

专题 23 基本不等式 (2)

基本不等式是开学后第一次月考的重难点题型

高一学生初见它，笑容就渐渐消失，直呼：“这是基本不懂式”；

高二学生再见它，小小眼睛装大大的疑惑：“啊？这道题还得用它啊。”

高三学生刷到它相关的题，人生若只如初见：“我们高一高二的时候学过这个？”

模块一

热点题型解读 (目录)

【题型 1】判断不等式是否能成立

【题型 2】基本不等式与几何图形结合

【题型 3】和，积，平方和之间的转化

【题型 4】基本不等式的实际应用问题

【题型 5】基本不等式恒成立问题

【题型 6】基本不等式能成立问题

【题型 7】消参法求最值

【题型 8】因式分解型

【题型 9】同除型 (构造齐次式)

【题型 10】万能“ k ”法

【题型 11】含有根式的配凑 (根式平方和为定值型)

【题型 12】运用基本不等式证明不等式

【课后作业】

模块二

【核心题型突破】·举一反三

【题型 1】判断不等式是否能成立

基础知识

(1) 基本不等式的前提是“一正”“二定”“三相等”；其中“一正”指正数，“二定”指求最值时和或积为定值，“三相等”指满足等号成立的条件。

(2) 连续使用不等式要注意取得一致.

1. (多选) 下列函数中, 最小值为 2 的是 ()

A. $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + 1$

B. $y = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

C. $y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) (0 < x < 1)$

D. $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$

【答案】CD

【分析】根据基本不等式求解最值判断 ABC, 根据复合函数最值求法求解判断 D.

【详解】对于 A, $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + 1$, 当 $x = -4$ 时, $y = -\frac{1}{4} < 0$, 不符合要求, 错误;

对于 B, $y = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 2$, 当且仅当 $\sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 时取等号,

由 $\sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 得 $x^2 + 4 = 1$ 显然不成立, 所以等号取不到,

即 $y = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值不是 2, 错误;

对于 C, 因为 $0 < x < 1$, 所以 $1-x > 0$, $y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x(1-x)} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$,

当且仅当 $x = \frac{1}{2}$ 时取等号, 最小值是 2, 正确;

对于 D, $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$, 易知 $-2 \leq x \leq 2$, $y \geq 0$,

则 $y^2 = 2-x+2+x+2\sqrt{(2-x)(2+x)} = 4+2\sqrt{4-x^2}$,

当 $4-x^2=0$ 即 $x=2$ 或 -2 时, y^2 有最小值 4, 即 y 有最小值 2, 故 D 正确.

2. (多选) 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x+2y=1$, 下列结论中正确的是 ()

A. xy 的最大值是 $\frac{1}{8}$

B. $2^x + 4^y$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值是 8

D. $x^2 + 4y^2$ 的最小值是 $\frac{1}{2}$

【答案】ABD

【分析】根据题意, 利用题设条件, 结合基本不等式, 逐项判定, 即可求解.

【详解】 $x > 0, y > 0$, 且 $x+2y=1$,

对于 A, 由 $1 = x+2y \geq 2\sqrt{2xy}$, 解得 $xy \leq \frac{1}{8}$, 当且仅当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ 时等号成立,

则 xy 的最大值为 $\frac{1}{8}$, 所以 A 正确;

对于 B, 由 $2^x + 4^y = 2^x + 2^{2y} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{2y}} = 2\sqrt{2^{x+2y}} = 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ 时等号成立, 所以 $2^x + 4^y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$, 所以 B 正确;

对于 C, $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)(x+2y) = 5 + \frac{2y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{2x}{y}} = 9$,

当且仅当 $\frac{2y}{x} = \frac{2x}{y}$, 即 $x = y = \frac{1}{3}$ 时等号成立, 所以 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值是 9, 所以 C 错误;

对于 D, 由 $2(x^2 + 4y^2) \geq (x^2 + 4y^2) + 2x \cdot (2y) = (x + 2y)^2 = 1$,

得 $x^2 + 4y^2 \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ 时等号成立,

则 $x^2 + 4y^2$ 的最小值是 $\frac{1}{2}$, 所以 D 正确.

【巩固练习 1】(多选) 下列命题中, 真命题的是 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 - x \geq x - 1$

B. $\exists x \in (1, +\infty)$, 使得 $x + \frac{4}{x-1} = 6$

C. 任意非零实数 a, b , 都有 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

D. 若 $x \in (2, +\infty)$, 则 $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 的最小值为 4

【答案】AB

【分析】利用不等式的性质和均值不等式, 以及对勾函数的单调性求最值, 并根据全称命题与特称命题的真假判断, 即可选出真命题.

【详解】解: 对于 A, $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x \geq x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ 恒成立,

则 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 - x \geq x - 1$, A 选项正确;

对于 B, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $x - 1 \in (0, +\infty)$,

$\therefore x + \frac{4}{x-1} = x - 1 + \frac{4}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} + 1 = 5$ (当且仅当 $x = 3$ 时取等号),

$\therefore x + \frac{4}{x-1} \in [5, +\infty)$, $\therefore \exists x \in (1, +\infty)$, 使得 $x + \frac{4}{x-1} = 6$, B 选项正确;

对于 C, 当 $a < 0 < b$ 时, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} < 0$, C 选项错误;

对于 D, $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2\sqrt{4} = 4$, 当且仅当 $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x^2 = 3$

时取等号, 故当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 的最小值不是 4, D 选项错误

【巩固练习 2】(多选) 若实数 $m, n > 0$, 满足 $2m + n = 1$, 以下选项中正确的有 ()

A. mn 的最大值为 $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

C. $\frac{2}{m+1} + \frac{9}{n+2}$ 的最小值为 5

D. $4m^2 + n^2$ 最小值为 $\frac{1}{2}$

【答案】AD

【分析】利用基本不等式解决条件的最值问题求解和为定值或乘积为定值.

【详解】解：对于 A，由 $m, n > 0$ ，得 $2m + n \geq 2\sqrt{2mn}$ ，又 $2m + n = 1$ ，
所以 $1 \geq 2\sqrt{2mn}$ ，解得 $mn \leq \frac{1}{8}$ ，当且仅当 $2m = n$ ，

即 $m = \frac{1}{4}$ ， $n = \frac{1}{2}$ 时等号成立，

所以 mn 最大值为 $\frac{1}{8}$ ，选项 A 正确；

对于 B， $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = (2m + n) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) = 3 + \frac{n}{m} + \frac{2m}{n} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{2m}{n}} = 3 + 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $\frac{n}{m} = \frac{2m}{n}$ ，即 $\begin{cases} m = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ n = \sqrt{2}-1 \end{cases}$ 时等号成立，

所以 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$ ，选项 B 错误；

对于 C，由 $2m + n = 1$ ，得 $2(m+1) + (n+2) = 5$ ，

所以 $\frac{2}{m+1} + \frac{9}{n+2} = \frac{1}{5} [2(m+1) + (n+2)] \left(\frac{2}{m+1} + \frac{9}{n+2} \right)$
 $= \frac{1}{5} \left[13 + \frac{2(n+2)}{m+1} + \frac{18(m+1)}{n+2} \right] \geq \frac{1}{5} (13 + 2\sqrt{36}) = 5$ ，

当且仅当 $\frac{2(n+2)}{m+1} = \frac{18(m+1)}{n+2}$ ，即 $\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}$ 时等号成立，又 $m, n > 0$ ，

所以 $\frac{2}{m+1} + \frac{9}{n+2} > 5$ ，选项 C 错误；

对于 D，由 $m, n > 0$ ， $2m + n = 1$ ，得 $(2m + n)^2 = 4m^2 + n^2 + 4mn = 4m^2 + n^2 + 2\sqrt{4m^2} \cdot \sqrt{n^2} \leq 2(4m^2 + n^2)$ ，

则 $4m^2 + n^2 \geq \frac{1}{2}$ ，当且仅当 $4m^2 = n^2$ ，即 $\begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$ 时等号成立，

所以 $4m^2 + n^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$ ，选项 D 正确。

【巩固练习 3】(多选) 下列说法正确的是 ()

A. $x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的最小值是 2

B. $\frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值是 2

C. $\frac{x}{x^2 + x + 1} (x < 0)$ 的最小值是 -1

D. 若 $x > 0$ ，则 $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值是 $2 - 4\sqrt{3}$

【答案】ACD

【分析】利用基本不等式判断 A、C、D，利用对勾函数的性质判断 B。

【详解】对于 A， $Q x > 0$ ， $\therefore x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ ，当且仅当 $x = 1$ 时取等号，故 A 正确；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要
下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/588017040054006127>