# 2024 届北京市房山区高三练习题二（全国卷 I）数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知函数 $f(x)\square\frac{k}{x}(k\square N_{\square})$，$g(x)\square\frac{\ln x\square}{x\square 1}$，若对任意的 $c\square 1$，存在实数 $a,b$ 满足 $0\square a\square b\square c$，使得 $g(a)\square f(b)\square g(c)$，则 $k$ 的最大值是(　　)

A．3　　B．2　　C．4　　D．5

2．从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学，物理，化学，生物四科竞赛，其中甲不能参加生物竞赛，则不同的参赛方案种数为

A．48　　B．72　　C．90　　D．96

3．已知命题 $p$：$\square x\square R$，$x^2\square x\square 1\square 0$；命题 $q$：$\square x\square R$，$x^2\square 2^x$，则下列命题中为真命题的是（　　）

A．$p\square q$　　B．$\square p\square q$　　C．$p\square\square q$　　D．$\square p\square\square q$

4．a 为正实数，i 为虚数单位，$\left|\frac{a\square i}{i}\right|\square 2$，则 a=（ ）

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

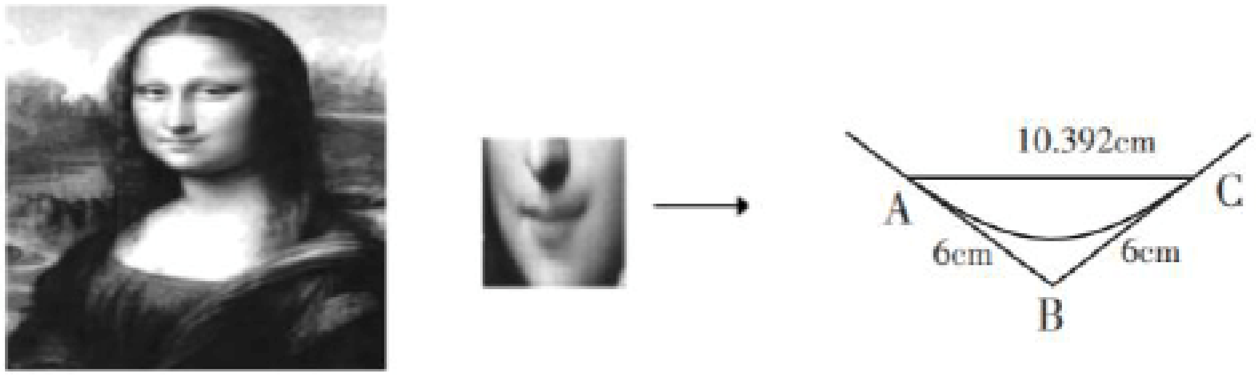
5．已知函数 $f(x)\square e^{x\square 1}\square x\square 2$ 的零点为 m，若存在实数 n 使 $x^2\square ax\square a\square 3\square 0$ 且 $|m\square n|\square 1$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[2,4]$　　B．$\square 2,\frac{7}{3}\square$　　C．$\square\frac{7}{3},3\square$　　D．$[2,3]$

6．若双曲线 $C$：$\frac{x^2}{m}\square y^2\square 1$ 的一条渐近线方程为 $3x\square 2y\square 0$，则 $m\square$（　　）

A．$\frac{4}{9}$　　B．$\frac{9}{4}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{2}$

7．达芬奇的经典之作《蒙娜丽莎》举世闻名.如图，画中女子神秘的微笑,，数百年来让无数观赏者人迷.某业余爱好者对《蒙娜丽莎》的缩小影像作品进行了粗略测绘，将画中女子的嘴唇近似看作一个圆弧，在嘴角 $A,C$ 处作圆弧的切线，两条切线交于 B 点，测得如下数据：$AB\square 6cm, BC\square 6cm, AC\square 10.392cm$（其中 $\frac{\sqrt{3}}{2}\square 0.866$）.根据测量得到的结果推算：将《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角大约等于（　　）




A. $\frac{□}{3}$　　B. $\frac{□}{4}$　　C. $\frac{□}{2}$　　D. $\frac{2□}{3}$

8．已知直线 x□y□t 与圆 x² □y² □2t□t² □t□R□ 有公共点，则 t(4□t) 的最大值为（　　）

A．4　　B. $\frac{28}{9}$　　C. $\frac{32}{9}$　　D. $\frac{32}{7}$

9．若点$(x,y)$位于由曲线$x=|y-2|+1$与$x=3$围成的封闭区域内（包括边界），则$\frac{y+1}{x-2}$的取值范围是（　）

A．$[-3,1]$　　B．$[-3,5]$　　C．$(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$D．$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

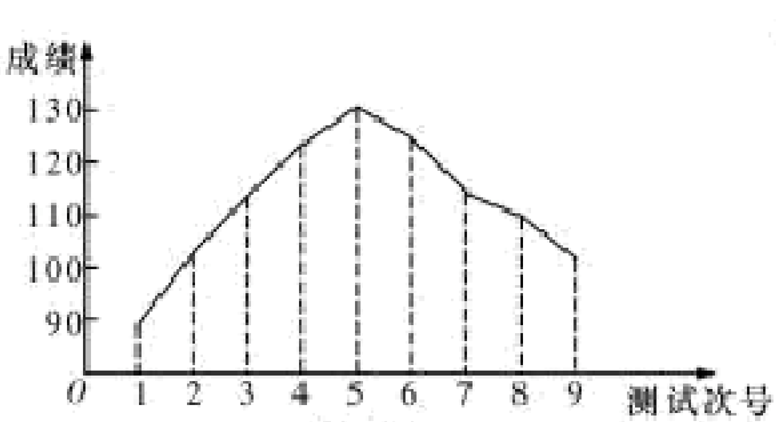
10．若复数 z 满足 (1□i)z□|3□4i|，则 z 的虚部为（　　）

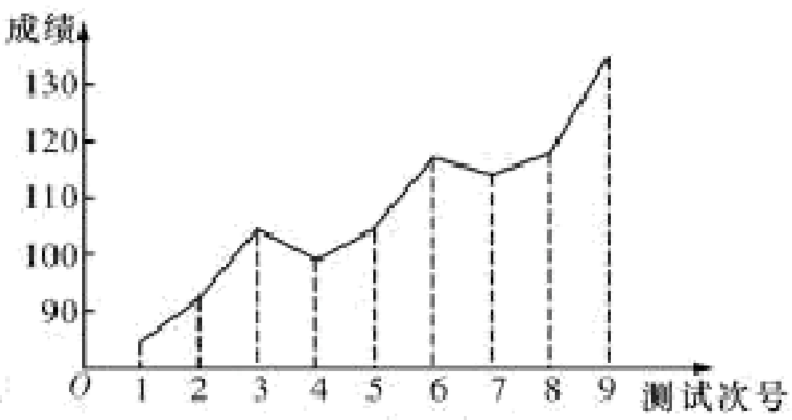
A．5　　B. $\frac{5}{2}$　　C. □$\frac{5}{2}$　　D．−5

11．在三棱锥 P□ABC 中，AB□BC□5，AC□6，P 在底面 ABC 内的射影 D 位于直线 AC 上，且 AD□2CD，PD□4.设三棱锥 P□ABC 的每个顶点都在球 Q 的球面上，则球 Q 的半径为（　　）

A. $\frac{\sqrt{689}}{8}$　　B. $\frac{\sqrt{689}}{6}$　　C. $\frac{5\sqrt{26}}{8}$　　D. $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

12．对某两名高三学生在连续 9 次数学测试中的成绩（单位：分）进行统计得到折线图，下面是关于这两位同学的数学成绩分析．




①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性，故平均成绩为 130 分；

②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计，估计该同学平均成绩在区间$[110,120]$内；

③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性，且为正相关；

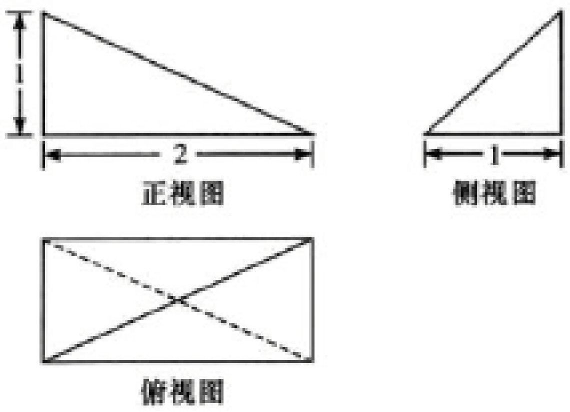
④乙同学连续九次测验成绩每一次均有明显进步．

其中正确的个数为（　　）

A．$4$　　　　B．$3$　　　　C．$2$　　　　D．$1$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体外接球的表面积是______.



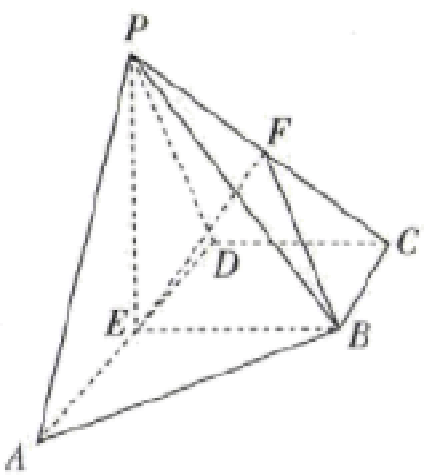

14．点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的右支上，其左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$，直线 $PF_1$ 与以坐标原点 $O$ 为圆心、$a$ 为半径的圆相切于点 A，线段 $PF_1$ 的垂直平分线恰好过点 $F_2$，则该双曲线的渐近线的斜率为__________.

15．在边长为 4 的菱形 ABCD 中，$A=60°$，点 P 在菱形 ABCD 所在的平面内．若 $PA=3, PC=\sqrt{21}$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$_____.

16．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n$，则 $a_n=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 ABCD 为直角梯形，$BC//AD$，$\angle BCD=90°$，$PA=CD$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD=1$，$PA=PD$，E，F 分别为 AD，PC 的中点.




（1）求证：$PC=2EF$.

（2）若 $EF\perp PC$，求二面角 $P-BE-F$ 的余弦值.

18．（12 分）某工厂的机器上有一种易损元件 A，这种元件在使用过程中发生损坏时，需要送维修处维修．工厂规定当日损坏的元件 A 在次日早上 8：30 之前送到维修处，并要求维修人员当日必须完成所有损坏元件 A 的维修工作．每个工人独立维修 A 元件需要时间相同．维修处记录了某月从 1 日到 20 日每天维修元件 A 的个数，具体数据如下表：

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日期 | 1 日 | 2 日 | 3 日 | 4 日 | 5 日 | 6 日 | 7 日 | 8 日 | 9 日 | 10 日 |
| 元件A个数 | 9 | 15 | 12 | 18 | 12 | 18 | 9 | 9 | 24 | 12 |
| 日期 | 11 日 | 12 日 | 13 日 | 14 日 | 15 日 | 16 日 | 17 日 | 18 日 | 19 日 | 20 日 |
| 元件A个数 | 12 | 24 | 15 | 15 | 15 | 12 | 15 | 15 | 15 | 24 |

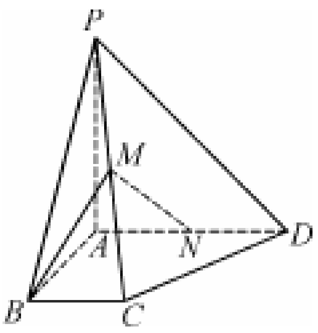
从这 20 天中随机选取一天，随机变量 X 表示在维修处该天元件 A 的维修个数．

（Ⅰ）求 X 的分布列与数学期望；

（Ⅱ）若 a，b$\in$N*，且 b-a=6，求 $P(a\le X\le b)$ 最大值；

（Ⅲ）目前维修处有两名工人从事维修工作，为使每个维修工人每天维修元件 A 的个数的数学期望不超过 4 个，至少需要增加几名维修工人？（只需写出结论）

19．（12 分）如图，在四棱锥 PABCD 中，PA⊥平面 ABCD，∠ABC=∠BAD=90°，AD=AP=4，AB=BC=2，M 为 PC 的中点．




（1）求异面直线 AP，BM 所成角的余弦值；

（2）点 N 在线段 AD 上，且 AN=λ，若直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$，求 λ的值．

20．（12 分）设函数 $f(x)=2\sin x\square|a\square3|\square|a\square1|$．

（1）若 $f\left(\frac{\square}{2}\right)\square6$，求实数 $a$ 的取值范围；

（2）证明：$\square x\in R$，$f(x)\square|a\square3|\square\left|\square\frac{1}{a}\square1\right|$ 恒成立．

21．（12 分）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c 已知 $a^2\square c^2\square\sqrt{2}ac\square b^2$，$\sqrt{5}\sin A\square\cos B\square0$．

（1）求 $\cos C$；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{5}{2}$，求 b．

22.（10 分）网络看病就是国内或者国外的单个人、多个人或者单位通过国际互联网或者其他局域网对自我、他人或者某种生物的生理疾病或者机器故障进行查找询问、诊断治疗、检查修复的一种新兴的看病方式.因此，实地看病与网络看病便成为现在人们的两种看病方式，最近某信息机构调研了患者对网络看病，实地看病的满意程度，在每种看病方式的患者中各随机抽取 15 名，将他们分成两组，每组 15 人，分别对网络看病，实地看病两种方式进行满意度测评，根据患者的评分（满分 100 分）绘制了如图所示的茎叶图：

| 网络看病 | | 实地看病 |
|---|---|---|
| 1 1 2 3 5 6 | 6 | |
| 2 3 3 4 | 7 | 2 4 5 8 9 |
| 2 5 5 8 | 8 | 3 6 7 7 8 8 |
| 2 | 9 | 4 6 8 8 |

（1）根据茎叶图判断患者对于网络看病、实地看病那种方式的满意度更高？并说明理由；

（2）若将大于等于 80 分视为“满意”，根据茎叶图填写下面的列联表：

| | 满意 | 不满意 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 网络看病 | | | |
| 实地看病 | | | |
| 总计 | | | |

并根据列联表判断能否有 $90\%$ 的把握认为患者看病满意度与看病方式有关？

（3）从网络看病的评价“满意”的人中随机抽取 2 人，求这 2 人平分都低于 90 分的概率.

附 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

| $P(K^2\geq k_0)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

# 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．A

【解析】

根据条件将问题转化为 $\frac{\ln x+1}{x-1}>\frac{k}{x}$，对于 $x>1$ 恒成立，然后构造函数 $h(x)=x\cdot\frac{\ln x+1}{x-1}$，然后求出 $h(x)$ 的范围，进一步得到 $k$ 的最大值.

【详解】

$\because f(x)=\frac{k}{x}(k\in N^*)$，$g(x)=\frac{\ln x+1}{x-1}$，对任意的 $c>1$，存在实数 $a,b$ 满足 $0<a<b<c$，使得 $g(a)=f(b)=g(c)$，

$\therefore$ 易得 $g(c)=f(b)>f(c)$，即 $\frac{\ln c+1}{c-1}>\frac{k}{c}$ 恒成立，

$\therefore \frac{\ln x+1}{x-1}>\frac{k}{x}$，对于 $x>1$ 恒成立，

设 $h(x)=x\cdot\frac{\ln x+1}{x-1}$，则 $h'(x)=\frac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$，

令 $q(x)=x-2-\ln x$，$\therefore q'(x)=1-\frac{1}{x}>0$ 在 $x>1$ 恒成立，

$\because q(3)=3-2-\ln 3<0$，$q(4)=4-2-\ln 4>0$，

故存在 $x_0\in(3,4)$，使得 $q(x_0)=0$，即 $x_0-2=\ln x_0$，

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$q(x)<0$，$h(x)$ 单调递减;

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$q(x)>0$，$h(x)$ 单调递增．

$\therefore h(x)_{min}=h(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}$,将 $x_0-2=\ln x_0$ 代入得：

$\therefore h(x)_{min}=h(x_0)=\frac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$,

$\because k\in N^*$，且 $k<h(x)_{min}=x_0$，

$\therefore k\le 3$

故选：A

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的单调性，零点存在定理和不等式恒成立问题，考查了转化思想，属于难题.

2．D

【解析】

因甲不参加生物竞赛，则安排甲参加另外3场比赛或甲学生不参加任何比赛

①当甲参加另外3场比赛时,共有$C_3^1\cdot A_4^3$=72 种选择方案;②当甲学生不参加任何比赛时,共有$A_4^4$=24 种选择方案.综上所述，所有参赛方案有72+24=96 种

故答案为：96

点睛：本题以选择学生参加比赛为载体，考查了分类计数原理、排列数与组合数公式等知识，属于基础题.

3．B

【解析】

根据$\Delta<0$，可知命题$p$的真假，然后对$x$取值，可得命题 $q$的真假，最后根据真值表，可得结果.

【详解】

对命题$p$：

可知$\Delta=(-1)^2-4<0$，

所以$\forall x\in R$，$x^2-x+1>0$

故命题$p$为假命题

命题 $q$：

取$x=3$，可知$3^2>2^3$

所以$\exists x\in R$，$x^2>2^x$

故命题$q$为真命题

所以$\neg p\wedge q$为真命题

故选：B

【点睛】

本题主要考查对命题真假的判断以及真值表的应用，识记真值表，属基础题.

4．B

【解析】

$\because|\frac{a+i}{i}|=2\Rightarrow\sqrt{a^2+1}=2\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}\because a>0,\therefore a=\sqrt{3}$，选 B.

5．D

【解析】

易知$f(x)$单调递增,由$f(1)=0$可得唯一零点$m=1$,通过已知可求得$0<n<2$,则问题转化为使方程

$x^2 - ax + a + 3 = 0$ 在区间 $[0,2]$ 上有解,化简可得 $a = x - 1 + \frac{4}{x-1} + 2$,借助对号函数即可解得实数 a 的取值范围.

【详解】

易知函数 $f(x) = e^{x-1} + x - 2$ 单调递增且有惟一的零点为 $m = 1$，所以 $|1 - n| \le 1$，$\therefore 0 \le n \le 2$，问题转化为：使方程 $x^2 - ax + a + 3 = 0$ 在区间 $[0,2]$ 上有解，即 $a = \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 4}{x - 1} = x - 1 + \frac{4}{x-1} + 2$

在区间 $[0,2]$ 上有解，而根据“对勾函数”可知函数 $y = x - 1 + \frac{4}{x-1} + 2$ 在区间 $[0,2]$ 的值域为 $[2,3]$，$\therefore 2 \le a \le 3$.

故选 D.

【点睛】

本题考查了函数的零点问题,考查了方程有解问题,分离参数法及构造函数法的应用,考查了利用“对勾函数”求参数取值范围问题,难度较难.

6．A

【解析】

根据双曲线的渐近线列方程，解方程求得 $m$ 的值.

【详解】

由题意知双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\frac{1}{\sqrt{m}}x\ (m > 0)$，$3x \pm 2y = 0$ 可化为 $y = \pm\frac{3}{2}x$，则 $\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{3}{2}$，解得 $m = \frac{4}{9}$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查双曲线的渐近线，属于基础题.

7．A

【解析】

由已知 $AB = BC = 6$，设 $\angle ABC = 2\theta$. 可得 $\sin\theta = \frac{5.196}{7} = 0.866$. 于是可得 $\theta$，进而得出结论.

【详解】

解：依题意 $AB = BC = 6$，设 $\angle ABC = 2\theta$.

则 $\sin\theta = \frac{5.196}{7} = 0.866 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\theta = \frac{\pi}{3}$，$2\theta = \frac{2\pi}{3}$.

设《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角为 $\alpha$.

则 $\alpha = 2\pi - 2\theta$,

$\square\square\square\frac{\square}{3}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了直角三角形的边角关系、三角函数的单调性、切线的性质，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

8．C

【解析】

根据 $x^2+y^2=2t-t^2\ (t\in R)$ 表示圆和直线 $x+y=t$ 与圆 $x^2+y^2=2t-t^2\ (t\in R)$ 有公共点，得到 $0<t\le\frac{4}{3}$，再利用二次函数的性质求解.

【详解】

因为 $x^2+y^2=2t-t^2\ (t\in R)$ 表示圆，

所以 $2t-t^2>0$，解得 $0<t<2$，

因为直线 $x+y=t$ 与圆 $x^2+y^2=2t-t^2\ (t\in R)$ 有公共点，

所以圆心到直线的距离 $d\le r$，

即 $\frac{|t|}{\sqrt{2}}\le\sqrt{2t-t^2}$，

解得 $0\le t\le\frac{4}{3}$，

此时 $0<t\le\frac{4}{3}$，

因为 $f(t)=t(4-t)=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$，在 $\left(0,\frac{4}{3}\right]$ 递增，

所以 $t(4-t)$ 的最大值 $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{32}{9}$.

故选：C

【点睛】

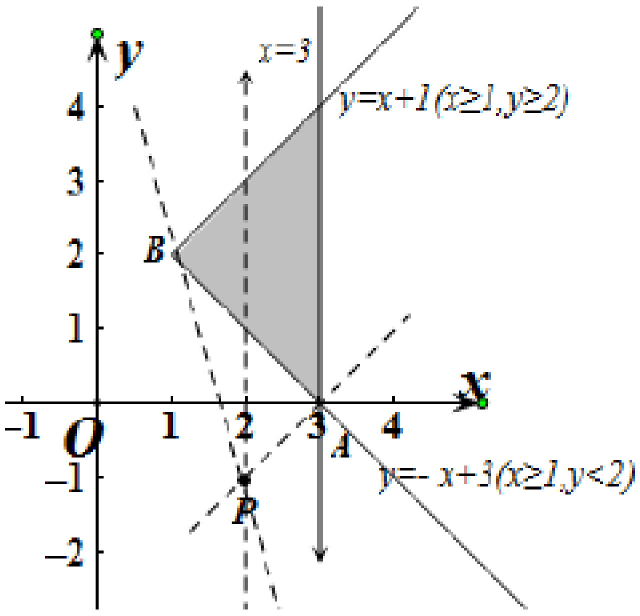
本题主要考查圆的方程，直线与圆的位置关系以及二次函数的性质，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

9．D

【解析】

画出曲线 $x=|y-2|+1$ 与 $x=3$ 围成的封闭区域，$\frac{y+1}{x-2}$ 表示封闭区域内的点 $(x,y)$ 和定点 $(2,-1)$ 连线的斜率，然后结合图形求解可得所求范围.

画出曲线$x=|y-2|+1$与$x=3$围成的封闭区域，如图阴影部分所示．




$\frac{y+1}{x-2}$表示封闭区域内的点$(x,y)$和定点$P(2,-1)$连线的斜率，

设$k=\frac{y+1}{x-2}$，结合图形可得$k\geq k_{PA}$或$k\leq k_{PB}$，

由题意得点 A,B 的坐标分别为$A(3,0),B(1,2)$，

∴$k_{PA}=\frac{1}{3-2}=1,k_{PB}=\frac{2-(-1)}{1-2}=-3$，

∴$k\geq 1$或$k\leq -3$，

∴$\frac{y+1}{x-2}$的取值范围为$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$．

故选 D．

【点睛】

解答本题的关键有两个：一是根据数形结合的方法求解问题，即把$\frac{y+1}{x-2}$看作两点间连线的斜率；二是要正确画出两曲线所围成的封闭区域．考查转化能力和属性结合的能力，属于基础题．

10．C

【解析】

把已知等式变形，再由复数代数形式的乘除运算化简得答案．

【详解】

由$(1+i)z=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

得$z=\frac{5}{1+i}=\frac{5(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$，

∴z 的虚部为$-\frac{5}{2}$．

故选 C．

【点睛】