平面向量痛点问题之三角形“四心”问题--2024高一数学微专题含答案

平面向量痛点问题之三角形“四心”问题

【题型归纳目录】

【知识点梳理】

一、四心的概念介绍：

(1) 重心：中线的交点，重心将中线长度分成2：1.

(2) 内心：角平分线的交点（内切圆的圆心），角平分线上的任意点到角两边的距离相等.

(3) 外心：中垂线的交点（外接圆的圆心），外心到三角形各顶点的距离相等.

(4) 垂心：高线的交点，高线与对应边垂直.

二、三角形四心与推论：

(1)O是$\triangle ABC$的重心：$S_{\triangle BOC}:S_{\triangle COA}:S_{\triangle A0B}=1:1:1\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

(2)O是$\triangle ABC$的内心：$S_{\triangle B0C}:S_{\triangle COA}:S_{\triangle AOB}=a:b:c\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

(3)O是$\triangle ABC$的外心：

$S_{\triangle B0C}:S_{\triangle COA}:S_{\triangle AOB}=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C\Leftrightarrow\sin 2A\overrightarrow{OA}+\sin 2B\overrightarrow{OB}+\sin 2C\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

(4)O是$\triangle ABC$的垂心：

$S_{\triangle B0C}:S_{\triangle COA}:S_{\triangle AOB}=\tan A:\tan B:\tan C\Leftrightarrow\tan A\overrightarrow{OA}+\tan B\overrightarrow{OB}+\tan C\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

【方法技巧与总结】

(1) 内心：三角形的内心在向量$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$所在的直线上.

$|\overrightarrow{AB}|\cdot\overrightarrow{PC}+|\overrightarrow{BC}|\cdot\overrightarrow{PC}+|\overrightarrow{CA}|\cdot\overrightarrow{PB}=\vec{0}\Leftrightarrow P$为$\triangle ABC$的内心.

(2) 外心：$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|\Leftrightarrow P$为$\triangle ABC$的外心.

(3) 垂心：$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\Leftrightarrow P$为$\triangle ABC$的垂心.

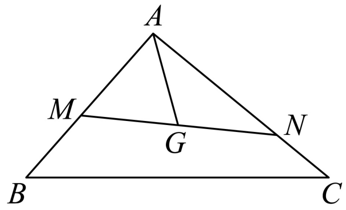
(4) 重心：$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow P$为$\triangle ABC$的重心.

【典型例题】

题型一：重心定理

题目 1 (2024·重庆北碚·高一西南大学附中校考阶段练习) 如图所示，已知点G是$\triangle ABC$的重心，过点G作直线分别与AB，AC两边交于M，N两点（点N与点C不重合），设$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$的

值为（　　）



A. 3　　　B. 4　　　C. 5　　　D. 6

题目 2 (2024·全国·高一随堂练习) 已知$\triangle ABC$中，点G为$\triangle ABC$所在平面内一点，则“$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}=0$”是“点$G$为$\triangle ABC$重心”的（　　）

A. 充分不必要条件　　　B. 必要不充分条件　　　C. 充要条件　　　D. 既不充分也不必要条件

题目 3 (2024·全国·高一专题练习) 已知O是三角形ABC所在平面内一定点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C}\right)(\lambda\geqslant 0)$，则$P$点轨迹一定通过三角形$ABC$的（　　）

A. 内心　　　B. 外心　　　C. 垂心　　　D. 重心

题型二：内心定理

题目 1 (2024·全国·高一专题练习) 在$\triangle ABC$中，$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$，若$O$为内心，且满足$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$x+y$的最大值为______.

题目 2 (2024·江苏南通·高一如皋市第一中学期末) 已知点P为$\triangle ABC$的内心，$\angle BAC=\dfrac{2}{3}\pi$，$AB=1$，$AC=2$，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$______.

题目 3 (2024·广西柳州·高一统考期末) 设O为$\triangle ABC$的内心，$AB=AC=5$，$BC=8$，$\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}(m,n\in R)$，则$m+n=$______

题型三：外心定理

题目 1 (2024·吉林长春·高一东北师大附中校考阶段练习) 已知点O是$\triangle ABC$的外心，$AB=4$，$AC=2$，$\angle BAC$为钝角，M是边BC的中点，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}=$______.

题目 2 (2024·安徽六安·高一六安市裕安区新安中学校考期末) 已知O是平面上一定点，A、B、C是平面上不共线的三个点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|\cos A}+\dfrac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|\cos B}\right)$，$\lambda\in R$，则$P$的轨迹一定经过$\triangle ABC$的______.（从“重心”，“外心”，“内心”，“垂心”中选择一个填写）

题目 3 (2024·四川遂宁·高一射洪中学校考阶段练习) 已知$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$AB=6$，$AC=4$，O为$\triangle ABC$的外心，若$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu$的值为（　　）

A. 1　　　B. 2　　　C. $\dfrac{11}{18}$　　　D. $\dfrac{1}{2}$

题型四：垂心定理

题目 1 (2024·江苏泰州·高一统考期末) 已知$\triangle ABC$的垂心为点D，面积为15，且$\angle ABC=45°$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______；若$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则$|\overrightarrow{BD}|=$______.