10　以抛物线为情景的探索性问题

典例分析

类型一、有关直线存在性的探索

1．已知抛物线$C: y^2=2px(p>0)$上的点$(2,a)$到准线的距离为a.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)设$P(0,-2)$，O为坐标原点，过点$T(0,2)$的直线l与抛物线C交于不同的A、B两点，问：是否存在直线l，使得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，若存在，求出的直线$l$方程；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $y^2=8x$；(2)存在；$y=-4x+2$.

【分析】

（1）由题意可列出a,p的方程组，计算求解即可；

（2）设直线l的方程为$y=kx+2$，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，联立方程组$\begin{cases}y^2=8x\\y=kx+2\end{cases}$得出$x_1+x_2=\dfrac{8-4k}{k^2}$、$x_1x_2=\dfrac{4}{k^2}$，根据题意$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$可求出$k$的值，可求出的直线$l$方程.

【解析】

(1)由题可知：$\begin{cases}2+\dfrac{p}{2}=a\\a^2=4p\end{cases}\Rightarrow a=p=4$，$\therefore$抛物线$C$的方程为$y^2=8x$；

(2)假设存在满足题意的直线l，显然直线l的斜率存在，设直线l的方程为$y=kx+2$，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

则$\begin{cases}y^2=8x\\y=kx+2\end{cases}\Rightarrow k^2x^2+(4k-8)x+4=0$，$x_1+x_2=\dfrac{8-4k}{k^2}$、$x_1x_2=\dfrac{4}{k^2}$，

由$\Delta=(4k-8)^2-16k^2=64-64k>0$，得$k<1$，

由题可知：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(y_1+2)(y_2+2)\Rightarrow y_1+y_2=-2$，

$\therefore y_1+y_2=kx_1+2+kx_2+2=k(x_1+x_2)+4=\dfrac{8-4k}{k}+4=\dfrac{8}{k}$，$\therefore\dfrac{8}{k}=-2\Rightarrow k=-4<1$，

故存在满足题意的直线l，直线l的方程为$y=-4x+2$.

2．已知抛物线的顶点为原点，焦点F与圆$x^2+y^2-2y=0$的圆心重合.

(1)求抛物线的标准方程；

(2)是否存在过焦点 F 的直线，使得与抛物线和圆顺次交于 A、B、C、D 四点，并且 $|AB|$、$|BC|$、$|CD|$ 满足 $2|BC|=|AB|+|CD|$？若存在，求出直线的方程.

【答案】(1) $x^2=4y$；(2)存在，$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$

【分析】

（1）求得圆心坐标 $C(0,1)$，半径 $r=1$，根据题意，得到 $\frac{p}{2}=1$，即可求得抛物线的方程；

（2）根据 $2|BC|=|AB|+|CD|$，得到 $|AD|=|AB|+|CD|+|BC|=6$，设 AD 的方程为 $y=kx+1$，联立方程组求得 $y_1+y_2=4k^2+2$，结合抛物线的定义，列出方程求得 $k^2=\frac{1}{2}$，即可求解.

【解析】

(1)由题意，圆 $x^2+y^2-2y=0$，可得圆心坐标为 $C(0,1)$，半径为 $r=1$，

因为抛物线的焦点 F 与圆心 $C(0,1)$ 重合，可得 $\frac{p}{2}=1$，解得 $p=2$，所以抛物线的方程为 $x^2=4y$.

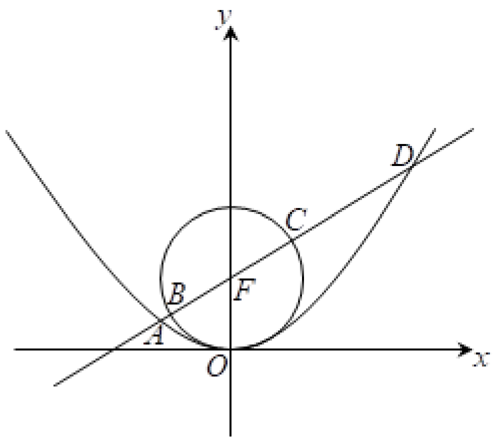
(2)如图所示，可得 $|BC|=2r=2$，因为 $2|BC|=|AB|+|CD|$，可得 $|AB|+|CD|=2|BC|=4$，

所以 $|AD|=|AB|+|CD|+|BC|=6$，设 $A(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，直线 AD 的方程为 $y=kx+1$，

联立方程组 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2=4y \end{cases}$，整理得 $y^2-(4k^2+2)y+1=0$，则 $y_1+y_2=4k^2+2$，

由抛物线的定义，可得 $|AD|=y_1+y_2+p=4k^2+2+2=6$，即 $k^2=\frac{1}{2}$，

所以 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以直线 AD 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$.



类型二、有关三角形面积最值得探索

1．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2$ 上异于坐标原点 O 的两个不同的动点 A、B 满足 $OA\perp OB$.

(1)求 $\triangle AOB$ 的重心 G 的轨迹方程；

(2)$\triangle AOB$ 的面积是否存在最小值？若存在，请求出最小值；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $y=3x^2+\frac{2}{3}$；(2)存在，$(S_{\triangle AOB})_{\min}=1$

【分析】

（1）根据重心性质，利用 A、B、O 坐标表示出重心坐标，然后利用 A、B 坐标满足抛物线方程化简可得；

（2）设直线方程，联立抛物线方程解出 A、B 坐标，然后由面积公式结合基本不等式可得.

【解析】

(1)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),G(x,y)$，则 $x=\frac{x_1+x_2}{3}$…①，$y=\frac{y_1+y_2}{3}$…②，又 $\begin{cases}y_1=x_1^2\\y_2=x_2^2\end{cases}$，代入②可得

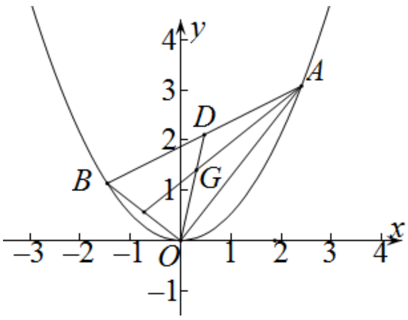
$y=\frac{x_1^2+x_2^2}{3}$…③

因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+x_1^2x_2^2=0$，可得 $x_1x_2=-1$

由①可得 $x_1^2+x_2^2=9x^2+2$，代入③整理可得重心 G 的轨迹方程为 $y=3x^2+\frac{2}{3}$

(2)设 OB 方程为 $y=kx$，代入 $y=x^2$ 解得 $x=0$ 或 $x=k$，则 $B(k,k^2)$，同理可得 $A\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k^2}\right)$，

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+k^4}\sqrt{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+\frac{1}{k^2}+2}\geq 1$，当且仅当 $k=\pm1$ 时，$(S_{\triangle AOB})_{\min}=1$.



2．已知椭圆方程为 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$，若抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点是椭圆的一个焦点.

(1)求该抛物线的方程；

(2)过抛物线焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A，B 两点，分别在点 A，B 处作抛物线的切线，两条切线交于 P 点，则 $\triangle PAB$ 的面积是否存在最小值？若存在，求出这个最小值及此时对应的直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $x^2=16y$；(2)存在；最小值为 64，此时直线 l 的方程为 $y=4$

【分析】

（1）先求出椭圆的焦点，从而可求得 $\frac{p}{2}$ 的值，求出 p，进而可得抛物线的方程，

（2）由题意可得直线 l 的斜率存在，则设直线 l 的方程为 $y=kx+4$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将直线方程代入抛物线方程中消去 y，利用根与系数的关系，利用导数的几何意义求出切线 PA,PB 的方程，联立求出点 P 的坐标，则利用点到直线的距离公式求出 P 到直线 AB 的距离，再利用弦长公式求出 $|AB|$，从而可表示出 $\triangle PAB$ 的面积，进而可求出其最小值

【解析】

(1)由椭圆 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$，知 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$．又抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点是椭圆的一个焦点．

所以 $\frac{p}{2}=4$，则 $p=8$．所以抛物线的方程为 $x^2=16y$．

(2)由抛物线方程 $x^2=16y$ 知，焦点 $F(0,4)$．易知直线 l 的斜率存在，则设直线 l 的方程为 $y=kx+4$．

由 $\begin{cases}y=kx+4\\x^2=16y\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $x^2-16kx-64=0$．$\Delta=(-16k)^2-4(-64)=256k^2+256>0$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=16k$，$x_1x_2=-64$．对 $y=\frac{x^2}{16}$ 求导，得 $y'=\frac{x}{8}$，

$\therefore$直线 AP 的斜率 $k_{AP}=\frac{x_1}{8}$，则直线 AP 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{8}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1}{8}x-\frac{x_1^{\ 2}}{16}$．

同理得直线 BP 的方程为 $y=\frac{x_2}{8}x-\frac{x_2^{\ 2}}{16}$．设点 $P(x_0,y_0)$，联立直线 AP 与 BP 的方程，

$\begin{cases}x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=8k\\y_0=\frac{x_1x_2}{16}=-4\end{cases}$ 即 $P(8k,-4)$．

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(16k)^2+256}=16(1+k^2)$，点 P 到直线 AB 的距离

$d=\frac{|8k^2+8|}{\sqrt{1+k^2}}=8\sqrt{1+k^2}$，所以 $\triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times16(1+k^2)\times8\sqrt{1+k^2}=64(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\geqslant64$，

当且仅当 $k=0$ 时等号成立．所以 $\triangle PAB$ 面积的最小值为 64，此时直线 l 的方程为 $y=4$．

类型三、有关定点存在性的探索

1．已知点 $M(p-1,p)$ 在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过点 M 作斜率分别为 k_1,k_2 的两条直线 l_1,l_2，若 l_1,l_2 与抛物线 C 的另一个交点分别为 A,B，且有 $k_1+k_2=2$，探究：直线 AB 是否恒过定点？若是，求出该定点；若否，说明理由.

【答案】(1) $y^2=4x$；(2)直线 AB 恒过定点 $(-1,0)$

【分析】

（1）将 M 点坐标代入抛物线方程即可构造方程求得结果；

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，利用斜率公式表示出 $k_1+k_2=2$，得到 $y_1y_2=4$；设 $AB:x=my+t$，与抛物线方程联立可得韦达定理的形式，由此可得 $t=-1$，可得 $AB:x=my-1$，由此可得定点坐标.

【解析】

(1) $\because M(p-1,p)$ 在抛物线上，$\therefore p^2=2p(p-1)$，解得：$p=2$，$\therefore$ 抛物线 C 的方程为：$y^2=4x$.

(2) 由（1）得：$M(1,2)$；设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_1=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}=\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_1+2}$；同理可得：$k_2=\dfrac{4}{y_2+2}$；

$\because k_1+k_2=2$，$\therefore \dfrac{4}{y_1+2}+\dfrac{4}{y_2+2}=2$，整理可得：$y_1y_2=4$；

当直线 AB 斜率为 0 时，其与抛物线 C 只有一个公共点，不合题意；

当直线 AB 斜率不为 0 时，设 $AB:x=my+t$，

由 $\begin{cases}y^2=4x\\x=my+t\end{cases}$ 得：$y^2-4my-4t=0$，则 $y_1y_2=-4t$，$\therefore -4t=4$，解得：$t=-1$；

$\therefore AB:x=my-1$，则直线 AB 过定点 $(-1,0)$；

综上所述：直线 AB 恒过定点 $(-1,0)$.

【点睛】本题考查直线与抛物线综合应用中的直线过定点问题的求解，求解此类问题的基本思路如下：

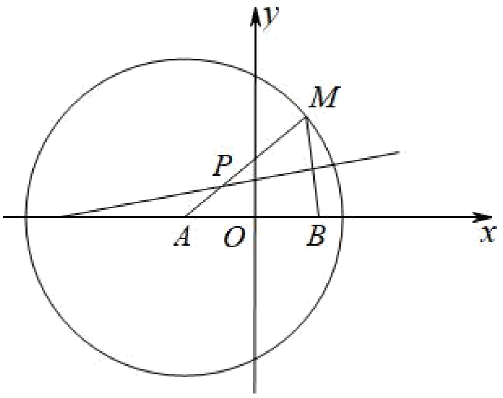
①假设直线方程，与抛物线方程联立，整理为关于 x 或 y 的一元二次方程的形式；

②利用 $\Delta>0$ 求得变量的取值范围，得到韦达定理的形式；

③利用韦达定理表示出已知中的等量关系，代入韦达定理可整理得到变量间的关系，从而化简直线方程；

④根据直线过定点的求解方法可求得结果.

2．如图，点 M 是圆 A：$\left(x+\sqrt{3}\right)^2+y^2=16$ 上的动点，点 $B\left(\sqrt{3},0\right)$，线段 MB 的垂直平分线交半径 AM 于点 P.



(1)求点 P 的轨迹 E 的方程；

(2)点 N 为轨迹 E 与 y 轴负半轴的交点，不过点 N 且不垂直于坐标轴的直线 l 交椭圆 E 于 S， T 两点，直线 NS， NT 分别与 x 轴交于 C， D 两点．若 C， D 的横坐标之积是 2，问：直线 l 是否过定点？如果是，求出定点坐标，如果不是，请说明理由．

【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2)直线 l 过定点 $(0,3)$.

【分析】

（1）利用定义法求点 P 的轨迹 E 的方程；

（2）直线 ST 的方程为 $y=kx+m(m\neq-1)$，联立直线和椭圆的方程得到韦达定理，再根据 $x_Cx_D=2$ 得 $m=3$，即得解.

【解析】

(1)由题得 $|AP|+|PM|=|AM|=4,\therefore|PA|+|PB|=4>2\sqrt{3}=|AB|$,所以点 P 的轨迹是以 A,B 为焦点，长轴为 4 的椭圆.所以 $2a=4,c=\sqrt{3},\therefore b=1$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.所以点 P 的轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由题得点 $N(0,-1)$,设直线 ST 的方程为 $y=kx+m(m\neq-1)$，

联立直线和椭圆的方程为 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

所以 $\Delta>0,\therefore 4k^2-m^2+1>0$.设 $S(x_1,y_1),T(x_2,y_2)$，所以 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$.

所以直线 SN 方程为 $y+1=\frac{y_1+1}{x_1}(x-0)$，令 $y=0$ 得 $x_C=\frac{x_1}{y_1+1}$，同理 $x_D=\frac{x_2}{y_2+1}$，

因为 $x_Cx_D=2,\therefore\frac{x_1}{y_1+1}\times\frac{x_2}{y_2+1}=2,\therefore x_1x_2=2(y_1+y_2+y_1y_2+1)$，

所以 $x_1x_2=2[kx_1+m+kx_2+m+(kx_1+m)(kx_2+m)+1]$，所以 $x_1x_2=2[k(x_1+x_2)(m+1)+k^2x_1x_2+(m+1)^2]$，

所以 $\frac{4m^2-4}{1+4k^2}=2[k\times(-\frac{8km}{1+4k^2})(m+1)+k^2\times\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+(m+1)^2]$，因为 $m\neq-1$，所以 $m+1\neq0$，

所以$4(m-1)=-16k^2m+8k^2(m-1)+2(1+4k^2)(m+1)$，所以$m=3$，所以直线$ST$的方程为$y=kx+3$，

所以直线ST过定点$(0,3)$.

3．已知抛物线C：$x^2=2py\left(p>0\right)$的焦点为F，过点F作两条相互垂直的直线l_1，l_2，直线l_1，l_2分别与抛物线C交于A，B和D，E两点，且当l_1的斜率为1时，$|AB|=8$.

(1)求抛物线C的方程.

(2)若点M，N满足$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NE}$，探究: 直线$MN$是否过定点？若是，求出定点坐标，若不是，请说明理由.

【答案】(1)$x^2=4y$；(2)是，直线MN过定点$\left(0,3\right)$.

【分析】

（1）设直线l_1：$y=x+\frac{p}{2}$，联立抛物线并整理，由韦达定理得$y_1+y_2=3p$，根据已知焦点弦长及抛物线的定义列方程求参数p，即可得抛物线方程.

（2）由（1）可设l_1：$y=kx+1$，则l_2：$y=-\frac{1}{k}x+1$，联立抛物线方程求M、N坐标，进而写出直线MN的方程，即可判断定点坐标.

【解析】

(1)设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，依题意，$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，

当l_1的斜率为1，直线l_1：$y=x+\frac{p}{2}$，联立$\begin{cases}y=x+\frac{p}{2}\\x^2=2py\end{cases}$，消去$x$得：$y^2-3py+\frac{p^2}{4}=0$，

则$y_1+y_2=3p$，故$|AB|=y_1+y_2+p=4p=8$，解得$p=2$，故抛物线C的方程为$x^2=4y$.

(2)由（1）知：$F\left(0,1\right)$．根据题意，直线l_1的斜率存在且不为0，设l_1：$y=kx+1$，则l_2：$y=-\frac{1}{k}x+1$.

设$M\left(x',y'\right)$，由$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$，消去$y$可得$x^2-4kx-4=0$，$\Delta=16k^2+16>0$，则$x_1+x_2=4k$.

因为M为线段AB的中点，所以$x'=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，则$y'=kx'+1=2k^2+1$，

所以$M\left(2k,2k^2+1\right)$，同理$N\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+1\right)$，则$k_{MN}=\frac{\frac{2}{k^2}+1-\left(2k^2+1\right)}{-\frac{2}{k}-2k}=k-\frac{1}{k}$，

直线MN：$y-\left(2k^2+1\right)=\left(k-\frac{1}{k}\right)\left(x-2k\right)$，即$y=\left(k-\frac{1}{k}\right)x+3$，则直线$MN$过定点$\left(0,3\right)$.

类型四、有关定值存在性的探索

1．在平面直角坐标系xOy中，动点G到点$F\left(4,0\right)$的距离比到直线$x+6=0$的距离小2．

(1)求G的轨迹的方程；

(2)设动点G的轨迹为曲线C，过点F作斜率为k_1，k_2的两条直线分别交C于M，N两点和P，Q两点，其中$k_1+k_2=2$．设线段MN和PQ的中点分别为A，B，过点F作$FD\perp AB$，垂足为D．试问：是否存在定点T，使得线段TD的长度为定值．若存在，求出点T的坐标及定值；若不存在，说明理由．

【答案】(1) $y^2=16x$；(2)存在定点$T(4,2)$，使得线段TD的长度为定值2；理由见解析

【分析】

（1）根据动点G到点$F(4,0)$的距离比它到直线$x+6=0$的距离小2和抛物线的定义可知点G的轨迹是以$F(4,0)$为焦点，以直线$x+4=0$为准线的抛物线，进而得出结果；

（2）设直线方程，联立抛物线方程，求得A，B的坐标，从而表示出AB的方程，说明其过定点，由$FD\perp AB$可说明点D点在一个圆上，由此可得结论.

【解析】

(1)由题意可得动点G到点$F\left(4,0\right)$的距离比到直线$x+6=0$的距离小2，则动点G到点$F\left(4,0\right)$的距离与到直线$x+4=0$的距离相等，故G的轨迹是以$F(4,0)$为焦点，以直线$x+4=0$为准线的抛物线，设抛物线方程为$y^2=2px,(p>0)$，则焦准距$p=8$，故G的轨迹的方程为：$y^2=16x$；

(2)由题意，直线MN的方程为$y=k_1(x-4)$，由题意可知$k_1\neq 0,k_2\neq 0,k_1\neq k_2$，

由$\begin{cases}y^2=16x\\ y=k_1(x-4)\end{cases}$，消去$y$得：$k_1{}^2x^2-(8k_1{}^2+16)x+16k_1{}^2=0$，$\Delta_1=256(k_1{}^2+1)>0$，

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=8+\dfrac{16}{k_1{}^2},y_1+y_2=k_1(x_1-4)+k_1(x_2-4)=\dfrac{16}{k_1}$，

故$A(4+\dfrac{8}{k_1{}^2},\dfrac{8}{k_1})$，同理可求得$B(4+\dfrac{8}{k_2{}^2},\dfrac{8}{k_2})$，所以直线$AB$的斜率$k_{AB}=\dfrac{\dfrac{8}{k_2}-\dfrac{8}{k_1}}{(\dfrac{8}{k_2{}^2}+4)-(\dfrac{8}{k_1{}^2}+4)}=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$，

故直线AB的方程为：$y=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}\left(x-4-\dfrac{8}{k_1{}^2}\right)+\dfrac{8}{k_1}=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}\left(x-4\right)+\dfrac{8}{k_1+k_2}=\dfrac{k_1k_2}{2}\left(x-4\right)+4$，

故直线AB过定点$(4,4)$，设该点为$E(4,4)$,又因为$FD\perp AB$，所以点D在以EF为直径的圆上，

由于$E(4,4),F(4,0)$，$\left|EF\right|=\sqrt{\left(4-4\right)^2+\left(4-0\right)^2}=4$，故以$EF$为直径的圆的方程为$(x-4)^2+(y-2)^2=4$，

故存在定点$T(4,2)$，使得线段TD的长度为定值2.

【点睛】本题考查了抛物线方程的求解以及直线和抛物线的位置关系中的定点问题，综合性较强，解答时要注意设直线方程并和抛物线方程联立,利用很与系数的关系进行化简，关键是解题思路要通畅，计算要准确，很容易出错.

巩固练习

1．已知抛物线$C: y^2=4x$的焦点为F，斜率为k的直线l与抛物线C交于A、B两点，与x轴交于$P(a,0)$

(1)当$k=1$，$a=3$时.求$|AF|+|BF|$的值；

(2)当点P、F重合时，点A关于x轴的对称点为点D，试问直线BD是否过x轴上的定点Q？若是，请求出点Q的坐标；若不是，请说明理由.

【答案】(1)12；(2)过定点，定点为$Q(-1,0)$.

【分析】

（1）根据已知条件求得直线方程，联立直线方程和抛物线方程，根据抛物线的定义，即可容易求得结果；

（2）设出A,B的坐标，根据A,F,B三点共线，结合直线BD与抛物线联立后韦达定理的应用，即可求得直线BD恒过的定点.

【解析】

(1)根据题意可得直线l方程为：$y=x-3$，联立方程$\begin{cases} y=x-3 \\ y^2=4x \end{cases}$，消去$y$得：$x^2-10x+9=0$，则$x_A+x_B=10$，

由抛物线定义可知：$|AF|+|BF|=x_A+1+x_B+1=x_A+x_B+2=12$.

(2)由于A,D关于x轴对称，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$D(x_1,-y_1)$，又$F(1,0)$，

因为A,F,B三点共线，$\dfrac{y_1}{x_1-1}=\dfrac{y_2}{x_2-1}$，即$\dfrac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\dfrac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}-1}$，化简得：$y_1\cdot y_2=-4$.

显然直线BD的斜率不为0，设其方程为$x=my+t$，联立$\begin{cases} x=my+t \\ y^2=4x \end{cases}$，得$y^2-4my-4t=0$，

当$\Delta=16m^2+16t>0$时，则$-y_1\cdot y_2=-4t$，则$y_1\cdot y_2=4t=-4$，解得$t=-1$，故BD过x轴上的定点$Q(-1,0)$.

【点睛】本题考察抛物线的定义，以及抛物线中的定点问题，解决问题的关键是合理使用韦达定理，属综合中档题.

2．已知抛物线$H: y^2=2px(p>0)$的焦点为F，抛物线H上的一点M的横坐标为5，O为坐标原点，$\cos\angle OFM=-\dfrac{2}{3}$.

(1)求抛物线H的方程；

(2)若一直线经过抛物线 H 的焦点 F，与抛物线 H 交于 A，B 两点，点 C 为直线 $x=-1$ 上的动点．

①求证：$\angle ACB \le \frac{\pi}{2}$.

②是否存在这样的点 C，使得ΔABC为正三角形?若存在，求点 C 的坐标；若不存在，说明理由，

【答案】(1)抛物线 H 的方程为 $y^2=4x$；

(2)证明见解析；存在点$C(-1,\pm 8\sqrt{2})$，使得$\triangle ABC$为正三角形，理由见解析.

【分析】

(1) 由条件列方程求参数 p，由此可得抛物线 H 的方程；(2)设直线 $AB: x=my+1$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(-1,n)$，联立方程得关于 y 的表达式，结合韦达定理和向量$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$的表示方法，即可求证；可假设存在点$C$，设 AB 的中点为 N，由直线 AB 和 CN 垂直关系求出点 N，由韦达定理和弦长公式求得弦$|AB|$，结合$|CN|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$即可求解具体的 m 的值，进而求解点 C；

【解析】

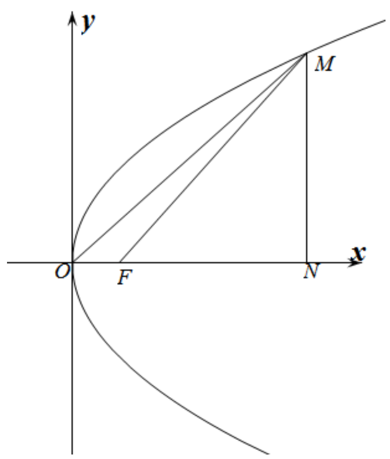
(1)因为抛物线 H 的方程为 $y^2=2px$，M 抛物线 H 上且的横坐标为 5，所以 M 的纵坐标为$\pm\sqrt{10p}$，

当点 M 的坐标为$(5,\sqrt{10p})$时，过点 M 作 $MN\perp OF$，垂足为 N ,因为$\cos\angle OFM=-\frac{2}{3}$，所以$\cos\angle MFN=\frac{2}{3}$，

所以$\tan\angle MFN=\frac{\sqrt{5}}{2}$又$\tan\angle MFN=\frac{MN}{FN}=\frac{\sqrt{10p}}{5-\frac{p}{2}}$，所以$\frac{\sqrt{10p}}{5-\frac{p}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以$p+4\sqrt{2p}-10=0$，所以$(\sqrt{p}-\sqrt{2})(\sqrt{p}+5\sqrt{2})=0$，又$p>0$所以$p=2$，

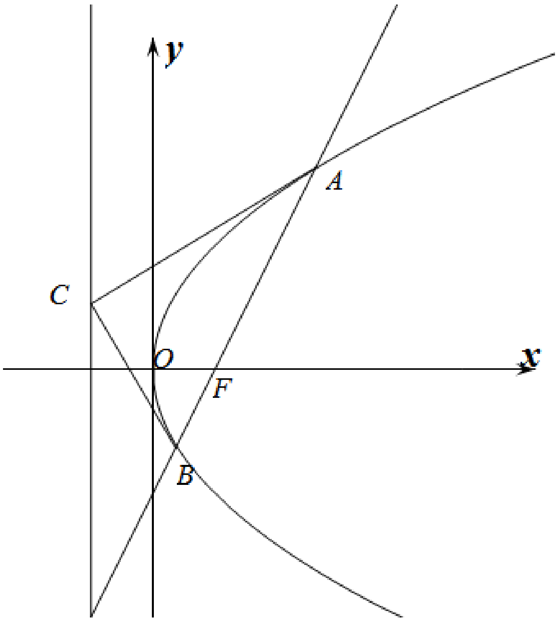
同理当点 M 的坐标为$(5,-\sqrt{10p})$时，$p=2$所以抛物线 H 的方程为$y^2=4x$；



(2)①设直线 $AB: x=my+1$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(-1,n)$,由$\begin{cases}x=my+1\\ y^2=4x\end{cases}$，得$y^2-4my-4=0$，

则$y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4$, $x_1+x_2=4m^2+2, x_1x_2=1$.$\overrightarrow{CA}=(x_1+1,y_1-n)$，$\overrightarrow{CB}=(x_2+1,y_2-n)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=x_1x_2+x_1+x_2+1+y_1y_2-n\left(y_1+y_2\right)+n^2=(2m-n)^2\geq 0$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\rangle\geq 0$，所以 $\angle ACB\leq\dfrac{\pi}{2}$



②假设存在这样的点 C，设 AB 的中点为 N，由①知 $N\left(2m^2+1,2m\right)$；

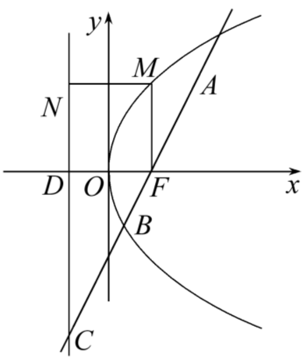
$\because CN\perp AB,\therefore\dfrac{2m-n}{2m^2+2}=-m$，则 $n=2m^3+4m$，则 $C\left(-1,2m^3+4m\right)$，

则 $|CN|=\sqrt{\left(2m^2+2\right)^2+\left(2m^3+2m\right)^2}=2\left(m^2+1\right)\sqrt{m^2+1}$，而 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\left|y_1-y_2\right|=4\left(m^2+1\right)$，由

$|CN|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|AB|$ 得，$m=\pm\sqrt{2}$，所以存在点 $C(-1,\pm 8\sqrt{2})$.

【点睛】本题主要考查抛物线轨迹方程的求法，韦达定理，向量法在解析几何中的具体应用，由特殊三角形的关系求解参数值，运算推理能力，综合性强，属于难题

3．如图，抛物线 E：$y^2=2px$ 的焦点为 F，四边形 $DFMN$ 为正方形，点 M 在抛物线 E 上，过焦点 F 的直线 l 交抛物线 E 于 A，B 两点，交直线 ND 于点 C.



(1)若 B 为线段 AC 的中点，求直线 l 的斜率；

(2)若正方形 $DFMN$ 的边长为 1，直线 MA，MB，MC 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，则是否存在实数 λ，使得 k_1＋