_7=2,a_2=a_{98}=4,a_3=a_9=3$，

$\therefore S_{100}=\left(a_1+a_2+a_3\right)+\cdots+\left(a_{97}+a_{98}+a_{99}\right)+a_{100}=33\left(a_1+a_2+a_3\right)+a_1$

$=33\left(2+4+3\right)+2=299$.

故选：B.

【点睛】

本题考查周期数列求和，属于中档题.

11．A

【解析】

根据正切函数的图象求出 *A*、*B* 两点的坐标，再求出向量的坐标，根据向量数量积的坐标运算求出结果.

【详解】

由图象得,令 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{2}\right)$=**0**,即 $\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{2}$=***kπ***，$k\in Z$

***k*=0** 时解得 ***x*=2**，

令 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{2}\right)$=**1**,即 $\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$，解得 ***x*=3**，

∴*A*(2,0),*B*(3,1)，

$\therefore \overrightarrow{OA}=\left(2,0\right),\overrightarrow{OB}=\left(3,1\right),\overrightarrow{AB}=\left(1,1\right)$，

$\therefore\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\left(5,1\right)\cdot\left(1,1\right)=5+1=6$.

故选：***A*.**

【点睛】

本题考查正切函数的图象，平面向量数量积的运算，属于综合题，但是难度不大，解题关键是利用图象与正切函数图象求出坐标，再根据向量数量积的坐标运算可得结果，属于简单题.

12．A

【解析】

试题分析：设公差为 $d, a_2+a_3+a_4=3a_3=15\Rightarrow a_3=a_1+2d=5\Rightarrow a_1=5-2d\Rightarrow(a_1+2)(a_1+5d+16)$

$=(7-2d)(3d+21)=81\Rightarrow 2d^2+7d-22=0\Rightarrow d=2$ 或 $d=-\frac{11}{2}$（舍）$\Rightarrow a_1=1\Rightarrow a_{10}=1+9\times 2=19$，故选 **A.**

考点：等差数列及其性质.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\left[-1,\sqrt{2}\right]$

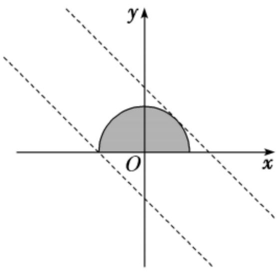
【解析】

根据约束条件画出可行域，即可由直线的平移方法求得 $x+y$ 的取值范围.

【详解】

.

由题意，画出约束条件表示的平面区域如下图所示，



令 $z=x+y$，则 $y=-x+z$

如图所示，图中直线所示的两个位置为 $y=-x+z$ 的临界位置，

根据几何关系可得 $y=-x+z$ 与 y 轴的两个交点分别为 $\left(0,-1\right),\left(0,\sqrt{2}\right)$，

所以 $x+y$ 的取值范围为 $\left[-1,\sqrt{2}\right]$.

故答案为：$\left[-1,\sqrt{2}\right]$

【点睛】

本题考查了非线性约束条件下线性规划的简单应用，由数形结合法求线性目标函数的取值范围，属于中档题.

14．$\sqrt{2}-1$

【解析】

运用等比数列的通项公式，即可解得 a_1.

【详解】

解：Q $\begin{cases}a_6+a_5=4\\a_4+a_3-a_2-a_1=1\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a_5(1+q)=4\\a_3(1+q)-a_1(1+q)=1\end{cases}$，

$\therefore a_3\times\dfrac{4}{a_5}-a_1\times\dfrac{4}{a_5}=1$，$\therefore a_5=4(a_3-a_1)$，$\therefore q^4-4q^2+4=0$，

$\therefore(q^2-2)^2=0$，$\therefore q^2=2$，$\therefore q=\sqrt{2}$，$q^4=4$，

$\therefore a_1q^5+a_1q^4=4$，$\therefore(\sqrt{2}+1)a_1=1$，

$\therefore a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.

故答案为：$\sqrt{2}-1$.

【点睛】

本题考查等比数列的通项公式及应用，考查计算能力，属于基础题.

15．$\dfrac{1}{7}$

【解析】

作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数 $z=x-y$ 的最小值为 -2，确定出 m 的值，进而确定出 C