

第3章 符号运算

- 科学计算可分为两类：一类是纯数值的计算，例如求函数的值，以及方程的数值解等等；另一类计算是符号运算，又称代数运算，这是一种智能化的计算，处理的是符号。我们在数学的教学和研究中进行的数学运算多为符号运算。

- MATLAB中的符号数学工具箱（**Symbolic Math Toolbox**）集成了丰富的符号运算功能。基本的符号数学工具箱涉及**100**多种**MATLAB**函数，涉及的内容有：微积分、线性代数、化简代数体现式、方程求解、特殊的数学函数、变量精度算法等等。

【教学内容】

- 符号变量、符号体现式和符号方程的生成
- 符号变量的基本操作
- 符号体现式的操作
- 符号矩阵及符号数组的生成和运算
- 符号极限求解
- 符号微分、求导和积分
- 符号代数方程的求解
- 图示化符号函数计算器的使用措施

■ 【学习目标】

- 掌握符号变量和符号体现式的定义和基本操作。
- 掌握符号矩阵的生成和运算措施。
- 掌握符号微积分运算措施。
- 掌握符号方程的求解措施。
- 了解符号函数计算器的使用

3.1 符号变量、符号体现式和符号方程的生成

- 符号数学工具箱定义了MATLAB的一种新的数据类型：符号对象（**symbolic object**），其类型名标识为“**sym**”。符号对象内部的储存内容是字符串，用来表达符号变量、符号体现式以及矩阵等等。生成符号变量和符号体现式的函数是**sym**和**syms**。

3.1.1 使用sym函数生成符号变量和符号体现式

- **sym**函数能够生成单个的符号数值、符号变量和符号体现式。格式为：
- **S = sym(A)**，假如**A**为字符串，则返回的成果为一种符号变量或者一种符号数值；假如**A**是一种数字或矩阵，则返回成果为该参数的符号表达。
- **x = sym('x')**，创建一种符号变量，该变量的内容为**x**，体现为**x**。
- **x = sym('x','real')**，指定符号变量**x**为实数。
- **x = sym('x','unreal')**，指定**x**为一种纯粹的变量，而不具有其他属性。

- **【例3-1】** 使用**sym**函数创建符号变量和符号体现式。
- 分别输入下列语句：
- **x=sym('x')**
- **y=sym('hello')**
- **z=sym('(1+sqrt(5))/2')**
- **f= sym ('a*x^2+b*x+c')**
- **f-a**
- 返回成果依次为：
- **x =**
- **x**
- **y =**
- **hello**
- **z =**
- **(1+sqrt(5))/2**
- **f =**
- **a*x^2+b*x+c**
- **??? Undefined function or variable 'a'.**
- 本例中，虽然符号体现式**a*x^2+b*x+c**创建成功并将其赋予变量**f**，但并没有定义符号变量**a**，所以系统不能进行**f-a**运算，给出了错误信息。

3.1.2使用syms函数定义符号变量和符号体现式

- **syms**函数能够一次创建多种符号变量，调用格式为：
syms var1,var2,var3...，变量名之间的间隔也能够是空格。
- **【例3-2】** 使用**syms**函数定义符号变量和符号体现式。
- 输入下列语句：
 - **syms a b c x**
 - **f=a*x^2+b*x+c**
 - **f-a**
- 返回成果为：
 - **f=**
 - **a*x^2+b*x+c**
 - **ans=**
 - **a*x^2+b*x+c-a**
- 与例3-1相比，本例中**f-a**运算成功。

3.1.3 符号方程的生成

- 方程与函数的区别在于函数是由数字和变量构成的代数式，而方程则是包括了函数的等式，在MATLAB中，生成符号方程的措施与使用sym函数生成符号体现式类似。
- 【例3-3】 用sym生成符号方程： $a*x^2+b*x+c=0$ 。
- `>>e1=sym('a*x^2+b*x+c= 0')`
- 成果为：
- `e1=`
- $a*x^2+b*x+c=0$

3.2 符号变量的基本操作

- `findsym`函数用于寻找符号变量
- 符号运算的精度拟定
- 数值型变量与符号型变量的转换形式

3.2.1 Findsym函数：寻找符号变量

- **findsym**能够实现对体现式中全部自由变量或指定数目的独立自变量的自动认定。详细格式如下：
- **findsym(S)** 寻找体现式**S**中全部符号变量；
- **findsym(S, n)** 从体现式**S**中找出最接近字母**x**的**n**个符号变量。若**S**中有两个符号变量与 **x** 的距离相等，**ASCII** 码大者优先。常量 **pi, i, j** 不作为符号变量。

- **【例3-4】** 创建符号变量 a, b, n, x 和 t ，建立函数 $f=ax^n+bt$ ，然后求 f 的默认自变量。
- 输入下列语句：
- `syms a b n t x`
- `f=a*x^n+b*t`
- `findsym(f,1)`
- `findsym(f,5)` %找出体现式 f 中按最接近字母 x 的顺序排列的5个默认自变量
- `findsym(f)` %找出体现式 f 中按最接近字母顺序排列的全部符号变量
- 返回成果依次为：
- `f =`
- `a*x^n+b*t`
- `ans =`
- `x`
- `ans =`
- `x,t,n,b,a`
- `ans =`
- `a, b, n, t, x`

3.2.2 符号运算的精度拟定

- MATLAB提供了digits和vpa函数，用以控制符号运算的精度。
- （1）digits函数用于要求运算精度，例如：
digits(20); 这个语句就要求了运算精度是20位有效数字。
- （2）vpa函数：但凡需要控制精度的，都对运算体现式使用vpa函数。

- **【例3-5】** 控制运算精度为5位有效数字:

```
>>digits(5)
```

```
>> a=vpa(sqrt(2))
```

```
a=
```

```
1.4142
```

```
>> b=sqrt(2)
```

`vpa`函数对运算体现式的每一步运算都控制精度，并非只控制成果。另外，也可使用`a=vpa(sqrt(2),5)`格式，不需事先用`digits`设定运算精度，`a`的值将依然是1.4142，

3.2.3 数值型变量与符号型变量的转换

- 【例3-6】 将数值变量转变为符号变量
- `>> t=0.1`
- `t =`
- `0.1000`
- `>> sym(t)` %有理数形式
- `ans =`
- `1/10`
- `>> sym(t,'r')` %有理数形式
- `ans =`
- `1/10`
- `>> sym(t,'f')` %浮点数形式
- `ans =`
- `'1.9999999999999999a'*2^(-4)`

3.3 符号体现式的基本操作

- 符号体现式的四则运算
- 合并符号体现式的同类项
- 符号多项式的因式分解
- 符号体现式的简化
- 符号体现式的展开
- 提取有理式的分子和分母
- `subs`函数用于替代求值
- 反函数的运算
- 复合函数的运算

3.3.1 四则运算

- 符号体现式也与一般的算术体现式一样，能够进行加、减、乘、除等四则运算。
- 【例3-7】符号体现式的四则运算
- 输入下列语句：
- `syms x y a b`
- `fun1=sin(x)+cos(y)`
- `fun2=a+b`
- `fun3=fun1*fun2`
- 转换成果为：
- `fun1=`
- `sin(x)+cos(y)`
- `fun2=`
- `a+b`
- `fun3=`
- `(sin(x)+cos(y))*(a+b)`

3.3.2 合并符号体现式的同类项(**collect**)

- **【例3-8】** 符号多项式的同类项合并。
- `>> syms x y`
- `>> collect(x^2*y + y*x - x^2 - 2*x)`
- `ans =`
- $(y-1)*x^2+(y-2)*x$
- `>> f = -1/4*x*exp(-2*x)+3/16*exp(-2*x);`
- `>> collect(f) %对符号多项式f按照默认变量x合并同类项。`
- `ans =`
- $-1/4*x*exp(-2*x)+3/16*exp(-2*x)$

3.3.3 符号多项式的因式分解(factor)

- 【例3-9】 对体现式 $f=a^3-1$ 进行因式分解。
- 输入:
- `f = sym('a^3-1');`
- `factor(f)`
- 成果为:
- `ans =`
- `(a-1)*(a^2+a+1)`

3.3.4 符号体现式的简化(**simplify**)

- 【例3-10】 用simplify函数化简符号体现式。
- 输入：
 - `f = sym('sin(x)^2+cos(x)^2');`
 - `S=sym('exp(c*log(sqrt(a+b)))');`
 - **simplify(f)**
 - **simplify(S)**
- 返回成果为：
 - `ans =`
 - `1`
 - `ans =`
 - `(a+b)^(1/2*c)`

3.3.5 符号体现式的展开(**expand**)

- **调用格式: `expand(f)`**
- **【例3-11】** 展开体现式 $f=(x+1)^5$ 和 $f=\sin(x+y)$
- 输入:
- `syms x y` %定义符号变量
- `f=(x+1)^5;` %创建符号体现式并赋给f
- **`expand(f)`** %展开符号体现式f
- `f=sin(x+y);`
- **`expand(f)`**
- 返回成果为:
- `ans =`
- $x^5+5*x^4+10*x^3+10*x^2+5*x+1$
- `ans =`
- $\sin(x)*\cos(y)+\cos(x)*\sin(y)$

3.3.6 提取有理式的分子和分母(**numden**)

- 假如符号体现式是一种有理分式或能够展开为有理分式，可利用**numden**函数来提取符号体现式**S**中的分子和分母。其一般调用格式为：
- **[n,d]=numden(S)**
- 该函数提取符号体现式**S**的分子 (**numerator**) 和分母 (**denominator**)，分别将它们存储在**n**与**d**中。

- 【例3-12】 求有理式 $f=x/y+y/x$ 分子和分母。
- 输入:
- `syms x y`
- `f=x/y+y/x;`
- `[n,d]=numden(f)`
- 返回成果为:
- `n =`
- `x^2+y^2`
- `d =`
- `y*x`

3.3.7 符号体现式的替代 (subs)

- 调用格式为:
- $R = \text{subs}(S, \text{old}, \text{new})$
- 【例3-13】 subs函数用于替代求值操作。
- `>> syms x y`
- `f = x^2*y + 5*x*sqrt(y)`
- `f =`
- $x^2*y + 5*x*y^{(1/2)}$
- `>> subs(f, x, 3)`
- `ans =`
- $9*y + 15*y^{(1/2)}$
- `>> subs(f, y, 3)`
- `ans =`
- $3*x^2 + 5*x*3^{(1/2)}$

3.3.8 反函数的求解

- `finverse`函数用来求解符号函数相应的反函数。格式为：
- `finverse(f,v)`
- 它返回自变量为`v`的符号函数`f`的反函数，若`v`省略，得到的反函数自变量与原函数相同。

- 【例3-14】 用`finverse`求解反函数
- `>>syms x y`
- `>>finverse(1/tan(x))` %求反函数，自变量为`x`
- `ans =`
- `atan(1/x)`
- `>>f = x^2+y;`
- `>>finverse(f,y)` %求反函数，自变量为`y`
- `ans =`
- `-x^2+y`

3.3.9 复合函数的运算 (compose)

【例3-14】 用compose求复合函数

```
>>syms x y z t u
```

```
• >> f = 1/(1 + x^2) ;
```

```
• >>g = sin(y);
```

```
• >>h = x^t;
```

```
• >>p = exp(-y/u) ;
```

```
• >>compose(f,g)
```

```
• ans=
```

```
• 1/(1+sin(y)^2)
```

```
• >>compose(f,g,t)
```

```
• ans=
```

```
• 1/(1+sin(t)^2)
```

3.4 符号矩阵的生成和运算

- 符号矩阵的生成
- 在MATLAB中，符号矩阵的生成与数值矩阵的有关操作很相同。创建符号矩阵的措施有下列几种：
 - (1) 用`sym`命令直接创建符号矩阵；
 - (2) 用类似创建一般数值矩阵的措施创建符号矩阵；
 - (3) 由数值矩阵转换为符号矩阵。

符号矩阵的输出格式与数值矩阵有所不同，其每一行用“`[]`”标识。

- **1. 用sym命令直接创建符号矩阵**
- 这时sym命令的使用措施与前面创建符号体现式及方程的使用方法类似。所创建的符号矩阵的元素能够是任何符号对象，**且元素的长度允许不同**。在输入格式上，矩阵行之间以“;”分割，各矩阵元素之间用“,”或空格分隔。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/588037071006006137>