

## 专题 11 反比例函数及其应用 (10 个高频考点) (举一反三)

### 三)

#### 高频考点

【考点 1 反比例函数的定义】 .....	1
【考点 2 反比例函数的图象】 .....	4
【考点 3 反比例函数图象的对称性】 .....	8
【考点 4 反比例函数的性质】 .....	11
【考点 5 反比例函数系数 $k$ 的几何意义】 .....	13
【考点 6 反比例函数图象上点的坐标特征】 .....	17
【考点 7 待定系数法求反比例函数解析式】 .....	21
【考点 8 反比例函数与一次函数的综合】 .....	27
【考点 9 实际问题与反比例函数】 .....	33
【考点 10 反比例函数与几何综合】 .....	39

#### 举一反三

##### 【要点 1 反比例函数的定义】

一般的,形如  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  为常数,  $k \neq 0$ ) 的函数,叫做反比例函数。其中  $x$  是自变量,  $y$  是函数。

自变量  $x$  的取值范围是不等于 0 的一切实数

##### 【要点 2 反比例函数的解析式】

1、 $y = \frac{k}{x}$ ;      2、 $y = kx^{-1}$ ;      3、 $xy = k$

##### 【考点 1 反比例函数的定义】

【例 1】(2022·浙江·校考三模) 图像经过点(1, 2)的反比例函数是 ( )

A.  $y = -\frac{2}{x}$       B.  $y = \frac{2}{x}$       C.  $y = \frac{1}{2x}$       D.  $y = 2x$

【答案】B

【分析】将  $x = 1$  代入到 A、B、C 函数关系式中求出  $y$  值即可找出答案, D 中  $y = 2x$  是正比例函数, 不用考虑.

【详解】解: 观察四个选项, A、B、C 是反比例函数, D 是正比例函数, 将  $x = 1$  代入到 A、B、C 函数关系式中, 只有 B 选项中  $y = 2$ , 故正确答案为: B.

**【点睛】** 本题考查反比例函数上的点，熟练掌握反比例函数的定义是解题关键.

**【变式 1-1】** (2022·辽宁抚顺·统考二模) 下列函数中,  $y$  是  $x$  的反比例函数的是 ( )

- A.  $y = -\frac{x}{2}$                       B.  $y = \frac{1}{x^2}$                       C.  $y = \frac{1}{3}x$                       D.  $y = -\frac{1}{2x}$

**【答案】** D

**【分析】** 根据反比例函数的定义即形如  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  是常数, 且  $k \neq 0$ ) 的函数, 对各选项进行判断即可.

**【详解】** A 选项中函数是正比例函数, 故不符合题意;

B 选项中函数不是反比例函数, 故不符合题意;

C 选项中函数是正比例函数, 故不符合题意;

D 选项中函数符合反比例函数的定义, 故符合题意;

故选: D.

**【点睛】** 本题考查了反比例函数的定义. 解题的关键在于对反比例定义与形式的熟练掌握与灵活运用.

**【变式 1-2】** (2022·北京石景山·统考一模) 下列两个变量之间的关系为反比例关系的是 ( )

- A. 圆的周长与其半径的关系  
B. 平行四边形面积一定时, 其一边长与这边上的高的关系  
C. 销售单价一定时, 销售总价与销售数量的关系  
D. 汽车匀速行驶过程中, 行驶路程与行驶时间的关系

**【答案】** B

**【分析】** 判断两个相关联的量之间成什么比例, 就看这两个量是对应的比值一定, 还是对应的乘积一定; 如果是比值一定, 就成正比例; 如果是乘积一定, 则成反比例.

**【详解】** A. 圆的周长与其半径是正比例关系, 不符合题意,

B. 平行四边形面积一定时, 其一边长与这边上的高成反比例关系, 符合题意,

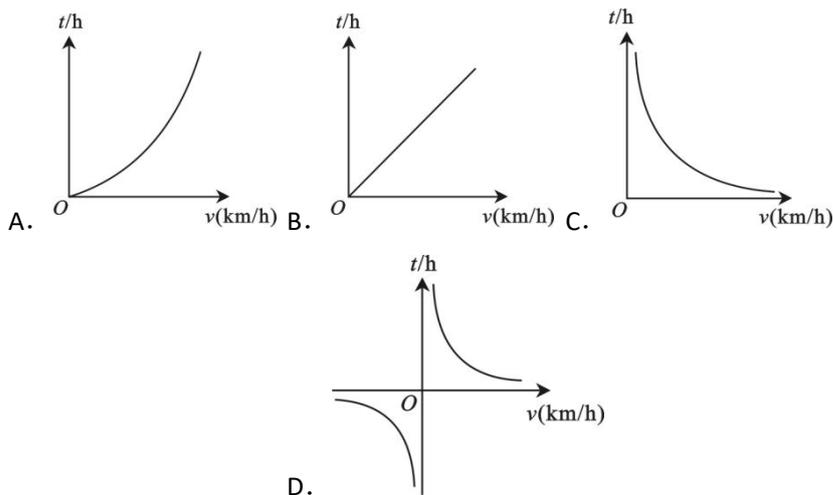
C. 销售单价一定时, 销售总价与销售数量成正比例关系, 不符合题意,

D. 汽车匀速行驶过程中, 行驶路程与行驶时间成正比例关系, 不符合题意,

故选 B.

**【点睛】** 本题主要考查成反比例函数关系的量, 关键就看这两个量是对应的比值一定, 还是对应的乘积一定, 再做判断.

**【变式 1-3】** (2022·广西钦州·校考一模) 已知甲、乙两地相距  $s$  (单位: km), 汽车从甲地匀速行驶到乙地, 则汽车行驶的时间  $t$  (单位: h) 关于行驶速度  $v$  (单位: km/h) 的函数图象是 ( )



【答案】C

【分析】根据实际意义，写出函数的解析式，根据函数的类型，以及自变量的取值范围即可进行判断。

【详解】解：根据题意有： $v \cdot t = s$ ，

$$\therefore t = \frac{s}{v}$$

故  $t$  与  $v$  之间的函数图象为反比例函数图象，

且根据实际意义  $v > 0$ 、 $t > 0$ ，

$\therefore$  其图像在第一象限，故 C 正确。

故选：C。

【点睛】本题主要考查了反比例函数的应用，解答该类问题的关键是确定两个变量之间的函数关系，然后利用实际意义确定其所在的象限。

### 【要点3 反比例函数的图象与性质】

1、图象：由两条曲线组成（双曲线）

2、性质：

函数	$k$	图象	所在象限	增减性
$y = \frac{k}{x}$ ( $k$ 为常数, $k \neq 0$ )	$k > 0$		第一、三象限 ( $x, y$ 同号)	在同一象限内, $y$ 随 $x$ 的增大而减小
	$k < 0$		第二、四象限 ( $x, y$ 异号)	在同一象限内, $y$ 随 $x$ 的增大而增大
$ k $ 越大, 函数图象越远离坐标原点				

## 【考点2 反比例函数的图象】

【例2】（2022·四川成都·统考中考真题）若反比例函数  $y = \frac{m-2}{x}$  的图像经过第二、四象限，则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

【答案】  $m < 2$

【分析】由反比例函数图像经过第二、四象限，得出  $m - 2 < 0$ ，求出  $m$  范围即可.

【详解】解：∵反比例函数  $y = \frac{m-2}{x}$  的图像经过第二、四象限，

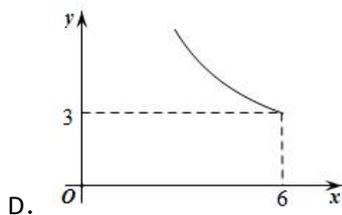
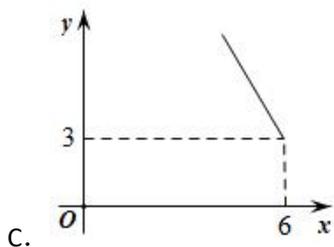
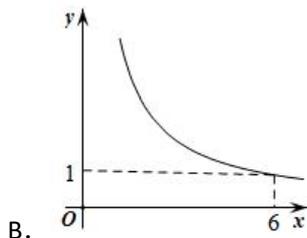
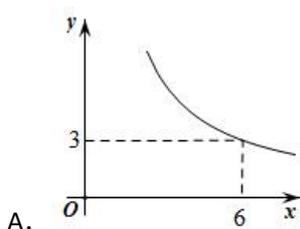
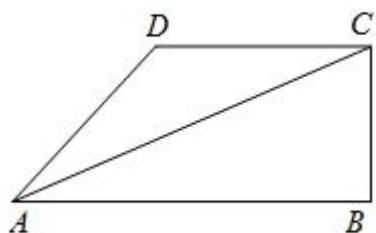
∴  $m - 2 < 0$ ,

得：  $m < 2$ .

故答案为：  $m < 2$ .

【点睛】本题主要考查了反比例函数图像的性质，根据反比例函数图像的性质，列出关于  $m$  的不等式，是解题的关键.

【变式2-1】（2022·湖南衡阳·统考中考真题）如图，在四边形  $ABCD$  中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $AB \parallel CD$ ， $AC$  平分  $\angle DAB$ . 设  $AB = x$ ， $AD = y$ ，则  $y$  关于  $x$  的函数关系用图象大致可以表示为 ( )



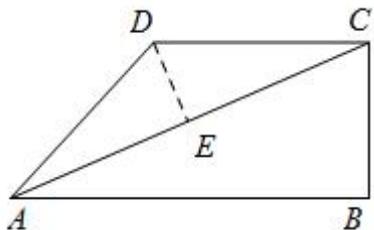
【答案】 D

【分析】先证明  $CD = AD = y$ ，过  $D$  点做  $DE \perp AC$  于点  $E$ ，证明  $\triangle ABC \sim \triangle AED$ ，利用相似三角形的性质可得函数关系式，从而可得答案.

【详解】解：∵  $AB \parallel CD$ ，∴  $\angle ACD = \angle BAC$ ，

∵  $AC$  平分  $\angle DAB$ ，∴  $\angle BAC = \angle CAD$ ，

$\therefore \angle ACD = \angle CAD$ , 则  $CD = AD = y$ , 即  $\triangle ACD$  为等腰三角形,  
过  $D$  点做  $DE \perp AC$  于点  $E$ .



则  $DE$  垂直平分  $AC$ ,  $AE = CE = \frac{1}{2}AC = 3$ ,  $\angle AED = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BAC = \angle CAD$ ,  $\angle B = \angle AED = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED$ ,

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE},$$

$$\therefore \frac{6}{y} = \frac{x}{3},$$

$$\therefore y = \frac{18}{x},$$

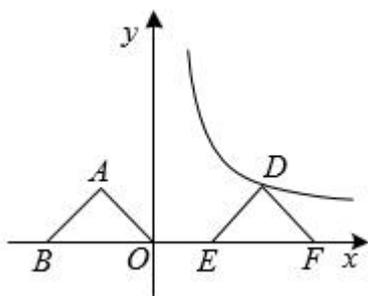
$\therefore$  在  $\triangle ABC$  中,  $AB < AC$ ,

$\therefore x < 6$ ,

故选 D.

**【点睛】** 本题考查的是角平分线的定义, 等腰三角形的判定与性质, 相似三角形的判定与性质, 反比例函数的图象, 证明  $\triangle ABC \sim \triangle AED$  是解本题的关键.

**【变式 2-2】** (2022·四川雅安·统考中考真题) 如图, 在平面直角坐标系中, 等腰直角三角形  $ABO$  的直角顶点  $A$  的坐标为  $(m, 2)$ , 点  $B$  在  $x$  轴上, 将  $\triangle ABO$  向右平移得到  $\triangle DEF$ , 使点  $D$  恰好在反比例函数  $y = \frac{8}{x}$  ( $x > 0$ ) 的图象上.



(1) 求  $m$  的值和点  $D$  的坐标;

(2) 求  $DF$  所在直线的表达式;

(3) 若该反比例函数图象与直线  $DF$  的另一交点为点  $G$ , 求  $S_{\triangle EFG}$ .

**【答案】** (1)  $m = -2, D(4, 2)$

(2) 直线  $DF$  的解析式为:  $y = -x + 6$ .

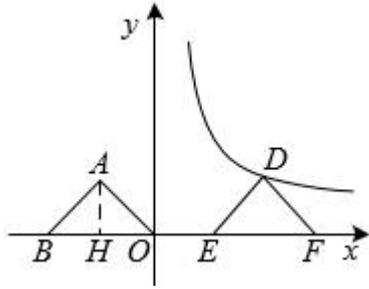
(3)  $S_{\triangle EFG} = 8$ .

【分析】(1)如图,过A作 $AH \perp BO$ 于H,利用等腰直角三角形的性质可得 $AH = BH = OH = 2$ ,从而可得 $m$ 的值,再由平移的性质可得 $D$ 的纵坐标,利用反比例函数的性质可得 $D$ 的坐标;

(2)由 $A(-2,2), D(4,2)$ ,可得等腰直角三角形向右平移了6个单位,则 $F(6,0)$ ,再利用待定系数法求解一次函数的解析式即可;

(3)先联立两个函数解析式求解 $G$ 的坐标,再利用三角形的面积公式进行计算即可.

【详解】(1)解:如图,过A作 $AH \perp BO$ 于H,



$\because \triangle ABO$ 为等腰直角三角形,  $A(m, 2)$ ,

$\therefore AH = BH = OH = 2$ ,

$\therefore A(-2, 2)$ , 即 $m = -2$ ,

由平移的性质可得:  $y_D = y_A = 2$ ,

$\therefore x_D = \frac{8}{2} = 4$ , 即 $D(4, 2)$ ,

(2)由 $A(-2, 2), D(4, 2)$ ,

$\therefore$  等腰直角三角形向右平移了6个单位,

$\therefore F(6, 0)$ ,

设 $DF$ 为 $y = kx + b$ ,

$\therefore \begin{cases} 4k + b = 2 \\ 6k + b = 0 \end{cases}$  解得:  $\begin{cases} k = -1 \\ b = 6 \end{cases}$ ,

$\therefore$  直线 $DF$ 的解析式为:  $y = -x + 6$ .

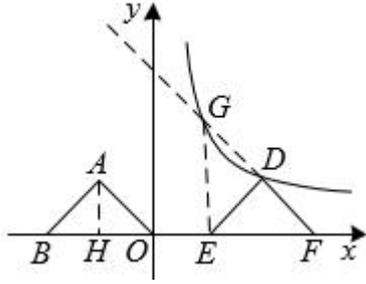
(3)如图, 延长 $FD$ 交反比例函数于 $G$ , 连结 $EG$ ,

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = \frac{8}{x} \end{cases},$$

解得:  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ , 经检验符合题意;

$\therefore G(2, 4)$ ,

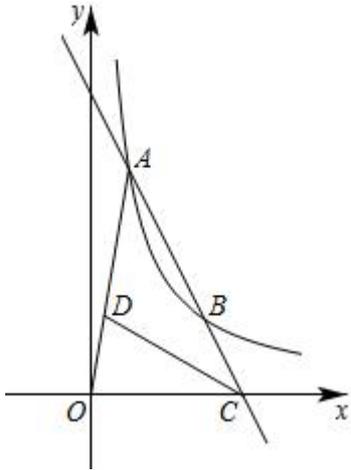
$\because EF = BO = 4$ ,



$$\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2} \times EF \times y_G = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8.$$

**【点睛】** 本题考查的是等腰直角三角形的性质，坐标与图形，反比例函数的图象与性质，函数的交点坐标问题，一元二次方程的解法，直角三角形斜边上的中线的性质，熟练是求解 G 的坐标是解本题的关键。

**【变式 2-3】** (2022·内蒙古包头·中考真题) 如图，反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k > 0)$  在第一象限的图象上有  $A(1,6)$ ,  $B(3,b)$  两点，直线  $AB$  与  $x$  轴相交于点  $C$ ,  $D$  是线段  $OA$  上一点. 若  $AD \cdot BC = AB \cdot DO$ , 连接  $CD$ , 记  $\triangle ADC$ ,  $\triangle DOC$  的面积分别为  $S_1, S_2$ , 则  $S_1 - S_2$  的值为\_\_\_\_\_.



**【答案】** 4

**【分析】** 如图，连结  $BD$ ，证明  $\triangle DAB \sim \triangle OAC$ ，再求解反比例函数为： $y = \frac{6}{x}$ ， $B(3,2)$ ，直线  $AB$  为： $y = -2x + 8$ ，再求解  $C(4,0)$ ， $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ ，再利用相似三角形的性质可得答案.

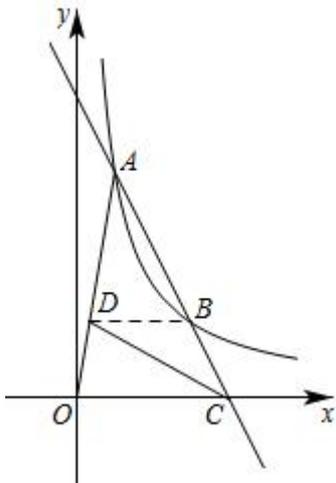
**【详解】** 解：如图，连结  $BD$ ，

$$\because AD \cdot BC = AB \cdot DO,$$

$$\therefore \frac{AD}{DO} = \frac{AB}{BC},$$

$$\therefore \frac{AD}{AO} = \frac{AB}{AC}, \text{ 而 } \angle DAB = \angle OAC,$$

$$\therefore \triangle DAB \sim \triangle OAC,$$



$\because A(1,6)$ 在反比例函数图象 $y = \frac{k}{x}$ 上,

$\therefore k = 6$ , 即反比例函数为:  $y = \frac{6}{x}$ ,

$\because B(3,b)$ 在反比例函数图象 $y = \frac{6}{x}$ 上,

$\therefore b = 2$ , 即 $B(3,2)$ ,

设直线  $AB$  为:  $y = mx + n$ ,

$\therefore \begin{cases} m + n = 6 \\ 3m + n = 2 \end{cases}$  解得:  $\begin{cases} m = -2 \\ n = 8 \end{cases}$ ,

$\therefore$  直线  $AB$  为:  $y = -2x + 8$ ,

$\therefore$  当 $y = 0$ 时,  $x = 4$ ,

$\therefore C(4,0)$ ,

$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ ,

$\because \triangle DAB \sim \triangle OAC$ ,

$\therefore \frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle AOC}} = \left(\frac{y_A - y_B}{y_A}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ,  $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AO} = \frac{2}{3}$ ,

$\therefore S_1 = \frac{2}{3} \times 12 = 8$ ,  $S_2 = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ ,

$\therefore S_1 - S_2 = 4$ .

故答案为: 4

**【点睛】** 本题考查的是反比例函数的图象与性质, 相似三角形的判定与性质, 证明 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AO} = \frac{2}{3}$ 是解本题的关键.

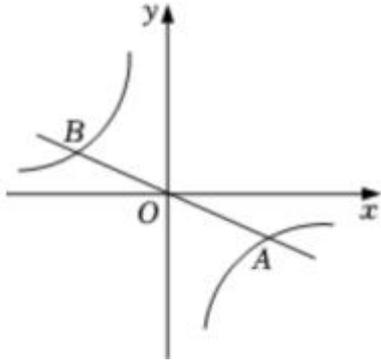
#### 【要点 4 反比例函数图象的对称性】

- (1) 中心对称, 对称中心是坐标原点
- (2) 轴对称: 对称轴为直线  $y = x$  和直线  $y = -x$

#### 【考点 3 反比例函数图象的对称性】

**【例 3】** (2022·四川攀枝花·统考中考真题) 如图, 正比例函数 $y = k_1x$ 与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$

的图像交于 $A(1, m)$ 、 $B$ 两点，当 $k_1x \leq \frac{k_2}{x}$ 时， $x$ 的取值范围是（ ）



A.  $-1 \leq x < 0$  或  $x \geq 1$

B.  $x \leq -1$  或  $0 < x \leq 1$

C.  $x \leq -1$  或  $x \geq 1$

D.  $-1 \leq x < 0$  或  $0 < x \leq 1$

**【答案】A**

**【分析】**先根据反比例函数图像的对称点求出点 $B$ 的坐标，然后根据 $k_1x \leq \frac{k_2}{x}$ 的解集即为反比例函数在一次函数上方的部分可得答案.

**【详解】**解析： $\because$ 正比例函数 $y = k_1x$ 与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(1, m)$ 、 $B$ 两点，  
 $\therefore B(-1, -m)$ ,

由图像可知，当 $k_1x \leq \frac{k_2}{x}$ 时， $x$ 的取值范围是 $-1 \leq x < 0$  或  $x \geq 1$ ,

故选：A.

**【点睛】**本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，根据反比例函数的对称性得出点 $B$ 的坐标的坐标是解本题的关键.

**【变式 3-1】**（2022·四川绵阳·统考二模）下列函数的图象既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）

A.  $y = x^2$

B.  $y = \frac{1}{x}$

C.  $y = |x - 2|$

D.  $y = \frac{1}{|x|}$

**【答案】B**

**【分析】**根据一次函数图象，反比例函数图象，二次函数图象的对称性分析判断即可得解.

**【详解】**解：A、 $y = x^2$ ，抛物线是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

B、 $y = \frac{1}{x}$ ，反比例函数，图象是双曲线，既是轴对称图形又是中心对称图形，符合题意；

C、 $y = |x - 2|$ ，图象以直线  $x = 2$  为对称轴，故不是中心对称图形，不符合题意；

D、 $y = \frac{1}{|x|}$ ，图象以  $y$  轴为对称轴，故不是中心对称图形，不符合题意；

故选：B.

**【点睛】**本题考查了二次函数图象，一次函数图象，反比例函数图象，熟记各图形以及其对称性是解题的关键.

**【变式 3-2】**（2022·山东滨州·阳信县实验中学学校考模拟预测）互不重合的两点 $A(x_1, y_1)$ ,

$B(x_2, y_2)$  皆落于反比例函数  $y = \frac{7}{x}$  图象上, 当直线  $AB$  与第二象限角平分线垂直时,  $x_1 \cdot x_2$  的值等于 ( )

- A. -1                      B. 1                      C. -7                      D. 7

**【答案】** C

**【分析】** 由直线  $AB$  与第二象限角平分线垂直可知  $A, B$  关于直线  $y = -x$  对称, 即有  $x_1 = -y_2$ ,  $x_2 = -y_1$ , 再根据两点均在反比例函数图象, 可得  $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = 7$ , 问题随之得解.

**【详解】** 解: 根据题意  $A, B$  关于直线  $y = -x$  对称,

$$\therefore x_1 = -y_2, x_2 = -y_1,$$

$\because$  互不重合的两点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  皆落于反比例函数  $y = \frac{7}{x}$  图象上,

$$\therefore x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = 7,$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (-y_1) = -x_1 y_1 = -7,$$

故选: C.

**【点睛】** 本题主要考查了反比例函数的性质, 轴对称的性质, 根据  $A, B$  关于直线  $y = -x$  对称, 得出  $x_1 = -y_2, x_2 = -y_1$ , 是解答本题的关键.

**【变式 3-3】** (2022·江苏南通·统考中考真题) 平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点

$A(m, 6m), B(3m, 2n), C(-3m, -2n)$  是函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  图象上的三点. 若  $S_{\triangle ABC} = 2$ , 则  $k$  的值为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{3}{4}$

**【分析】** 由点  $A, B, C$  的坐标可知  $k = 6m^2 > 0, m = n$ , 点  $B, C$  关于原点对称, 求出直线  $BC$  的解析式, 不妨设  $m > 0$ , 如图, 过点  $A$  作  $x$  轴的垂线交  $BC$  于  $D$ , 根据  $S_{\triangle ABC} = 2$  列式求出  $m^2$ , 进而可得  $k$  的值.

**【详解】** 解:  $\because$  点  $A(m, 6m), B(3m, 2n), C(-3m, -2n)$  是函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  图象上的三点,

$$\therefore k = 6m^2 > 0, k = 6mn,$$

$$\therefore m = n,$$

$$\therefore B(3m, 2m), C(-3m, -2m),$$

$\therefore$  点  $B, C$  关于原点对称,

$\therefore$  设直线  $BC$  的解析式为  $y = kx (k \neq 0)$ ,

代入  $B(3m, 2m)$  得:  $2m = 3mk$ ,

$$\text{解得: } k = \frac{2}{3},$$

$\therefore$  直线  $BC$  的解析式为  $y = \frac{2}{3}x$ ,

不妨设  $m > 0$ , 如图, 过点  $A$  作  $x$  轴的垂线交  $BC$  于  $D$ ,

把  $x = m$  代入  $y = \frac{2}{3}x$  得:  $y = \frac{2}{3}m$ ,

$$\therefore D\left(m, \frac{2}{3}m\right),$$

$$\therefore AD = 6m - \frac{2}{3}m = \frac{16}{3}m,$$

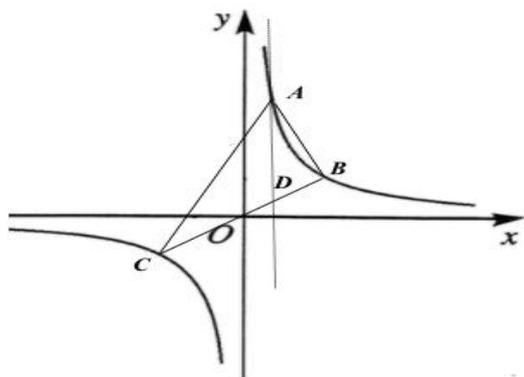
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3}m \cdot (3m + 3m) = 2,$$

$$\therefore m^2 = \frac{1}{8},$$

$$\therefore k = 6m^2 = 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4},$$

而当  $m < 0$  时，同样可得  $k = \frac{3}{4}$ ，

故答案为：  $\frac{3}{4}$ 。



**【点睛】** 本题考查了反比例函数与几何综合，中心对称的性质，待定系数法求函数解析式，熟练掌握反比例函数的图象和性质，学会利用数形结合的数学思想解答是解题的关键。

#### 【考点 4 反比例函数的性质】

**【例 4】**（2022·上海·统考中考真题）已知反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ )，且在各自象限内， $y$  随  $x$  的增大而增大，则下列点可能在这个函数图象上的为 ( )

- A. (2, 3)                      B. (-2, 3)                      C. (3, 0)                      D. (-3, 0)

**【答案】** B

**【分析】** 根据反比例函数性质求出  $k < 0$ ，再根据  $k = xy$ ，逐项判定即可。

**【详解】** 解：  $\because$  反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ )，且在各自象限内， $y$  随  $x$  的增大而增大，

$$\therefore k = xy < 0,$$

A、  $\because 2 \times 3 > 0$ ，  $\therefore$  点 (2, 3) 不可能在这个函数图象上，故此选项不符合题意；

B、  $\because -2 \times 3 < 0$ ，  $\therefore$  点 (-2, 3) 可能在这个函数图象上，故此选项符合题意；

C、  $\because 3 \times 0 = 0$ ，  $\therefore$  点 (3, 0) 不可能在这个函数图象上，故此选项不符合题意；

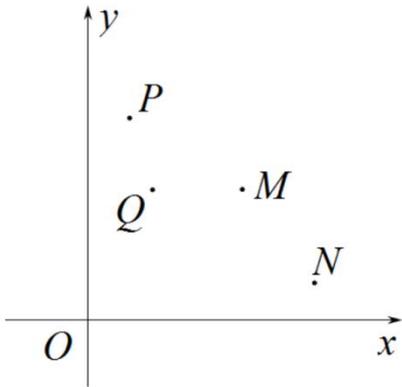
D、  $\because -3 \times 0 = 0$ ，  $\therefore$  点 (-3, 0) 不可能在这个函数图象上，故此选项不符合题意；

故选： B。

**【点睛】** 本题考查反比例函数的性质，反比例函数图象上点的坐标特征，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键。

**【变式 4-1】**（2022·贵州贵阳·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中有  $P, Q, M, N$

四个点，其中恰有三点在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上. 根据图中四点的位置，判断这四个点中不在函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上的点是 ( )

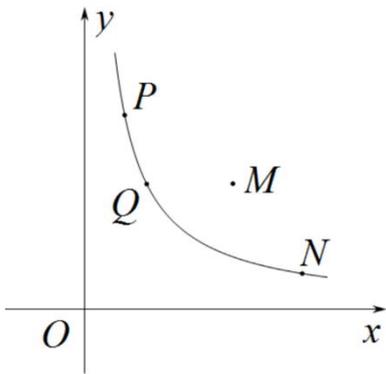


- A. 点P                      B. 点Q                      C. 点M                      D. 点N

**【答案】C**

**【分析】**根据反比例函数的性质，在第一象限内 $y$ 随 $x$ 的增大而减小，用平滑的曲线连接发现 $M$ 点不在函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上

**【详解】**解： $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 在第一象限内 $y$ 随 $x$ 的增大而减小，用平滑的曲线连接发现 $M$ 点不在函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上



故选 C

**【点睛】**本题考查了反比例函数的性质，掌握反比例函数图象的性质是解题的关键.

**【变式 4-2】**（2022·江苏泰州·统考中考真题）已知点 $(-3, y_1), (-1, y_2), (1, y_3)$ 在下列某一函数图像上，且 $y_3 < y_1 < y_2$ 那么这个函数是( )

- A.  $y = 3x$                       B.  $y = 3x^2$                       C.  $y = \frac{3}{x}$                       D.  $y = -\frac{3}{x}$

**【答案】D**

**【分析】**先假设选取各函数，代入自变量求出 $y_1, y_2, y_3$ 的值，比较大小即可得出答案.

**【详解】**解：A. 把点 $(-3, y_1), (-1, y_2), (1, y_3)$ 代入 $y=3x$ ，解得 $y_1=-9, y_2=-3, y_3=3$ ，所以 $y_1 < y_2 < y_3$ ，这与已知条件 $y_3 < y_1 < y_2$ 不符，故选项错误，不符合题意；

B. 把点 $(-3, y_1), (-1, y_2), (1, y_3)$ 代入 $y=3x^2$ , 解得 $y_1=27, y_2=3, y_3=3$ , 所以 $y_1 > y_2 = y_3$ , 这与已知条件 $y_3 < y_1 < y_2$ 不符, 故选项错误, 不符合题意;

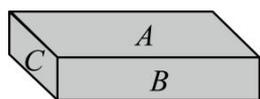
C. 把点 $(-3, y_1), (-1, y_2), (1, y_3)$ 代入 $y=\frac{3}{x}$ , 解得 $y_1=-1, y_2=-3, y_3=3$ , 所以 $y_2 < y_1 < y_3$ , 这与已知条件 $y_3 < y_1 < y_2$ 不符, 故选项错误, 不符合题意;

D. 把点 $(-3, y_1), (-1, y_2), (1, y_3)$ 代入 $y=-\frac{3}{x}$ , 解得 $y_1=1, y_2=3, y_3=-3$ , 所以 $y_3 < y_1 < y_2$ , 这与已知条件 $y_3 < y_1 < y_2$ 相符, 故选项正确, 符合题意;

故选: D.

**【点睛】**此题考查了一次函数、反比例函数以及二次函数, 解题的关键是掌握函数值的大小变化和函数的性质.

**【变式 4-3】** (2022·青海·统考中考真题) 如图, 一块砖的  $A, B, C$  三个面的面积之比是 5:3:1, 如果  $A, B, C$  三个面分别向下在地上, 地面所受压强分别为  $P_1, P_2, P_3$ , 压强的计算公式为  $P = \frac{F}{S}$ , 其中  $P$  是压强,  $F$  是压力,  $S$  是受力面积, 则  $P_1, P_2, P_3$  的大小关系为 \_\_\_\_\_ (用小于号连接).



**【答案】**  $P_1 < P_2 < P_3$

**【分析】**先根据这块砖的重量不变可得压力  $F$  的大小不变, 且  $F > 0$ , 再根据反比例函数的性质 (增减性) 即可得.

**【详解】**解:  $\because$  这块砖的重量不变,

$\therefore$  不管  $A, B, C$  三个面中的哪面向下在地上, 压力  $F$  的大小都不变, 且  $F > 0$ ,

$\therefore P$  随  $S$  的增大而减小,

$\because A, B, C$  三个面的面积之比是 5:3:1,

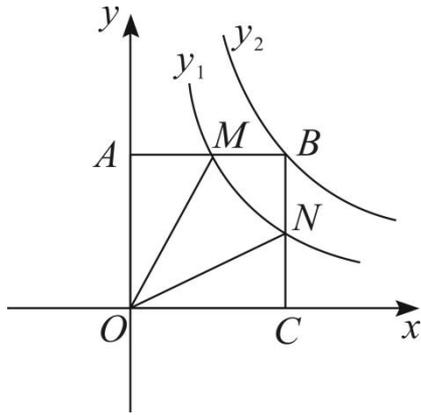
$\therefore P_1 < P_2 < P_3$ ,

故答案为:  $P_1 < P_2 < P_3$ .

**【点睛】** 本题考查了反比例函数的性质, 熟练掌握反比例函数的增减性是解题关键.

### **【考点 5 反比例函数系数 k 的几何意义】**

**【例 5】** (2022·山东日照·统考中考真题) 如图, 矩形  $OABC$  与反比例函数  $y_1 = \frac{k_1}{x}$  ( $k_1$  是非零常数,  $x > 0$ ) 的图象交于点  $M, N$ , 与反比例函数  $y_2 = \frac{k_2}{x}$  ( $k_2$  是非零常数,  $x > 0$ ) 的图象交于点  $B$ , 连接  $OM, ON$ . 若四边形  $OMBN$  的面积为 3, 则  $k_1 - k_2 =$  ( )



A. 3

B. -3

C.  $\frac{3}{2}$

D.  $-\frac{3}{2}$

**【答案】** B

**【分析】** 根据矩形的性质以及反比例函数系数  $k$  的几何意义即可得出结论.

**【详解】** 解:  $\because$  点  $M$ 、 $N$  均是反比例函数  $y_1 = \frac{k_1}{x}$  ( $k_1$  是非零常数,  $x > 0$ ) 的图象上,

$$\therefore S_{\triangle OAM} = S_{\triangle OCN} = \frac{1}{2}k_1,$$

$\because$  矩形  $OACB$  的顶点  $B$  在反比例函数  $y_2 = \frac{k_2}{x}$  ( $k_2$  是非零常数,  $x > 0$ ) 的图象上,

$$\therefore S_{\text{矩形}OACB} = k_2,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OMBN} = S_{\text{矩形}OACB} - S_{\triangle OAM} - S_{\triangle OCN} = 3,$$

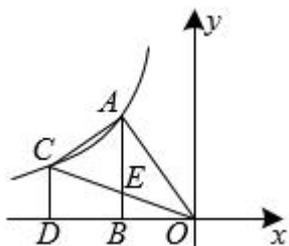
$$\therefore k_2 - k_1 = 3,$$

$$\therefore k_1 - k_2 = -3,$$

故选: B.

**【点睛】** 本题考查了矩形的性质, 反比例函数系数  $k$  的几何意义: 在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  图象中任取一点, 过这一个点向  $x$  轴和  $y$  轴分别作垂线, 与坐标轴围成的矩形的面积是定值  $|k|$ .

**【变式 5-1】** (2022·湖北荆门·统考中考真题) 如图, 点  $A$ ,  $C$  为函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $x < 0$ ) 图象上的两点, 过  $A$ ,  $C$  分别作  $AB \perp x$  轴,  $CD \perp x$  轴, 垂足分别为  $B$ ,  $D$ , 连接  $OA$ ,  $AC$ ,  $OC$ , 线段  $OC$  交  $AB$  于点  $E$ , 且点  $E$  恰好为  $OC$  的中点. 当  $\triangle AEC$  的面积为  $\frac{3}{4}$  时,  $k$  的值为 ( )



A. -1

B. -2

C. -3

D. -4

**【答案】** B

**【分析】** 根据三角形的中线的性质求出  $\triangle AEO$  的面积, 根据相似三角形的性质求出  $S_{\triangle OCD} = 1$ , 根据反比例函数系数  $k$  的几何意义解答即可.

【详解】∵点  $E$  为  $OC$  的中点，

$$\therefore S_{\triangle AEO} = S_{\triangle AEC} = \frac{3}{4},$$

∵点  $A, C$  为函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $x < 0$ ) 图象上的两点，

$$\therefore S_{\triangle ABO} = S_{\triangle CDO},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}CDBE} = S_{\triangle AEO} = \frac{3}{4},$$

∵  $EB \parallel CD$ ,

$$\therefore \triangle OEB \sim \triangle OCD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OEB}}{S_{\triangle OCD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\therefore S_{\triangle OCD} = 1,$$

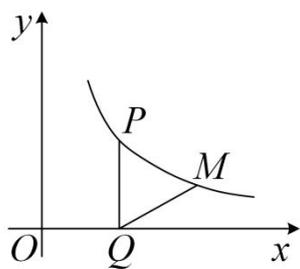
$$\text{则 } \frac{1}{2}xy = -1,$$

$$\therefore k = xy = -2.$$

故选：B.

【点睛】本题考查的是反比例函数系数  $k$  的几何意义、相似三角形的性质，掌握反比例函数系数  $k$  的几何意义、相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键.

【变式 5-2】(2022·吉林长春·统考中考真题)如图，在平面直角坐标系中，点  $P$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k > 0, x > 0$ ) 的图象上，其纵坐标为 2，过点  $P$  作  $PQ \parallel y$  轴，交  $x$  轴于点  $Q$ ，将线段  $QP$  绕点  $Q$  顺时针旋转  $60^\circ$  得到线段  $QM$ . 若点  $M$  也在该反比例函数的图象上，则  $k$  的值为 ( )



A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B.  $\sqrt{3}$

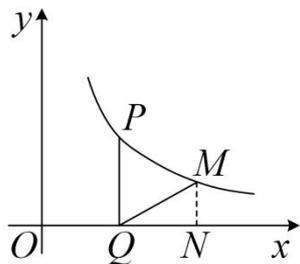
C.  $2\sqrt{3}$

D. 4

【答案】C

【分析】作  $MN \perp x$  轴交于点  $N$ ，分别表示出  $ON$ 、 $MN$ ，利用  $k$  值的几何意义列式即可求出结果.

【详解】解：作  $MN \perp x$  轴交于点  $N$ ，如图所示，



∵  $P$  点纵坐标为：2，

∴  $P$  点坐标表示为： $(\frac{k}{2}, 2)$ ， $PQ=2$ ，

由旋转可知： $QM=PQ=2$ ， $\angle PQM=60^\circ$ ，

∴  $\angle MQN=30^\circ$ ，

∴  $MN=\frac{1}{2}QM=1$ ， $QN=\sqrt{3}$ ，

∴  $ON \cdot MN = k$ ，

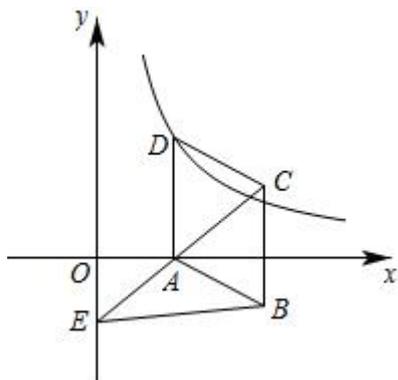
即： $\frac{k}{2} + \sqrt{3} = k$ ，

解得： $k=2\sqrt{3}$ ，

故选：C.

**【点睛】** 本题主要考查的是  $k$  的几何意义，表示出对应线段是解题的关键.

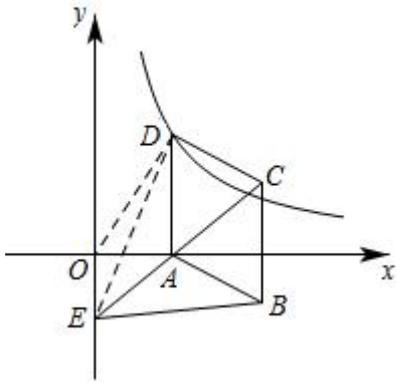
**【变式 5-3】** (2022·四川乐山·统考中考真题) 如图，平行四边形  $ABCD$  的顶点  $A$  在  $x$  轴上，点  $D$  在  $y=\frac{k}{x}(k>0)$  上，且  $AD \perp x$  轴， $CA$  的延长线交  $y$  轴于点  $E$ . 若  $S_{\triangle ABE}=\frac{3}{2}$ ，则  $k=$ \_\_\_\_\_.



**【答案】** 3

**【分析】** 连接  $OD$ 、 $DE$ ，利用同底等高的两个三角形面积相等得到  $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ABE}=\frac{3}{2}$ ，以及  $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ADO}=\frac{3}{2}$ ，再利用反比例函数的比例系数  $k$  的几何意义求解即可.

**【详解】** 解：连接  $OD$ 、 $DE$ ，



$\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,  
 $\therefore$  点  $B$ 、点  $D$  到对角线  $AC$  的距离相等,  
 $\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABE} = \frac{3}{2}$ ,  
 $\because AD \perp x$  轴,  
 $\therefore AD \parallel OE$ ,  
 $\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ADO} = \frac{3}{2}$ ,  
 设点  $D(x, y)$  ,  
 $\therefore S_{\triangle ADO} = \frac{1}{2}OA \times AD = \frac{1}{2}xy = \frac{3}{2}$ ,  
 $\therefore k = xy = 3$ .

故答案为：3.

【点睛】 本题考查的是反比例系数  $k$  的几何意义，涉及到平行四边形的性质及反比例函数图象上点的坐标特点等相关知识，利用同底等高的两个三角形面积相等得到  $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABE}$  是解题的关键.

**【考点 6 反比例函数图象上点的坐标特征】**

【例 6】 (2022·辽宁阜新·统考中考真题) 已知反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  的图像经过点  $(-2, 4)$ ，那么该反比例函数图像也一定经过点 ( )

- A. (4,2)                      B. (1,8)                      C. (-1,8)                      D. (-1, -8)

【答案】 C

【分析】 先把点  $(-2, 4)$  代入反比例函数的解析式求出  $k$  的值，再对各选项进行逐一判断即可.

【详解】 解：  $\because$  反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  的图象经过点  $(-2, 4)$ ，

$\therefore k = -2 \times 4 = -8$ ,

- A、  $\because 4 \times 2 = 8 \neq -8$ ，  $\therefore$  此点不在反比例函数的图象上，故本选项错误；  
 B、  $\because 1 \times 8 = 8 \neq -8$ ，  $\therefore$  此点不在反比例函数的图象上，故本选项错误；  
 C、  $-1 \times 8 = -8$ ，  $\therefore$  此点在反比例函数的图象上，故本选项正确；  
 D、  $(-1) \times (-8) = 8 \neq -8$ ，  $\therefore$  此点不在反比例函数的图象上，故本选项错误.

故选：C.

【点睛】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，熟知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中， $k = xy$ 为定值是解答此题的关键.

【变式 6-1】(2022·江苏淮安·统考中考真题)在平面直角坐标系中，将点 $A(2,3)$ 向下平移 5 个单位长度得到点 $B$ ，若点 $B$ 恰好在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上，则 $k$ 的值是\_\_\_\_\_.

【答案】-4

【分析】将点 $A(2,3)$ 向下平移 5 个单位长度得到点 $B$ ，再把点 $B$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ，利用待定系数法进行求解即可.

【详解】将点 $A(2,3)$ 向下平移 5 个单位长度得到点 $B$ ，则 $B(2, -2)$ ，

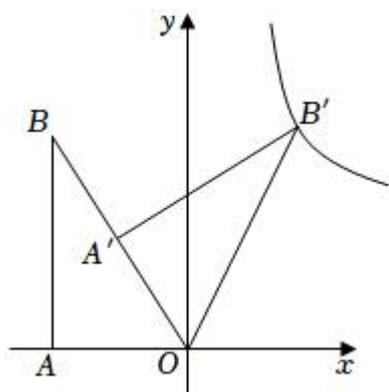
$\because$  点 $B$ 恰好在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上，

$\therefore k = 2 \times (-2) = -4$ ，

故答案为：-4.

【点睛】本题考查了坐标与图形变化—平移，待定系数法求反比例函数的解析式，熟练掌握知识点是解题的关键.

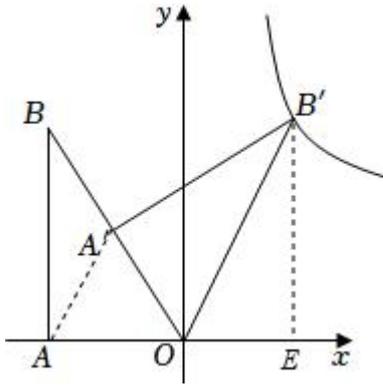
【变式 6-2】(2022·广东深圳·统考中考真题)如图，已知直角三角形 $ABO$ 中， $AO = 1$ ，将 $\triangle ABO$ 绕点 $O$ 点旋转至 $\triangle A'B'O$ 的位置，且 $A'$ 在 $OB$ 的中点， $B'$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 上，则 $k$ 的值为\_\_\_\_\_.



【答案】 $\sqrt{3}$

【分析】连接 $AA'$ ，作 $BE \perp x$ 轴于点 $E$ ，根据直角三角形斜边中线的性质和旋转的性质得出 $\triangle AOA'$ 是等边三角形，从而得出 $\angle AOB = \angle A'OB' = 60^\circ$ ，即可得出 $\angle B'OE = 60^\circ$ ，解直角三角形求得 $B$ 的坐标，进一步求得 $k = \sqrt{3}$ .

【详解】解：连接 $AA'$ ，作 $BE \perp x$ 轴于点 $E$ ，



由题意知  $OA = OA'$ ， $A'$  是  $OB$  中点， $\angle AOB = \angle A'OB'$ ， $OB' = OB$ ，

$$\therefore AA' = \frac{1}{2}OB = OA'$$

$\therefore \triangle OAA'$  是等边三角形，

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ,$$

$$\therefore OB = 2OA = 2, \angle B'OE = 60^\circ,$$

$$\therefore OB' = 2,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OB' = 1,$$

$$\therefore BE = \sqrt{3}OE = \sqrt{3},$$

$$\therefore B'(1, \sqrt{3}),$$

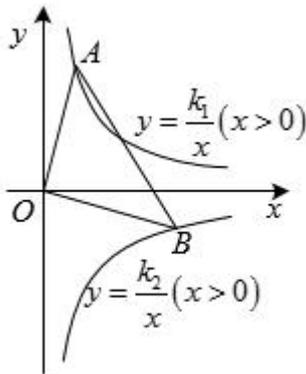
$$\therefore B' \text{ 在反比例函数 } y = \frac{k}{x} \text{ 上,}$$

$$\therefore k = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

故答案为： $\sqrt{3}$ 。

**【点睛】** 本题考查反比例函数图象上点的坐标特征，坐标与图形变化—性质，解题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。

**【变式 6-3】** (2022·湖北武汉·统考中考真题) 如图， $OA = OB$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，点  $A$ ， $B$  分别在函数  $y = \frac{k_1}{x}$  ( $x > 0$ ) 和  $y = \frac{k_2}{x}$  ( $x > 0$ ) 的图象上，且点  $A$  的坐标为  $(1, 4)$ 。



(1) 求  $k_1$ ， $k_2$  的值：

(2) 若点  $C$ ， $D$  分别在函数  $y = \frac{k_1}{x}$  ( $x > 0$ ) 和  $y = \frac{k_2}{x}$  ( $x > 0$ ) 的图象上，且不与点  $A$ ， $B$  重合，

是否存在点  $C, D$ , 使得  $\triangle COD \cong \triangle AOB$ , 若存在, 请直接出点  $C, D$  的坐标: 若不存在, 请说明理由.

**【答案】** (1)  $k_1 = 4, k_2 = -4$

(2)  $C(4,1), D(1, -4)$

**【分析】** (1) 过点  $A$  作  $AE \perp y$  轴交于点  $E$ , 过点  $B$  作  $BF \perp y$  轴交于点  $F$ , 将点  $A$  代入  $y = \frac{k_1}{x}$  即可求得  $k_1$ , 证明  $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ , 从而求得点  $B$  坐标, 将点  $B$  代入  $y = \frac{k_2}{x}$  求得  $k_2$ ; (2) 由  $\triangle COD \cong \triangle AOB$  可得  $OC=OA=OB=OD$ , 可得  $C$  与  $B$  关于  $x$  轴对称,  $A$  与  $D$  关于  $x$  轴对称即可求得坐标.

**【详解】** (1) 如图, 过点  $A$  作  $AE \perp y$  轴交于点  $E$ , 过点  $B$  作  $BF \perp y$  轴交于点  $F$ ,

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE + \angle BOF = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AOE + \angle EAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF = \angle EAO,$$

$$\text{又} \because \angle AEO = \angle OFB, OA = OB,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = OF, OE = BF,$$

$$\because \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (1,4),$$

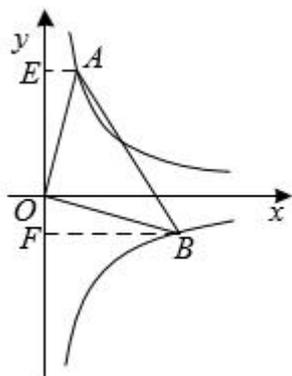
$$\therefore AE = 1, OE = 4,$$

$$\therefore OF = 1, BF = 4,$$

$$\therefore B(4, -1),$$

将点  $A, B$  分别代入  $y = \frac{k_1}{x}$  和  $y = \frac{k_2}{x}$ ,

解得,  $k_1 = 4, k_2 = -4$ ;



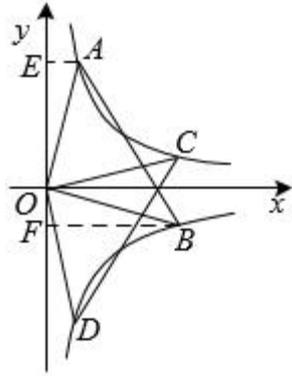
(2) 由 (1) 得, 点  $A$  在  $y = \frac{4}{x}$  图象上, 点  $B$  在  $y = -\frac{4}{x}$  图象上, 两函数关于  $x$  轴对称,

$$\because \triangle COD \cong \triangle AOB,$$

$$\therefore OC = OA = OB = OD,$$

只需  $C$  与  $B$  关于  $x$  轴对称,  $A$  与  $D$  关于  $x$  轴对称即可, 如图所示,

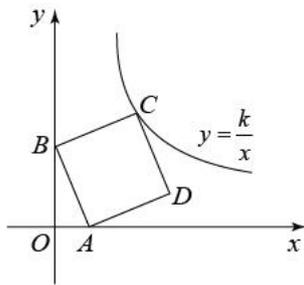
$\therefore$  点  $C(4, 1)$ , 点  $D(1, -4)$ .



**【点睛】** 本题考查反比例函数图象上点的坐标特征和全等三角形的判定和性质, 熟知反比例函数的性质是解题的关键.

**【考点 7 待定系数法求反比例函数解析式】**

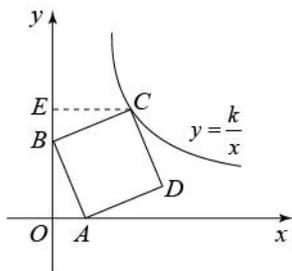
**【例 7】** (2022·山东威海·统考中考真题) 正方形  $ABCD$  在平面直角坐标系中的位置如图所示, 点  $A$  的坐标为  $(2, 0)$ , 点  $B$  的坐标为  $(0, 4)$ . 若反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象经过点  $C$ , 则  $k$  的值为 \_\_\_\_\_.



**【答案】** 24

**【分析】** 过点  $C$  作  $CE \perp y$  轴, 由正方形的性质得出  $\angle CBA = 90^\circ$ ,  $AB = BC$ , 再利用各角之间的关系得出  $\angle CBE = \angle BAO$ , 根据全等三角形的判定和性质得出  $OA = BE = 2$ ,  $OB = CE = 4$ , 确定点  $C$  的坐标, 然后代入函数解析式求解即可.

**【详解】** 解: 如图所示, 过点  $C$  作  $CE \perp y$  轴,



$\therefore$  点  $B(0, 4)$ ,  $A(2, 0)$ ,

$\therefore OB = 4$ ,  $OA = 2$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  为正方形,  
 $\therefore \angle CBA=90^\circ, AB=BC,$   
 $\therefore \angle CBE+\angle ABO=90^\circ,$   
 $\because \angle BAO+\angle ABO=90^\circ,$   
 $\therefore \angle CBE=\angle BAO,$   
 $\because \angle CEB=\angle BOA=90^\circ,$   
 $\therefore \triangle ABO \cong \triangle BCE,$   
 $\therefore OA=BE=2, OB=CE=4,$   
 $\therefore OE=OB+BE=6,$   
 $\therefore C(4, 6),$

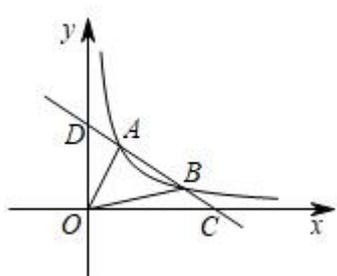
将点  $C$  代入反比例函数解析式可得:

$$k=24,$$

故答案为: 24.

**【点睛】** 题目主要考查正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 反比例函数解析式的确定等, 理解题意, 综合运用这些知识点是解题关键.

**【变式 7-1】** (2022·山东淄博·统考中考真题) 如图, 直线  $y=kx+b$  与双曲线  $y=\frac{m}{x}$  相交于  $A(1, 2)$ ,  $B$  两点, 与  $x$  轴相交于点  $C(4, 0)$ .



- (1) 分别求直线  $AC$  和双曲线对应的函数表达式;
- (2) 连接  $OA, OB$ , 求  $\triangle AOB$  的面积;
- (3) 直接写出当  $x>0$  时, 关于  $x$  的不等式  $kx+b>\frac{m}{x}$  的解集.

**【答案】** (1)  $y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}, y=\frac{2}{x};$

(2)  $\triangle AOB$  的面积为  $\frac{8}{3};$

(3)  $1<x<3$

**【分析】** (1) 将点  $A(1, 2)$  代入  $y=\frac{m}{x}$ , 求得  $m=2$ , 再利用待定系数法求得直线的表达式即可;

(2) 解方程组求得点  $B$  的坐标, 根据  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC}$ , 利用三角形面积公式即可求

解:

(3) 观察图象, 写出直线的图象在反比例函数图象的上方的自变量的取值范围即可.

【详解】(1) 解: 将点  $A(1, 2)$  代入  $y = \frac{m}{x}$ , 得  $m=2$ ,

$\therefore$  双曲线的表达式为:  $y = \frac{2}{x}$ ,

把  $A(1, 2)$  和  $C(4, 0)$  代入  $y=kx+b$  得:

$$y = \begin{cases} k + b = 2 \\ 4k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases},$$

$\therefore$  直线的表达式为:  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ ;

$$(2) \text{ 解: 联立 } \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases},$$

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(1, 2)$ ,

$\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(3, \frac{2}{3})$ ,

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle AOB} &= S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}OC \cdot |y_A| - \frac{1}{2}OC \cdot |y_B| \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2}{3} \end{aligned}$$

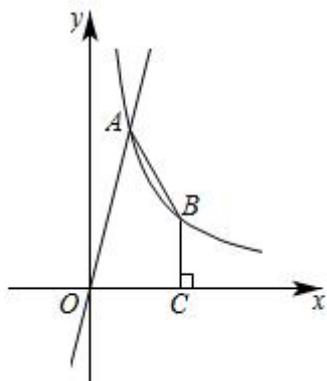
$$= \frac{8}{3},$$

$\therefore \triangle AOB$  的面积为  $\frac{8}{3}$ ;

(3) 解: 观察图象可知: 不等式  $kx+b > \frac{m}{x}$  的解集是  $1 < x < 3$ .

【点睛】本题考查反比例函数与一次函数图象的交点问题, 解题的关键是熟练掌握待定系数法确定函数解析式, 学会利用方程组求两个函数的交点坐标, 学会利用分割法求三角形面积.

【变式 7-2】(2022·青海西宁·统考中考真题) 如图, 正比例函数  $y = 4x$  与反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  的图象交于点  $A(a, 4)$ , 点  $B$  在反比例函数图象上, 连接  $AB$ , 过点  $B$  作  $BC \perp x$  轴于点  $C(2, 0)$ .



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/588013121061007007>