

专题 02 全等模型--半角模型

全等三角形在中考数学几何模块中占据着重要地位，也是学生必须掌握的一块内容，本专题就半角模型进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

模型 1.半角模型

【模型解读】

过等腰三角形顶点 两条射线, 使两条射线的夹角为等腰三角形顶角的一半这样的模型称为半角模型。

【常见模型及证法】

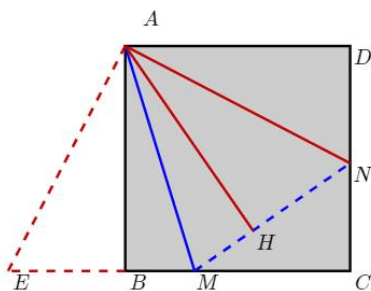


图 1

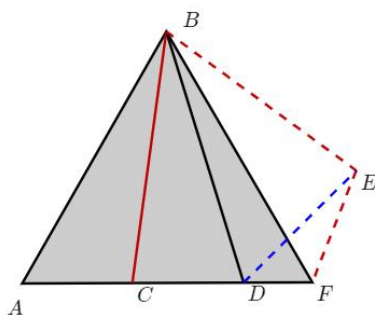
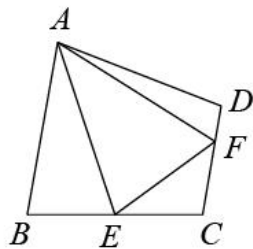


图2

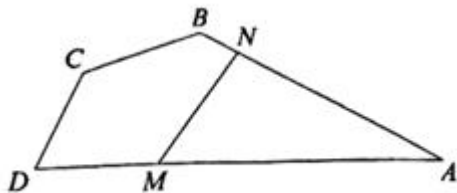
常见的图形为正方形，正三角形，等腰直角三角形等，解题思路一般是将半角两边的三角形通过旋转到一边合并成新的三角形，从而进行等量代换，然后证明与半角形成的三角形全等，再通过全等的性质得到线段之间的数量关系。半角模型（题中出现角度之间的半角关系）利用旋转——证全等——得到相关结论。

1. (2022·湖北十堰·中考真题) 【阅读材料】如图①, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, 点 E , F 分别在 BC , CD 上, 若 $\angle BAD = 2\angle EAF$, 则 $EF = BE + DF$.

【解决问题】如图②，在某公园的同一水平面上，四条道路围成四边形 $ABCD$ ．已知 $CD = CB = 100\text{m}$ ， $\angle D = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle BCD = 150^\circ$ ，道路 AD ， AB 上分别有景点 M ， N ，且 $DM = 100\text{m}$ ， $BN = 50(\sqrt{3} - 1)\text{m}$ ，若在 M ， N 之间修一条直路，则路线 $M \rightarrow N$ 的长比路线 $M \rightarrow A \rightarrow N$ 的长少 _____ m （结果取整数，参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.7$ ）．



图①

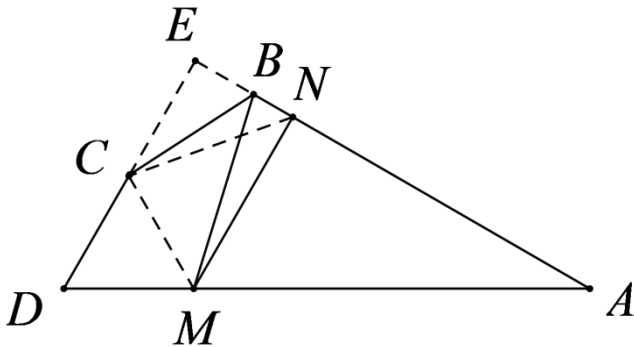


图②

【答案】 370

【分析】延长 AB, DC 交于点 E ，根据已知条件求得 $\angle E = 90^\circ$ ，进而根据含 30° 度角的直角三角形的性质，求得 EC, EB, AE, AD ，从而求得 $AN + AM$ 的长，根据材料可得 $MN = DM + BN$ ，即可求解。

【详解】解：如图，延长 AB, DC 交于点 E ，连接 CM, CN ，


$$\therefore \angle D = 60^\circ, \angle ABC = 120^\circ, \angle BCD = 150^\circ, \therefore \angle A = 30^\circ, \angle E = 90^\circ,$$

$\because DC = DM = 100 \therefore \triangle DCM$ 是等边三角形, $\therefore \angle DCM = 60^\circ, \therefore \angle BCM = 90^\circ,$

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $BC = 100$, $\angle ECB = 180^\circ - \angle BCD = 30^\circ$,

$$EB = \frac{1}{2}BC = 50, \quad EC = \sqrt{3}EB = 50\sqrt{3}, \quad \therefore DE = DC + EC = 100 + 50\sqrt{3},$$

Rt $\triangle ADE$ 中, $AD = 2DE = 200 + 100\sqrt{3}$, $AE = \sqrt{3}DE = 100\sqrt{3} + 150$,

$$\therefore AM = AD - DM = 200 + 100\sqrt{3} - 100 = 100 + 100\sqrt{3},$$

$$AN = AB - BN = (AE - EB) - BN = (100\sqrt{3} + 150 - 50) - 50(\sqrt{3} - 1) = 50\sqrt{3} + 150,$$

$$\therefore AM + AN = 100 + 100\sqrt{3} + 50\sqrt{3} + 150 = 250 + 150\sqrt{3}, \text{ Rt}\triangle CMB \text{ 中, } BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = 100\sqrt{2}$$

$$\therefore EN = EB + BN = 50 + 50(\sqrt{3} - 1) = 50\sqrt{3} = EC \quad \therefore \triangle ECN \text{ 是等腰直角三角形}$$

$$\therefore \angle NCM = \angle BCM - \angle NCB = \angle BCM - (\angle NCE - \angle BCE) = 75^\circ = \frac{1}{2} \angle DCB$$

由阅读材料可得 $MN = DM + BN = 100 + 50(\sqrt{3} - 1) = 50(\sqrt{3} + 1)$,

$\therefore$ 路线 $M \rightarrow N$ 的长比路线 $M \rightarrow A \rightarrow N$ 的长少 $250 + 150\sqrt{3} - 50(\sqrt{3} + 1) = 200 + 100\sqrt{3} \approx 370\text{m}$. 答案: 370.

【点睛】 本题考查了含 30° 角的直角三角形的性质，勾股定理，理解题意是解题的关键.

2. (2022·河北邢台·九年级期末) 学完旋转这一章, 老师给同学们出了这样一道题:

“如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, $\angle EAF = 45^\circ$, 求证: $EF = BE + DF$. ”

小明同学的思路: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AB=AD$, $\angle B=\angle ADC=90^\circ$.

把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转到 $\triangle ADE'$ 的位置, 然后证明 $\triangle AFE \cong \triangle AFE'$, 从而可得 $EF = E'F$.

$E'F = E'D + DF = BE + DF$, 从而使问题得证.

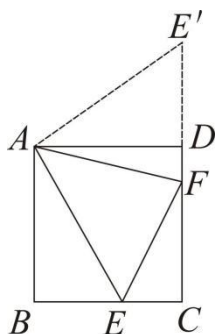


图1

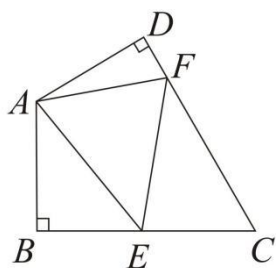


图2

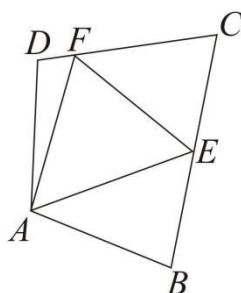


图3

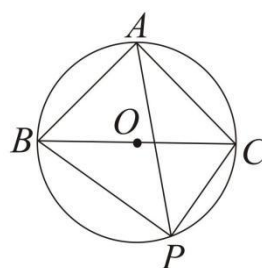


图4

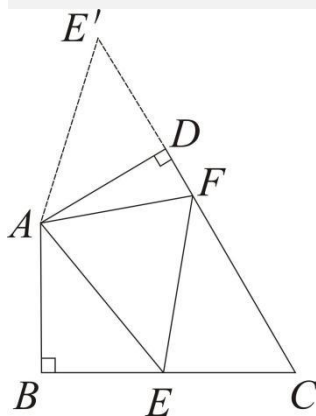
(1)【探究】请你参考小明的解题思路解决下面问题: 如图2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$, 直接写出 EF , BE , DF 之间的数量关系. (2)【应用】如图3, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$, 求证: $EF = BE + DF$. (3)【知识迁移】如图4, 四边形 $ABPC$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, BC 是直径, $AB = AC$, 请直接写出 $PB + PC$ 与 AP 的关系.

【答案】(1) $BE + DF = EF$ (2)证明见解(3) $PB + PC = \sqrt{2}PA$

【分析】(1) 将 $\triangle ABE$ 绕 A 点逆时针旋转, 旋转角等于 $\angle BAD$ 得 $\triangle ADE'$, 证明 $\triangle AEF \cong \triangle AE'F$, 等量代换即得结论; (2) 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转, 旋转角等于 $\angle BAD$, 先证明 $\angle EAF = \angle E'AF$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AE'F$, 等量代换即得结论; (3) 将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ACP'$, 先利用圆内接四边形的性质证明 P, C, P' 在同一直线上, 再证明 $\triangle PAP'$ 为等腰直角三角形, 等量代换即得结论.

(1) 解: 结论: $BE + DF = EF$, 理由如下:

证明: 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转, 旋转角等于 $\angle BAD$, 使得 AB 与 AD 重合, 点 E 转到点 E' 的位置, 如图所示,



可知 $\triangle ABE \cong \triangle ADE'$, $\therefore BE = DE'$.

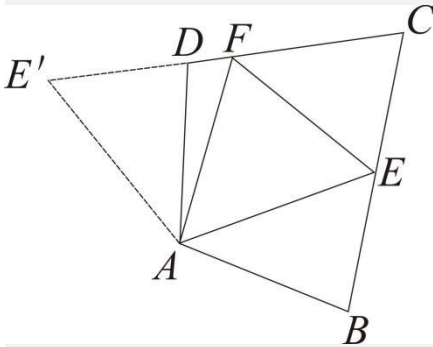
由 $\angle ADC + \angle ADE' = 180^\circ$ 知, C, D, E' 共线,

$$\because \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD, \therefore \angle BAF + \angle DAF = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle DAE' + \angle DAF = \angle EAF = \angle E'AF,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AE'F, \therefore EF = E'F = BE + DF.$$

(2) 证明: 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转, 旋转角等于 $\angle BAD$, 使得 AB 与 AD 重合, 点 E 转到点 E' 的位置, 如图所示,



由旋转可知 $\triangle ABE \cong \triangle ADE'$, $\therefore BE = DE'$, $\angle B = \angle ADE'$, $\angle BAE = \angle DAE'$, $AE = AE'$.

$\because \angle B + \angle ADC = 180^\circ$, $\therefore \angle ADC + \angle ADE' = 180^\circ$, $\therefore$ 点 C, D, E' 在同一条直线上.

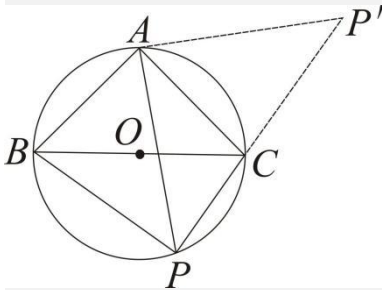
$$\because \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD, \therefore \angle BAE + \angle DAF = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DAE' + \angle DAF = \frac{1}{2} \angle BAD, \therefore \angle FAE' = \frac{1}{2} \angle BAD, \therefore \angle EAF = \angle FAE'.$$

$$\because AF = AF, \therefore \triangle FAE' \cong \triangle FAE, \therefore FE = FE', \text{ 即 } BE + DF = EF.$$

(3) 结论: $PB + PC = \sqrt{2}PA$, 理由如下:

证明: 将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ACP'$, 使得 AB 与 AC 重合, 如图所示,



由圆内接四边形性质得: $\angle ACP' + \angle ACP = 180^\circ$,

即 P, C, P' 在同一直线上. $\therefore BP = CP'$, $AP = AP'$,

$$\because BC \text{ 为直径}, \therefore \angle BAC = 90^\circ = \angle BAP + \angle PAC = \angle CAP' + \angle PAC = \angle PAP',$$

$$\therefore \triangle PAP' \text{ 为等腰直角三角形}, \therefore PP' = \sqrt{2}PA, \text{ 即 } PB + PC = \sqrt{2}PA.$$

【点睛】 本题考查了旋转与全等三角形的综合应用、直径所对的圆周角是直角、圆内接四边形的性质、等腰直角三角形的判定及性质等知识点. 解题关键是利用旋转构造全等三角形.

3. (2022·福建·龙岩九年级期中) (1) 【发现证明】

如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别是 BC, CD 边上的动点, 且 $\angle EAF = 45^\circ$, 求证: $EF = DF + BE$. 小明发现, 当把 $\triangle ABE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$, 使 AB 与 AD 重合时能够证明, 请你给出证明过程.

(2) 【类比引申】①如图 2, 在正方形 $ABCD$ 中, 如果点 E, F 分别是 CB, DC 延长线上的动点, 且 $\angle EAF = 45^\circ$, 则 (1) 中的结论还成立吗? 若不成立, 请写出 EF, BE, DF 之间的数量关系_____ (不要求证明)

②如图 3, 如果点 E, F 分别是 BC, CD 延长线上的动点, 且 $\angle EAF = 45^\circ$, 则 EF, BE, DF 之间的数量关系是_____ (不要求证明). (3) 【联想拓展】如图 1, 若正方形 $ABCD$ 的边长为 6, $AE = 3\sqrt{5}$, 求 AF 的长.

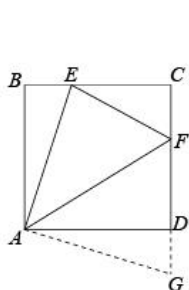


图1

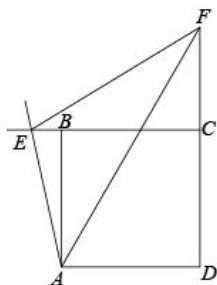


图2

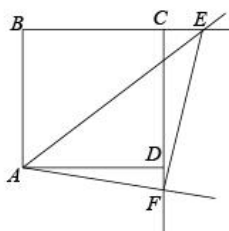


图3

【答案】 (1) 见解析; (2) ①不成立, 结论: $EF = DF - BE$; ② $BE = EF + DF$, 见解析; (3) $2\sqrt{10}$

【分析】 (1) 证明 $\triangle EAF \cong \triangle GAF$, 可得出 $EF = FG$, 则结论得证;

(2) ①将 $\triangle ABE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ADM$ 根据 SAS 可证明 $\triangle EAF \cong \triangle MAF$, 可得 $EF = FM$, 则结论得证; ②将 $\triangle ADF$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ABN$, 证明 $\triangle AFE \cong \triangle ANE$, 可得出 $EF = EN$, 则结论得证;

(3) 求出 $DG = 2$, 设 $DF = x$, 则 $EF = FG = x + 3$, $CF = 6 - x$, 在 $Rt\triangle EFC$ 中, 得出关于 x 的方程, 解出 x 则可得解.

【详解】 (1) 证明: 把 $\triangle ABE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$, 如图 1,

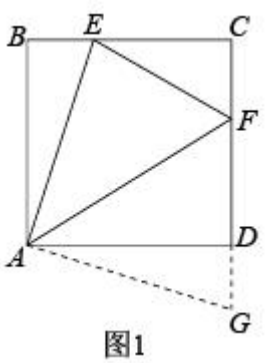


图1

$\therefore \angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$, $\angle B = \angle ADG = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADF + \angle ADG = 180^\circ$, $\therefore F, D, G$ 三点共线,

$\because \angle EAF = 45^\circ$, $\therefore \angle BAE + \angle FAD = 45^\circ$,

$\therefore \angle DAG + \angle FAD = 45^\circ$, $\therefore \angle EAF = \angle FAG$,

$\because AF = AF$, $\therefore \triangle EAF \cong \triangle GAF (SAS)$,

$\therefore EF = FG = DF + DG$, $\therefore EF = DF + BE$;

(2) ①不成立, 结论: $EF = DF - BE$;

证明: 如图 2, 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ADM$,

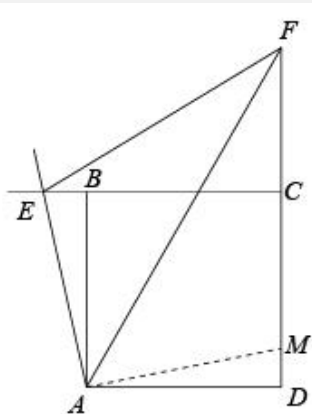


图2

$\therefore \angle EAB = \angle MAD$, $AE = AM$, $\angle EAM = 90^\circ$, $BE = DM$,

$\therefore \angle FAM = 45^\circ = \angle EAF$,

$\because AF = AF$, $\therefore \triangle EAF \cong \triangle MAF (SAS)$,

$\therefore EF = FM = DF - DM = DF - BE$;

②如图 3, 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ABN$,

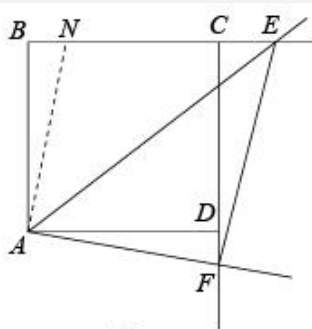


图3

$\therefore AN = AF$, $\angle NAF = 90^\circ$,

$\because \angle EAF = 45^\circ$, $\therefore \angle NAE = 45^\circ$, $\therefore \angle NAE = \angle FAE$,

$\because AE = AE$, $\therefore \triangle AFE \cong \triangle ANE (SAS)$, $\therefore EF = EN$,

$\therefore BE = BN + NE = DF + EF$.

即 $BE = EF + DF$. 故答案为: $BE = EF + DF$.

(3) 解: 由 (1) 可知 $AE = AG = 3\sqrt{5}$,

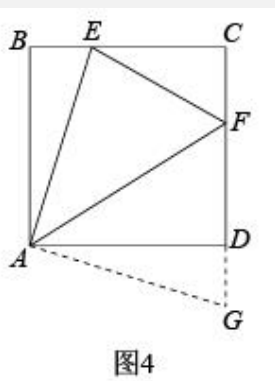


图4

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, $\therefore DC = BC = AD = 6$,

$\therefore DG = \sqrt{AG^2 - AD^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 6^2} = 3$.

$\therefore BE = DG = 3$, $\therefore CE = BC - BE = 6 - 3 = 3$,

设 $DF = x$, 则 $EF = FG = x + 3$, $CF = 6 - x$,

在 $Rt\triangle EFC$ 中, $\therefore CF^2 + CE^2 = EF^2$, $\therefore (6 - x)^2 + 3^2 = (x + 3)^2$,

解得: $x = 2$. $\therefore DF = 2$,

$\therefore AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

【点睛】 本题属于四边形综合题, 主要考查了正方形的性质、旋转的性质、全等三角形的判定与性质以及勾股定理的综合应用, 解题的关键是作辅助线构造全等三角形, 根据全等三角形的对应边相等进行推导.

4. (2022 · 山东省青岛第二十六中学九年级期中) 【模型引入】

当几何图形中, 两个共顶点的角所在角度是公共大角一半的关系, 我们称之为“半角模型”

【模型探究】 (1) 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是 AB 、 BC 边上的点, 且 $\angle EDF = 45^\circ$, 探究图中线段 EF , AE , FC 之间的数量关系.

【模型应用】 (2) 如图 2, 如果四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle EAF = 45^\circ$, 且 $BC = 7$, $DC = 13$, $CF = 5$, 求 BE 的长.

【拓展提高】 (3) 如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle ABC$ 与 $\angle ADC$ 互补, 点 E 、 F 分别在射线 CB 、 DC 上, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$. 当 $BC = 4$, $DC = 7$, $CF = 1$ 时, $\triangle CEF$ 的周长等于_____.

(4) 如图 4, 正方形 $ABCD$ 中, $\triangle AMN$ 的顶点 M 、 N 分别在 BC 、 CD 边上, $AH \perp MN$, 且 $AH = AB$, 连接 BD 分别交 AM 、 AN 于点 E 、 F , 若 $MH = 2$, $NH = 3$, $DF = 2\sqrt{2}$, 求 EF 的长.

(5) 如图 5, 已知菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, 点 E 、 F 分别是边 BC , CD 上的动点 (不与端点重合), 且

$\angle EAF=60^\circ$. 连接 BD 分别与边 AE 、 AF 交于 M 、 N , 当 $\angle DAF=15^\circ$ 时, 求证: $MN^2+DN^2=BM^2$.

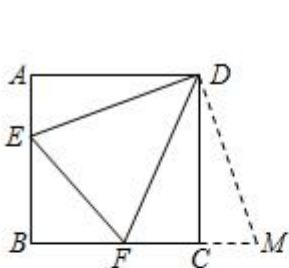


图1

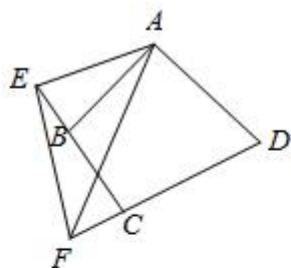


图2

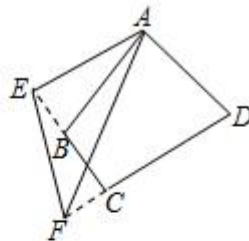


图3

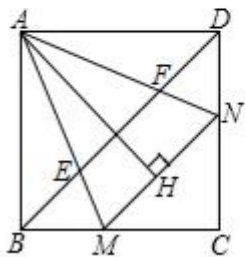


图4

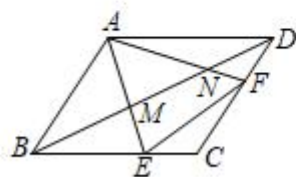


图5

【答案】(1) $EF=FC+AE$, 理由见解析; (2) $BE=5$; (3) 13; (4) $EF=\frac{5\sqrt{2}}{2}$; (5) 见解析

【分析】(1) 求证 $\triangle DEF \cong \triangle DMF$, 即可推出 EF 与 FM 的数量关系;

(2) 在 DC 上取一点 G , 使得 $DG=BE$, 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS), 推出 $AE=AG$, $\angle BAE=\angle DAG$, 证明 $\triangle AFE \cong \triangle AFG$ (SAS), 推出 $EF=FG$, 设 $BE=x$, 则 $CG=13-x$, $EF=FG=18-x$, 在 $Rt\triangle ECF$ 中, 根据 $EF^2=EC^2+CF^2$, 构建方程求出 x 即可解决问题;

(3) 证明 $\triangle ADM \cong \triangle ABE$ (SAS) 和 $\triangle EAF \cong \triangle MAF$, 即可求解;

(4) 先求出 BM , DN , 进而求出正方形的边长, 再判断出 $\angle EAF=45^\circ$, 借助探究的结论即可得出结论.

(5) 将 $\triangle ADF$ 绕 A 顺时针旋转 120° , AD 与 AB 重合, F 转到 G , 在 AG 上取 $AH=AN$, 连接 BH 、 MH , 利用 $\triangle ABH \cong \triangle ADN$ 和 $\triangle AMH \cong \triangle AMN$, 证明 $MN=MH$, $DN=BH$, 再证明 $\triangle BMH$ 为直角三角形即可.

【详解】(1) $EF=FC+AE$, 理由如下:

证明: 将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle DCM$, $\therefore \triangle DAE \cong \triangle DCM$,

$\therefore DE=DM$, $AE=CM$, $\angle ADE=\angle CDM$, B 、 C 、 M 三点共线,

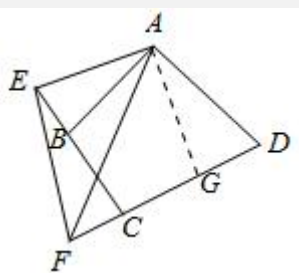
$\because \angle EDF=45^\circ$, $\therefore \angle ADE+\angle FDC=\angle CDM+\angle FDC=\angle MDF=45^\circ$,

在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle DMF$ 中,

$$\begin{cases} DE=DM \\ \angle EDF=\angle MDF=45^\circ, \therefore \triangle DEF \cong \triangle DMF \text{ (SAS)}, \therefore EF=FM \\ DF=DF \end{cases}$$

$\therefore EF=FM=FC+CM=FC+AE$;

(2) 解: 如图, 在 DC 上取一点 G , 使得 $DG=BE$,



$\because \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, $\therefore \angle ABC + \angle D = 180^\circ$, $\angle ABE + \angle ABC = 180^\circ$, $\therefore \angle ABE = \angle D$,

$\because AB = AD$, $BE = DG$, $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS), $\therefore AE = AG$, $\angle BAE = \angle DAG$,

$\because \angle EAF = 45^\circ$, $\therefore \angle EAB + \angle BAF = \angle DAG + \angle BAF = 45^\circ$,

$\because \angle BAD = 90^\circ$, $\therefore \angle FAG = \angle FAE = 45^\circ$,

$\because AE = AG$, $AF = AF$, $\therefore \triangle AFE \cong \triangle AFG$ (SAS), $\therefore EF = FG$,

设 $BE = x$, 则 $EC = EB + BC = x + 7$, $EF = FG = 18 - x$,

在 $Rt\triangle ECF$ 中, $\therefore EF^2 = EC^2 + CF^2$,

$\therefore 5^2 + (7+x)^2 = (18-x)^2$, $\therefore x = 5$, $\therefore BE = 5$;

(3) 解: 在 DF 上截取 $DM = BE$,

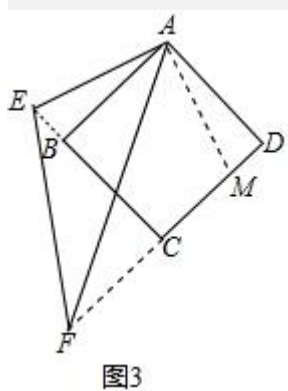


图3

$\because \angle D + \angle ABC = \angle ABE + \angle ABC = 180^\circ$, $\therefore \angle D = \angle ABE$,

$\because AD = AB$, $\therefore \triangle ADM \cong \triangle ABE$ (SAS), $\therefore AM = AE$, $\angle DAM = \angle BAE$;

$\because \angle EAF = \angle BAE + \angle BAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, $\therefore \angle MAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, $\therefore \angle EAF = \angle MAF$;

$\because AF$ 是 $\triangle EAF$ 与 $\triangle MAF$ 的公共边, $\therefore \triangle EAF \cong \triangle MAF$, $\therefore EF = MF$;

$\because MF = DF - DM = DF - BE$, $\therefore EF = DF - BE$.

$\therefore \triangle CEF$ 的周长 $= CE + EF + FC = BC + BE + DC + CF - BE + CF = BC + CD + 2CF = 13$, 故答案为: 13;

(4) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AB = AD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$,

$\because AH \perp MN$, $\therefore \angle AHM = \angle ABC = 90^\circ$, 在 $Rt\triangle AMB$ 和 $Rt\triangle AMH$ 中,

$$\begin{cases} AM = AM \\ AB = AH \end{cases}, \therefore Rt\triangle AMB \cong Rt\triangle AMH, \therefore \angle MAB = \angle MAH, BM = MH = 2,$$

同理可证 $Rt\triangle AND \cong Rt\triangle ANH$, $\therefore \angle NAD = \angle NAH$, $DN = NH = 3$,

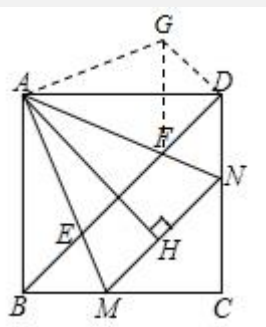
$$\therefore 2\angle MAH + 2\angle NAH = 90^\circ, \therefore \angle MAH + \angle NAH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MAN = 45^\circ. \text{ 设正方形的边长为 } a, \therefore CM = a - 2, CN = a - 3,$$

根据勾股定理得, $(a - 2)^2 + (a - 3)^2 = 25$,

$$\therefore a = -1 \text{ (舍)} \text{ 或 } a = 6, \therefore BC = 6, \therefore BD = 6\sqrt{2},$$

逆时针旋转 $\triangle ABE$ 至 $\triangle ADG$,



$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG, \therefore AE = AG, \angle ABE = \angle ADG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GDF = \angle ADG + \angle ADB = 90^\circ, \text{ 连接 } GF, \text{ 根据勾股定理得, } GF^2 = DG^2 + DF^2 = BE^2 + DF^2,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG, \therefore AE = AG, \angle BAE = \angle DAG,$$

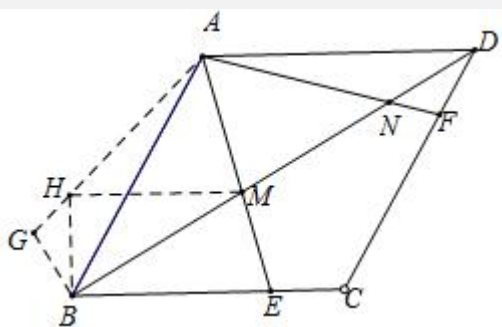
$$\therefore \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF = 90^\circ - \angle EAF = 45^\circ = \angle EAF,$$

$$\therefore AF = AF, \therefore \triangle GAF \cong \triangle EAF, \therefore GF = EF, \therefore EF^2 = BE^2 + AD^2;$$

$$\text{设 } EF = x, \therefore BD = 6\sqrt{2}, DF = 2\sqrt{2}, \therefore BE = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - x = 4\sqrt{2} - x,$$

$$\therefore (4\sqrt{2} - x)^2 + (2\sqrt{2})^2 = x^2, \text{ 解得 } x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \therefore EF = \frac{5\sqrt{2}}{2};$$

(3) 将 $\triangle ADF$ 绕 A 顺时针旋转 120° , 此时 AD 与 AB 重合, F 转到 G , 在 AG 上取 $AH = AN$, 连接 BH 、 MH , 如图:



$$\therefore \triangle ADF \text{ 绕 } A \text{ 顺时针旋转得 } \triangle ABG, \therefore \angle BAG = \angle DAF,$$

又 $AH=AN$, $AB=AD$, $\therefore \triangle ABH \cong \triangle ADN$ (SAS), $\therefore DN=BH$, $\angle ABH = \angle ADN$,
 $\because \angle B=60^\circ$, 且 $\angle EAF=60^\circ$, $\therefore \angle BAD=120^\circ$, $\therefore \angle DAF + \angle BAE = \angle EAF=60^\circ$,
 $\therefore \angle BAG + \angle BAE = \angle EAF$, 即 $\angle MAH = \angle MAN$, 而 $AH=AN$, $AM=AM$,
 $\therefore \triangle AMH \cong \triangle AMN$ (SAS), $\therefore MN=MH$, $\angle AMN = \angle AMH$,
 $\because$ 菱形 $ABCD$, $\angle B=60^\circ$, $\therefore \angle ABD = \angle ADB=30^\circ$, $\therefore \angle HBD = \angle ABH + \angle ABD=60^\circ$,
 $\because \angle DAF=15^\circ$, $\angle EAF=60^\circ$, $\therefore \triangle ADM$ 中, $\angle DAM = \angle AMD=75^\circ$, $\therefore \angle AMN = \angle AMH=75^\circ$,
 $\therefore \angle HMB=180^\circ - \angle AMN - \angle AMH=30^\circ$, $\therefore \angle BHM=90^\circ$, $\therefore BH^2 + MH^2 = BM^2$, $\therefore DN^2 + MN^2 = BM^2$.

【点睛】 本题是四边形综合题, 主要考查了旋转的性质、正方形的性质、等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理等知识, 解题关键是学会用旋转法添加辅助线, 构造全等三角形解决问题, 学会利用探究的结论解决新的问题, 属于中考压轴题.

课后专项训练:

1. (2022 · 重庆市育才中学二模) 回答问题

(1) **【初步探索】** 如图 1: 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $\angle B = \angle ADC=90^\circ$, E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点, 且 $EF=BE+FD$, 探究图中 $\angle BAE$ 、 $\angle FAD$ 、 $\angle EAF$ 之间的数量关系.

小王同学探究此问题的方法是: 延长 FD 到点 G , 使 $DG=BE$. 连接 AG , 先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出结论, 他的结论应是_____ ;

(2) **【灵活运用】** 如图 2, 若在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $\angle B + \angle D=180^\circ$. E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点, 且 $EF=BE+FD$, 上述结论是否仍然成立, 并说明理由;

(3) **【拓展延伸】** 知在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC + \angle ADC=180^\circ$, $AB=AD$, 若点 E 在 CB 的延长线上, 点 F 在 CD 的延长线上, 如图 3 所示, 仍然满足 $EF=BE+FD$, 请直接写出 $\angle EAF$ 与 $\angle DAB$ 的数量关系.

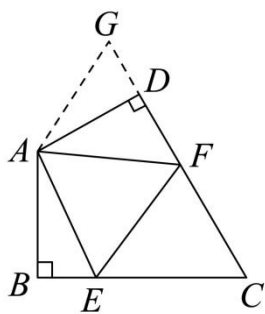


图1

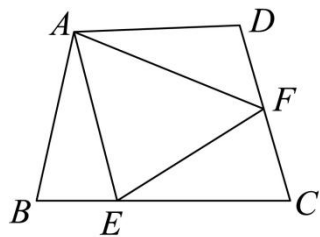


图2

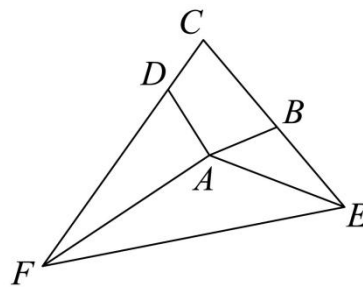


图3

【答案】(1) $\angle BAE + \angle FAD = \angle EAF$; (2) 仍成立, 理由见解析; (3) $\angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB$

【分析】(1) 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG , 可判定 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 进而得出 $\angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$, 再判定 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出 $\angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF$, 据此得出结论;

(2) 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG , 先判定 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 进而得出 $\angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$, 再判定 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出 $\angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF$;

(3) 在 DC 延长线上取一点 G , 使得 $DG = BE$, 连接 AG , 先判定 $\triangle ADG \cong \triangle ABE$, 再判定 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 得出 $\angle FAE = \angle FAG$, 最后根据 $\angle FAE + \angle FAG + \angle GAE = 360^\circ$, 推导得到 $2\angle FAE + \angle DAB = 360^\circ$, 即可得出结论.

【详解】解: (1) $\angle BAE + \angle FAD = \angle EAF$. 理由:

如图 1, 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG ,

$\because \angle B = \angle ADF = 90^\circ$, $\angle ADG = \angle ADF = 90^\circ$, $\therefore \angle B = \angle ADG = 90^\circ$,

又 $\because AB = AD$, $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS), $\therefore \angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$,

$\because EF = BE + FD = DG + FD = GF$, $AF = AF$, $\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF$ (SSS),

$\therefore \angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF$; 故答案为: $\angle BAE + \angle FAD = \angle EAF$;

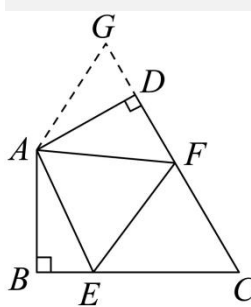


图1

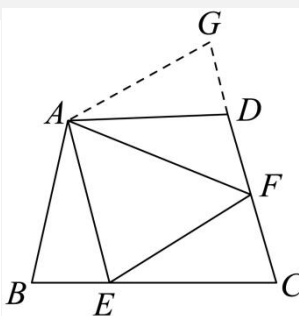


图2

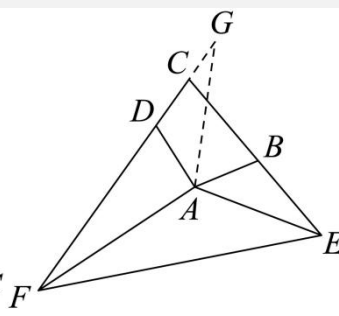


图3

(2) 仍成立, 理由: 如图 2, 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG ,

$\because \angle B + \angle ADF = 180^\circ$, $\angle ADG + \angle ADF = 180^\circ$, $\therefore \angle B = \angle ADG$,

又 $\because AB = AD$, $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS), $\therefore \angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$,

$\because EF=BE+FD=DG+FD=GF, AF=AF, \therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF$ (SSS),

$\therefore \angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF$;

(3) $\angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB$. 证明: 如图 3, 在 DC 延长线上取一点 G , 使得 $DG=BE$, 连接 AG ,

$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ, \angle ABC + \angle ABE = 180^\circ, \therefore \angle ADC = \angle ABE$,

又 $\because AB=AD, \therefore \triangle ADG \cong \triangle ABE$ (SAS), $\therefore AG=AE, \angle DAG = \angle BAE$,

$\because EF=BE+FD=DG+FD=GF, AF=AF, \therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF$ (SSS), $\therefore \angle FAE = \angle FAG$,

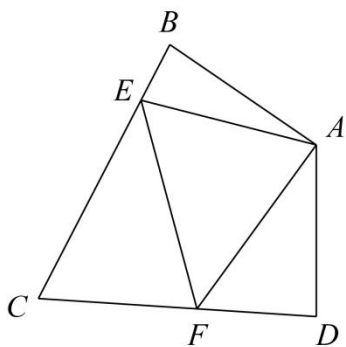
$\therefore \angle FAE + \angle FAG + \angle GAE = 360^\circ, \therefore 2\angle FAE + (\angle GAB + \angle BAE) = 360^\circ$,

$\therefore 2\angle FAE + (\angle GAB + \angle DAG) = 360^\circ$, 即 $2\angle FAE + \angle DAB = 360^\circ, \therefore \angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB$.

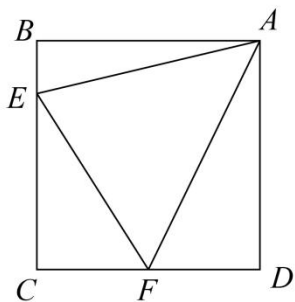
【点睛】 本题属于三角形综合题, 主要考查了全等三角形的判定以及全等三角形的性质的综合应用, 解决问题的关键是作辅助线构造全等三角形, 根据全等三角形的对应角相等进行推导变形. 解题时注意: 同角的补角相等.

2. (2022·江西九江·一模) 如图 (1), 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B + \angle D = 180^\circ, AB = AD$, 以点 A 为顶点作 $\angle EAF$, 且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, 连接 EF . (1) 观察猜想 如图 (2), 当 $\angle BAD = \angle B = \angle D = 90^\circ$ 时,

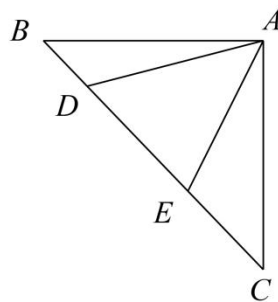
① 四边形 $ABCD$ 是_____ (填特殊四边形的名称); ② BE, DF, EF 之间的数量关系为_____. (2) 类比探究 如图 (1), 线段 BE, DF, EF 之间的数量关系是否仍然成立? 若成立, 请加以证明; 若不成立, 请说明理由. (3) 解决问题 如图 (3), 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 4$, 点 D, E 均在边 BC 上, 且 $\angle DAE = 45^\circ$, 若 $BD = \sqrt{2}$, 求 DE 的长.



(图 1)



(图 2)



(图 3)

【答案】 (1) ① 正方形; ② $BE + DF = EF$ (2) 详见解析 (3) 详见解析

【分析】 (1) ① 根据正方形的判定定理即可得出;

② 延长 CD 至点 G , 使得 $DG=BE$, 证得 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 得出 $AE = AG$, 由 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, 证得 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$,

从而得出 BE, DF, EF 之间的数量关系; (2) 同 (1) ②即可得出 BE, DF, EF 之间的数量关系; (3) 作 $CM \perp BC$, 且 $CM = BD$, 证得 $\triangle ABD \cong \triangle ACM$, 同 (1) ②证得 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 在 $Rt\triangle ECM$ 中, 由勾股定理可解得 DE 的长.

(1) 解: ① $\because \angle BAD = \angle B = \angle D = 90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 又 $\because AB = AD$, $\therefore$ 矩形 $ABCD$ 是正方形.

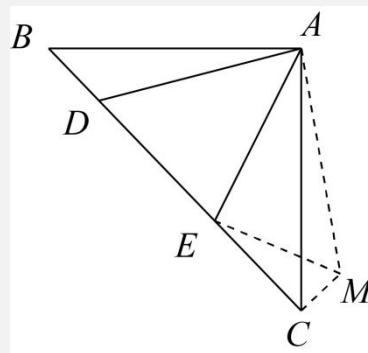
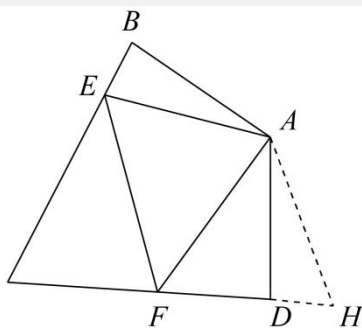
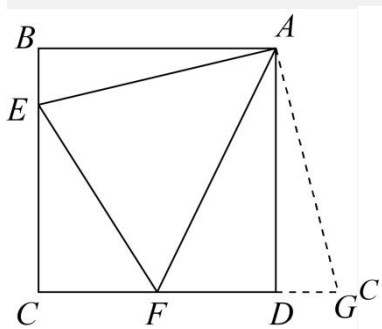
②如下图, 延长 CD 至点 G , 使得 $DG = BE$,

$\because AB = AD$, $\angle ADG = \angle ADF = 90^\circ$, $\therefore \angle ADG = \angle B$, $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$,

$\therefore AE = AG$, $BE = DG$, $\angle BAE = \angle DAG$, $\because \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, $\therefore \angle BAE + \angle DAF = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$,

$\therefore \angle DAG + \angle DAF = \angle EAF$, 即 $\angle EAF = \angle GAF$,

又 $\because AF = AF$, $\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF$, $\therefore EF = FG$, 即 $FD + DG = EF \therefore BE + FD = EF$.



(2) 如下图, 延长 CD 至点 H , 使得 $DH = BE$, $\because \angle B + \angle ADF = 180^\circ$, $\therefore \angle B = \angle ADH$,

同 (1) ②的证明方法得 $\triangle ABE \cong \triangle ADH$, 同理证 $\triangle AEF \cong \triangle AHF$, 从而得 $BE + FD = EF$.

(3) 如图过点 C 作 $CM \perp BC$, 且 $CM = BD$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle ACB = 45^\circ$, $\therefore \angle B = \angle ACM = 45^\circ$, $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACM$,

同 (1) ②的证明方法得 $\triangle ADE \cong \triangle AME$, $\therefore DE = ME$,

$\because BD = \sqrt{2}$, $AB = AC = 4$, $CM = BD = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$,

设 $DE = ME = x$, 则 $CE = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} - x = 3\sqrt{2} - x$,

在 $Rt\triangle ECM$ 中, 由勾股定理得, $EC^2 + MC^2 = EM^2$, $(\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2} - x)^2 = x^2$, 解得 $x = \frac{5\sqrt{2}}{3}$, 即 $DE = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】本题考查了特殊的平行四边形的判定、全等三角形的性质和判定及勾股定理的应用, 熟练应用相关定理和性质是解决本题的关键.

3. (2022·山东聊城·九年级期末) (1) 如图1, 点 E, F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 上, $\angle EAF = 45^\circ$, 连接 EF , 求证: $EF = BE + DF$, 试说明理由.

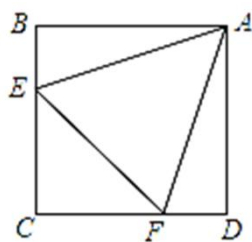


图1

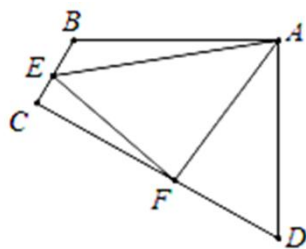


图2

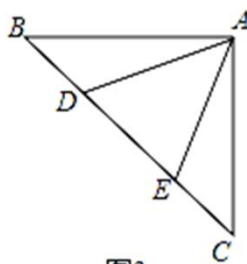


图3

(2) 类比引申: 如图2, 四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle BAD = 90^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, $\angle EAF = 45^\circ$, 若 $\angle B, \angle D$ 都不是直角, 则当 $\angle B$ 与 $\angle D$ 满足等量关系_____时, 仍有 $EF = BE + DF$, 试说明理由.

(3) 联想拓展: 如图3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D, E 均在边 BC 上, 且 $\angle DAE = 45^\circ$, 若 $BD = 1$, $EC = 2$, 求 DE 的长.

【答案】(1) 见解析, (2) $\angle B + \angle D = 180^\circ$, 理由见解析; (3) $\sqrt{5}$

【分析】(1) 把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$, 可使 AB 与 AD 重合, 证出 $\triangle AFG \cong \triangle AFE$, 根据全等三角形的性质得出 $EF = FG$, 即可得出答案; (2) 把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$, 可使 AB 与 AD 重合, 证出 $\triangle AFE \cong \triangle AFG$, 根据全等三角形的性质得出 $EF = FG$, 即可得出答案; (3) 把 $\triangle ACE$ 旋转到 $\triangle ABF$ 的位置, 连接 DF , 证明 $\triangle AFE \cong \triangle AFG$ (SAS) $EF = FG$, 则 $\angle C = \angle ABF = 45^\circ$, $\triangle BDF$ 是直角三角形, 根据勾股定理即可得出答案.

【详解】(1) 证明: 如图1中,

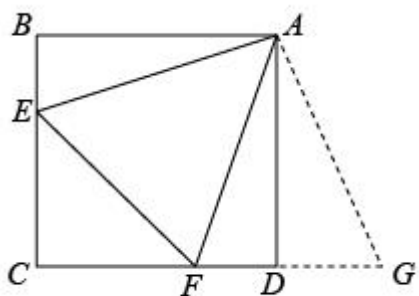


图1

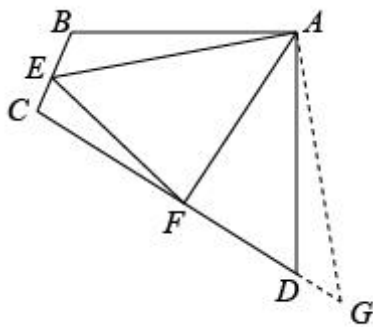


图2

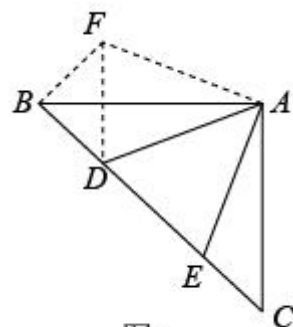


图3

$\because AB = AD$, $\therefore$ 把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$, AB 与 AD 重合.

$\angle ADC = \angle B = 90^\circ$, $\angle FDG = 180^\circ$, 点 F, D, G 三点共线,

则 $\angle DAG = \angle BAE$, $AE = AG$,

$\angle FAG = \angle FAD + \angle GAD = \angle FAD + \angle BAE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle EAF$ 即 $\angle EAF = \angle FAG$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/587130200152006043>