2024 届北京市海淀区北京医学院附属中学高考数学二模试卷

注意事项:
1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2．答题时请按要求用笔。
3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若函数 $f\left(x\right)=x^2+2x-m\cos\left(x+1\right)+m^2+3m-7$ 有且仅有一个零点，则实数 m 的值为（　　）

A．$\frac{-3-\sqrt{37}}{2}$　　B．$\frac{-3+\sqrt{37}}{2}$　　C．-4　　D．2

2．已知直线 $y=k$（$x-1$）与抛物线 C：$y^2=4x$ 交于 A，B 两点，直线 $y=2k$（$x-2$）与抛物线 D：$y^2=8x$ 交于 M，N 两点，设 $\lambda=|AB|-2|MN|$，则（　　）

A．$\lambda<-16$　　B．$\lambda=-16$　　C．$-12<\lambda<0$　　D．$\lambda=-12$

3．已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3+x^2(a>0)$．若存在实数 $x_0\in(-1,0)$，且 $x_0\neq-\frac{1}{2}$，使得 $f(x_0)=f(-\frac{1}{2})$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(\frac{2}{3},5)$　　B．$(\frac{2}{3},3)\cup(3,5)$　　C．$(\frac{18}{7},6)$　　D．$(\frac{18}{7},4)\cup(4,6)$

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3+x^2,x<1\\ \frac{a\ln x}{x(x+1)},x\geq1\end{cases}$，若曲线 $y=f(x)$ 上始终存在两点 A，B，使得 $OA\perp OB$，且 AB 的中点在 y 轴上，则正实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$　　C．$\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　D．$[\mathrm{e},+\infty)$

5．在 ΔABC 中，D 为 AC 的中点，E 为 AB 上靠近点 B 的三等分点，且 BD，CE 相交于点 P，则 $\overrightarrow{AP}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

C．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

6．如图 1，《九章算术》中记载了一个“折竹抵地”问题:今有竹高一丈,末折抵地,去本三尺，问折者高几何？意思是:有一根竹子，原高一丈（1 丈=10 尺），现被风折断，尖端落在地上，竹尖与竹根的距离三尺，问折断处离地面的高为（　　）尺.



A．5.45　　B．4.55　　C．4.2　　D．5.8

7．若集合A=$\{x\,|\,|x|\le 2,\ x\in R\}$，B=$\{y\,|\,y=-x^2,\ x\in R\}$，则A$\cap$B=（　）

A．$\{x\,|\,0\le x\le 2\}$　　B．$\{x\,|\,x\le 2\}$　　C．$\{x\,|\,-2\le x\le 0\}$　　D．$\varnothing$

8．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的一条渐近线方程为$y=\frac{4}{3}x$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{5}{3}$　　C．$\frac{5}{4}$　　D．$\frac{3}{2}$

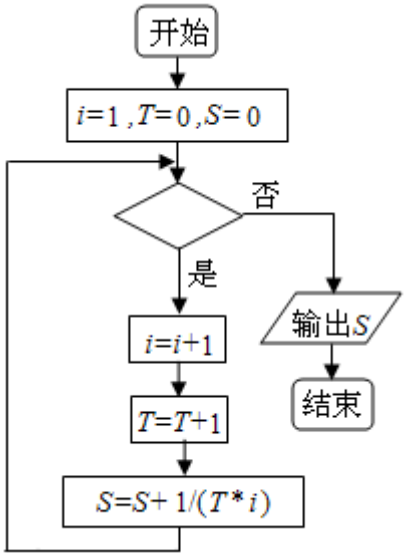
9．已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},x<0\\ \frac{\ln x}{x},x>0\end{cases}$，若函数$F(x)=f(x)-kx$在$R$上有3个零点，则实数$k$的取值范围为（　　）

A．$(0,\frac{1}{e})$　　B．$(0,\frac{1}{2e})$　　C．$(-\infty,\frac{1}{2e})$　　D．$(\frac{1}{2e},\frac{1}{e})$

10．等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{8},q=2$，则a_4与a_8的等比中项是（　）

A．±4　　B．4　　C．$\pm\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{4}$

11．一个算法的程序框图如图所示，若该程序输出的结果是$\frac{3}{4}$，则判断框中应填入的条件是（　　）



A．$i>5?$　　B．$i<5?$　　C．$i>4?$　　D．$i<4?$

12.已知函数 $f(x)=m(x-1)-(x-2)e^{x-e}$（*e* 为自然对数底数），若关于 *x* 的不等式 $f\left(x\right)>0$ 有且只有一个正整数解，则实数 *m* 的最大值为（　　）

A．$\frac{e^3+e}{2}$　　B．$\frac{e^2+e}{2}$　　C．$\frac{e^3-e}{2}$　　D．$\frac{e^2-e}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知 $\int_0^2 x^3dx=n$，则 $(x+y+1)^n$ 展开式中 x^2y 的系数为__

14．已知抛物线 *C*：$y^2=4x$ 的焦点为 *F*，准线为 *l*，*P* 为 *C* 上一点，*PQ* 垂直 *l* 于点 *Q*，*M*，*N* 分别为 *PQ*，*PF* 的中点，*MN* 与 *x* 轴相交于点 *R*，若∠*NRF*=60°，则|*FR*|等于_____.

15.有 2 名老师和 3 名同学，将他们随机地排成一行，用 ξ 表示两名老师之间的学生人数，则 $\xi=1$ 对应的排法有_____种；$E\left(\xi\right)=$ _____；

16．已知等边三角形 ABC 的边长为 1．$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，点 N、T 分别为线段 BC、CA 上的动点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{NT}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MN}$ 取值的集合为_____.

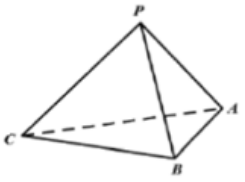
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）对于给定的正整数 *k*，若各项均不为 0 的数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n-k}\cdot a_{n-k+1}\cdots a_{n-1}\cdot a_{n+1}\cdots a_{n+k-1}\cdot a_{n+k}=\left(a_n\right)^{2k}$ 对任意正整数 $n(n>k)$ 总成立，则称数列 $\{a_n\}$ 是“$Q(k)$ 数列”.

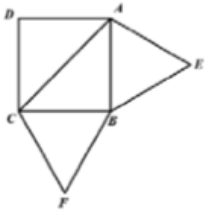
（1）证明：等比数列 $\{a_n\}$ 是“$Q(3)$ 数列”；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 既是“$Q(2)$ 数列”又是“$Q(3)$ 数列”，证明：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

18．（12 分）已知三棱锥 *P-ABC*（如图一）的平面展开图（如图二）中，四边形 *ABCD* 为边长等于 $\sqrt{2}$ 的正方形，$\triangle ABE$ 和 $\vee BCF$ 均为正三角形，在三棱锥 *P-ABC* 中：



图一



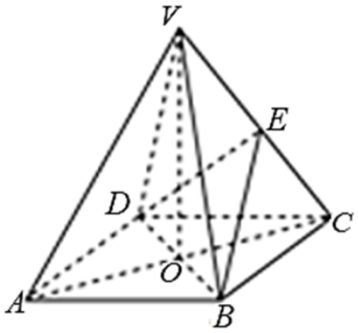
图二

（1）证明：平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

（2）若点 *M* 在棱 *PA* 上运动，当直线 BM 与平面 *PAC* 所成的角最大时，求直线 *MA* 与平面 *MBC* 所成角的正弦值.

19．（12 分）如图，四棱锥 *V*－ *ABCD* 中，底面 *ABCD* 是菱形，对角线 *AC* 与 *BD* 交于点 *O*，*VO*⊥平面 *ABCD*，*E* 是棱

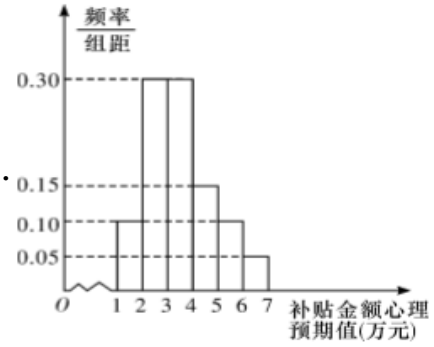
VC 的中点.



（1）求证：*VA*∥平面 *BDE*；

（2）求证：平面 *VAC*⊥平面 *BDE*.

20.（12 分）购买一辆某品牌新能源汽车，在行驶三年后，政府将给予适当金额的购车补贴.某调研机构对拟购买该品牌汽车的消费者，就购车补贴金额的心理预期值进行了抽样调查，其样本频率分布直方图如图所示



（1）估计拟购买该品牌汽车的消费群体对购车补贴金额的心理预期值的方差（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（2）将频率视为概率，从拟购买该品牌汽车的消费群体中随机抽取 4 人，记对购车补贴金额的心理预期值高于 3 万元的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（3）统计最近 5 个月该品牌汽车的市场销售量，得其频数分布表如下：

月份	2018.11	2018.12	2019.01	2019.02	2019.03
销售量（万辆）	0.5	0.6	1.0	1.4	1.7

试预计该品牌汽车在 2019 年 4 月份的销售量约为多少万辆？

附：对于一组样本数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$

的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

21.（12 分）已知曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$.以极点为平面直角坐标系的原点,极轴为 x 轴的正半轴,建立平面直角坐标系,直线 l 的参数方程是: $\begin{cases}x=m+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 是参数）.

（1）若直线 l 与曲线 C 相交于 A、B 两点,且 $|AB|=\sqrt{14}$,试求实数 m 值.

（2）设 $M(x,y)$ 为曲线 C 上任意一点，求 $x+2y$ 的取值范围.

22.（10 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+(1-a)x-\ln x, a\in R$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $a\in(-\infty,1)$，设 $g(x)=xe^x-x-\ln x+a$，证明：$\forall x_1\in(0,2]$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使 $f(x_1)-g(x_2)>2-\ln 2$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

推导出函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，由题意得出 $f(-1)=0$，进而可求得实数 m 的值，并对 m 的值进行检验，即可得出结果.

【详解】

Q $f(x)=(x+1)^2-m\cos(x+1)+m^2+3m-8$，

则 $f(-1+x)=(-1+x+1)^2-m\cos(-1+x+1)+m^2+3m-8=x^2-m\cos x+m^2+3m-8$，

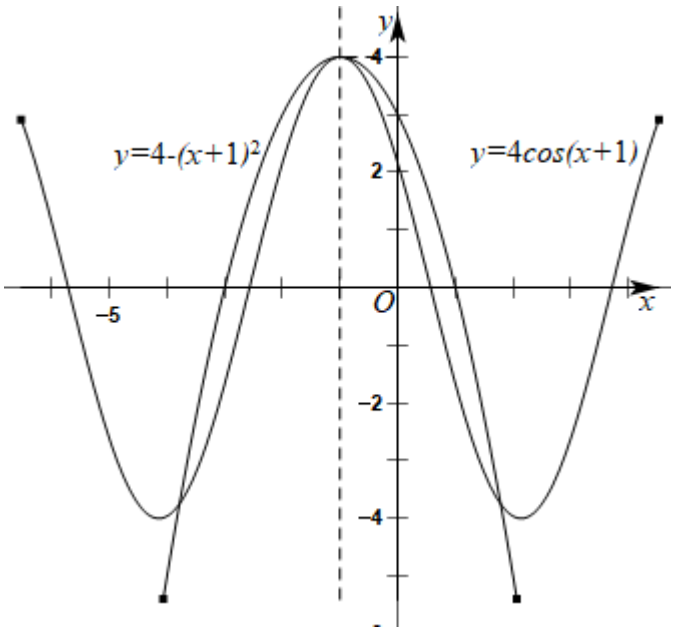
$f\left(-1-x\right)=\left(-1-x+1\right)^2-m\cos\left(-1-x+1\right)+m^2+3m-8=x^2-m\cos x+m^2+3m-8$，

$\therefore f\left(-1+x\right)=f\left(-1-x\right)$，所以，函数$y=f\left(x\right)$的图象关于直线$x=-1$对称.

若函数$y=f\left(x\right)$的零点不为$x=-1$，则该函数的零点必成对出现，不合题意.

所以，$f\left(-1\right)=0$，即$m^2+2m-8=0$，解得$m=-4$或2.

①当$m=-4$时，令$f\left(x\right)=\left(x+1\right)^2-4\cos\left(x+1\right)-4=0$，得$4\cos\left(x+1\right)=4-\left(x+1\right)^2$，作出函数$y=4\cos\left(x+1\right)$与函数$y=4-\left(x+1\right)^2$的图象如下图所示：



此时，函数$y=4\cos\left(x+1\right)$与函数$y=4-\left(x+1\right)^2$的图象有三个交点，不合乎题意；

②当$m=2$时，$\because\cos\left(x+1\right)\le1$，$\therefore f\left(x\right)=\left(x+1\right)^2-2\cos\left(x+1\right)+2\ge0$，当且仅当$x=-1$时，等号成立，则函数$y=f\left(x\right)$有且只有一个零点.

综上所述，$m=2$.

故选：D.

【点睛】

本题考查利用函数的零点个数求参数，考查函数图象对称性的应用，解答的关键就是推导出$f\left(-1\right)=0$，在求出参数后要对参数的值进行检验，考查分析问题和解决问题的能力，属于中等题.

2、D

【解析】

分别联立直线与抛物线的方程，利用韦达定理，可得$\left|AB\right|=4+\frac{4}{k^2}$，$\left|AB\right|=4+\frac{4}{k^2}$，然后计算，可得结果.

【详解】

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$

则 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=2+\frac{4}{k^2}$，

因为直线 $y=k(x-1)$ 经过 C 的焦点，

所以 $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}$.

同理可得 $|MN|=8+\frac{2}{k^2}$，

所以 $\lambda=4-16=-12$

故选：*D*.

【点睛】

本题考查的是直线与抛物线的交点问题，运用抛物线的焦点弦求参数，属基础题。

3、D

【解析】

首先对函数求导，利用导数的符号分析函数的单调性和函数的极值，根据题意，列出参数所满足的不等关系，求得结果.

【详解】

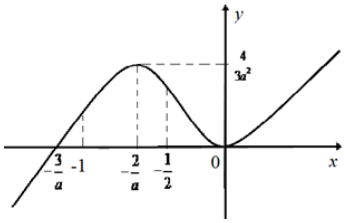
$f'(x)=ax^2+2x$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$， $x_2=-\frac{2}{a}$.

其单调性及极值情况如下：

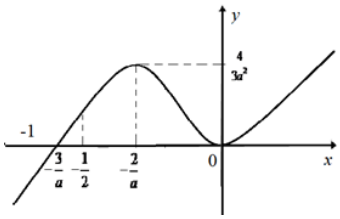
x	$\left(-\infty,-\frac{2}{a}\right)$	$-\frac{2}{a}$	$\left(-\frac{2}{a},0\right)$	**0**	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	**0**	_	**0**	+
$f(x)$	Z	极大值	]	极小值	Z

若存在 $x_0\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$，使得 $f(x_0)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，

则$\begin{cases} -\frac{2}{a}<-\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{a}>-1 \\ f(-1)<f\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$（如图 1）或$-\frac{3}{a}<-\frac{1}{2}<-\frac{2}{a}$（如图 2）.



（图 1）



（图 2）

于是可得$a\in\left(\frac{18}{7},4\right)\cup(4,6)$，

故选：D.

【点睛】

该题考查的是有关根据函数值的关系求参数的取值范围的问题，涉及到的知识点有利用导数研究函数的单调性与极值，画出图象数形结合，属于较难题目.

4、D

【解析】

根据AB中点在y轴上，设出A,B两点的坐标$A\left(-t,t^3+t^2\right)$，$B(t,f(t))$，（$t>0$）.对t分成$t\langle 1,t=1,t\rangle 1$三类，利用$OA\perp OB$则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，列方程，化简后求得$a=\frac{t}{\ln t}$，利用导数求得$\frac{t}{\ln t}$的值域，由此求得$a$的取值范围.

【详解】

根据条件可知A，B两点的横坐标互为相反数，不妨设$A\left(-t,t^3+t^2\right)$，$B(t,f(t))$，（$t>0$），若$t<1$，则$f(t)=-t^3+t^2$，由$OA\perp OB$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即$-t^2+\left(t^3+t^2\right)\left(-t^3+t^2\right)=0$，方程无解；若$t=1$，显然不满足$OA\perp OB$；若$t>1$，则$f(t)=\frac{a\ln t}{t(t+1)}$，由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即$-t^2+\left(t^3+t^2\right)\frac{a\ln t}{t(t+1)}=0$，即$a=\frac{t}{\ln t}$，因为

$\left(\frac{t}{\ln t}\right)'=\frac{\ln t-1}{(\ln t)^2}$，所以函数$\frac{t}{\ln t}$在$(0,\mathrm{e})$上递减，在$(\mathrm{e},+\infty)$上递增，故在$t=\mathrm{e}$处取得极小值也即是最小值$\frac{\mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}}=e$，

所以函数$y=\frac{t}{\ln t}$在$(1+\infty)$上的值域为$[e,+\infty)$，故$a\in[\mathrm{e},+\infty)$.故选 **D.**

【点睛】

本小题主要考查平面平面向量数量积为零的坐标表示，考查化归与转化的数学思想方法，考查利用导数研究函数的最小值，考查分析与运算能力，属于较难的题目.

5、B

【解析】

设$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{3x}{2}\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$，

由 ***B*，*P*，*D*** 三点共线，***C*，*P*，*E*** 三点共线,可知$x+2y=1$，$\frac{3x}{2}+y=1$,解得x,y即可得出结果.

【详解】

设$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{3x}{2}\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$，

因为 ***B*，*P*，*D*** 三点共线，***C*，*P*，*E*** 三点共线，

所以$x+2y=1$，$\frac{3x}{2}+y=1$，所以$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$.

故选:B.

【点睛】

本题考查了平面向量基本定理和向量共线定理的简单应用,属于基础题.

6、B

【解析】



如图，已知$AC+AB=10$，$BC=3$，$AB^2-AC^2=BC^2=9$

$\therefore(AB+AC)(AB-AC)=9$，解得$AB-AC=0.9$，

$\therefore\begin{cases}AB+AC=10\\AB-AC=0.9\end{cases}$，解得$\begin{cases}AB=5.45\\AC=4.55\end{cases}$.

∴折断后的竹干高为 4.55 尺

故选 B.

7、C

【解析】

试题分析：化简集合$A=[-2,2],\ B=(-\infty,0],\therefore A\cap B=[-2,0]$

故选 C.

考点：集合的运算.

8、B

【解析】

由题意得出$\frac{b^2}{a^2}$的值，进而利用离心率公式$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$可求得该双曲线的离心率.

【详解】

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，由题意可得$\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$，

因此，该双曲线的离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用双曲线的渐近线方程求双曲线的离心率，利用公式$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$计算较为方便，考查计算能力，属于基础题.

9、B

【解析】

根据分段函数，分当$x<0$，$x>0$，将问题转化为$k=\frac{f(x)}{x}$的零点问题，用数形结合的方法研究.

【详解】

当$x<0$时，$k=\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x^2}$，令$g(x)=\frac{1}{x^2},g'(x)=-\frac{2}{x^3}>0$，$g(x)$在$x\in(-\infty,0)$是增函数，$k>0$时，$k=\frac{f(x)}{x}$有一个零点，

当$x>0$时，$k=\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x^2}$，令$h(x)=\frac{\ln x}{x^2},h'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$

当$x\in(0,\sqrt{e})$时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$在$(0,\sqrt{e})$上单调递增，

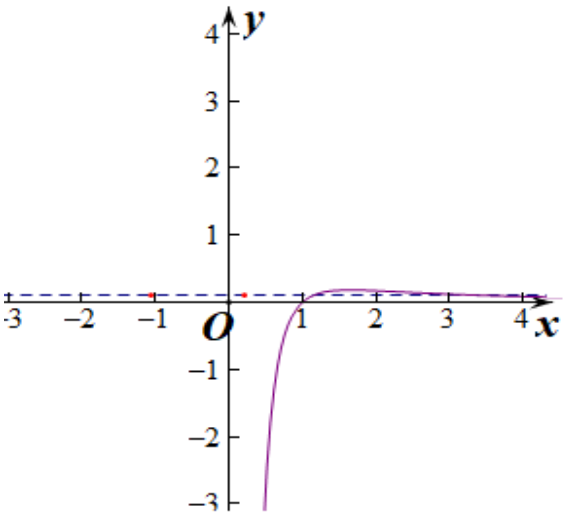
当$x\in(\sqrt{e},+\infty)$时，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)$在$(\sqrt{e},+\infty)$上单调递减，

所以当 $x=\sqrt{e}$ 时，$h(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{2e}$，

因为 $F(x)=f(x)-kx$ 在 R 上有 3 个零点，

所以当 $x>0$ 时，$k=\frac{f(x)}{x}$ 有 2 个零点，

如图所示：



所以实数 k 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2e})$

综上可得实数 k 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2e})$，

故选：B

【点睛】

本题主要考查了函数的零点问题，还考查了数形结合的思想和转化问题的能力，属于中档题.

10、A

【解析】

利用等比数列 $\{a_n\}$ 的性质可得 $a_6^2=a_4a_8$ ，即可得出.

【详解】

设 a_4 与 a_8 的等比中项是 x .

由等比数列 $\{a_n\}$ 的性质可得 $a_6^2=a_4a_8$，$\therefore x=\pm a_6$.

$\therefore a_4$ 与 a_8 的等比中项 $x=\pm a_6=\pm\frac{1}{8}\times 2^5=\pm 4.$

故选 A.

【点睛】

本题考查了等比中项的求法，属于基础题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/588004073054006052