

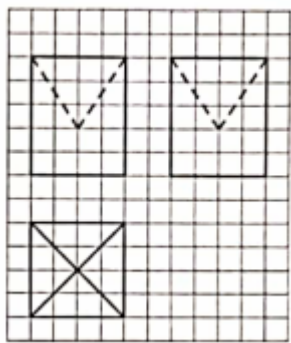
2023-2024 学年广东省珠海市第二中学高三下期末联考（数学试题文）试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $F(-c, 0)$ 为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左焦点，过点 F 的直线与圆 $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}c^2$ 交于 A 、 B 两点，（ A 在 F 、 B 之间）与双曲线 E 在第一象限的交点为 P ， O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BP}$ ，且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{3}{100}c^2$ ，则双曲线 E 的离心率为（ ）
A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. 5
2. 设复数 $z = \frac{2-i}{1+3i}$ ，则 $|z| =$ （ ）
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin 80^\circ \cos 50^\circ + \cos 140^\circ \sin 10^\circ =$ （ ）
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
4. 博览会安排了分别标有序号为“1 号”“2 号”“3 号”的三辆车，等可能随机顺序前往酒店接嘉宾。某嘉宾突发奇想，设计两种乘车方案。方案一：不乘坐第一辆车，若第二辆车的车序号大于第一辆车的车序号，就乘坐此车，否则乘坐第三辆车；方案二：直接乘坐第一辆车。记方案一与方案二坐到“3 号”车的概率分别为 P_1 ， P_2 ，则（ ）
A. $P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{4}$ B. $P_1 = P_2 = \frac{1}{3}$ C. $P_1 + P_2 = \frac{5}{6}$ D. $P_1 < P_2$
5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 -2 ，前 n 项和为 S_n ， a_1 ， a_2 ， a_3 为某三角形的三边长，且该三角形有一个内角为 120° ，若 $S_n \leq S_m$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立，则实数 $m =$ （ ）。
A. 6 B. 5 C. 4 D. 3
6. 如图所示，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是由一个棱柱挖去一个棱锥后的几何体的三视图，则该几何体的体积为



- A. 72 B. 64 C. 48 D. 32

7. 要排出高三某班一天中，语文、数学、英语各2节，自习课1节的功课表，其中上午5节，下午2节，若要求2节语文课必须相邻且2节数学课也必须相邻（注意：上午第五节和下午第一节不算相邻），则不同的排法种数是（ ）

- A. 84 B. 54 C. 42 D. 18

8. 若函数 $f(x) = x^3 - mx^2 + 2x (m \in R)$ 在 $x = 1$ 处有极值，则 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为（ ）

- A. $\frac{14}{27}$ B. 2 C. 1 D. 3

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x - 2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f^2(x) + bf(x) + c$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 ，则

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 =$ （ ）

- A. 12 B. 11 C. 6 D. 3

10. 已知复数 z 满足 $(z - i)(-i) = 5$ ，则 $z =$ （ ）

- A. $6i$ B. $-6i$ C. -6 D. 6

11. 设 $a = 0.82^{0.5}$ ， $b = \sin 1$ ， $c = \lg 3$ ，则 a, b, c 三数的大小关系是

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$
C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

12. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sin^2(x + \frac{\pi}{3})$ ，则 $f(x)$ 的最小值为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $2b \cos B = a \cos C + c \cos A$ ，若 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列， $a_1 + a_2 = -2, a_2 + a_3 = 6$ ，则 $a_5 =$ _____.

15. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, $a = \sqrt{2}$, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = \sqrt{6}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

16. 已知两点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, 若直线 $x - y + a = 0$ 上存在点 $P(x,y)$ 满足 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$, 则实数 a 满足的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 在平面直角坐标系中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{6} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 是参数), 以原点 O 为极点, x 轴的正半

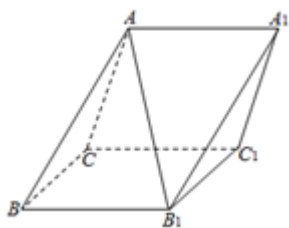
轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

(1) 求直线 l 与曲线 C 的普通方程, 并求出直线的倾斜角;

(2) 记直线 l 与 y 轴的交点为 Q , M 是曲线 C 上的动点, 求点 M, Q 的最大距离.

18. (12 分) 如图, 在斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ACC_1A_1 与侧面 CBB_1C_1 都是菱形,

$\angle ACC_1 = \angle CC_1B_1 = 60^\circ$, $AC = 2$.



(I) 求证: $AB_1 \perp CC_1$;

(II) 若 $AB_1 = \sqrt{6}$, 求平面 CAB_1 与平面 A_1AB_1 所成的锐二面角的余弦值.

19. (12 分) 已知直线 $y = x - 1$ 是曲线 $f(x) = a \ln x$ 的切线.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式,

(2) 若 $t \leq 3 - 4 \ln 2$, 证明: 对于任意 $m > 0$, $h(x) = mx - \sqrt{x} + f(x) + t$ 有且仅有一个零点.

20. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当直线 l 的倾斜角为 45° 时, 求线段 AB 的中点的横坐标;

(2) 设点 A 关于 x 轴的对称点为 C , 求证: M, B, C 三点共线;

(3) 设过点 M 的直线交椭圆于 G, H 两点, 若椭圆上存在点 P , 使得 $\vec{OG} + \vec{OH} = \lambda \vec{OP}$ (其中 O 为坐标原点), 求实数 λ 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$.

(I) 判断函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上零点的个数, 并证明;

(II) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上的极值点从小到大分别为 x_1, x_2 , 证明: $f(x_1) + f(x_2) < 0$

22. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a^2 - ab - 2b^2 = 0$.

(1) 若 $C = \frac{\pi}{3}$, 证明: $\sqrt{3} \sin B = \sin C$.

(2) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, $c = 7$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

过点 O 作 $OM \perp PF$, 可得出点 M 为 AB 的中点, 由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{3}{100}c^2$ 可求得 $\cos \angle AOB$ 的值, 可计算出

$\cos \frac{\angle AOB}{2}$ 的值, 进而可得出 $|OM|$, 结合 $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BP}$ 可知点 M 为 PF 的中点, 可得出 $|PF'|$, 利用勾股定理求得 $|PF|$

(F' 为双曲线的右焦点), 再利用双曲线的定义可求得该双曲线的离心率的值.

【详解】

如下图所示, 过点 O 作 $OM \perp PF$, 设该双曲线的右焦点为 F' , 连接 PF' .

【点睛】

本题考查复数的基本概念和基本运算,属于基础题.

3、D

【解析】

利用 $10^\circ = 90^\circ - 80^\circ$, $140^\circ = 90^\circ + 50^\circ$, 根据诱导公式进行化简, 可得 $\sin 80^\circ \cos 50^\circ - \cos 80^\circ \sin 50^\circ$, 然后利用两角差的正弦定理, 可得结果.

【详解】

$$\text{由 } 80^\circ = 90^\circ - 10^\circ, 140^\circ = 90^\circ + 50^\circ$$

$$\text{所以 } \sin 10^\circ = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\cos 140^\circ = \cos(90^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ,$$

$$\text{所以原式} = \sin 80^\circ \cos 50^\circ - \cos 80^\circ \sin 50^\circ = \sin(80^\circ - 50^\circ)$$

$$\text{所以原式} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{故 } \sin 80^\circ \cos 50^\circ + \cos 140^\circ \sin 10^\circ = \frac{1}{2}$$

故选: D

【点睛】

本题考查诱导公式以及两角差的正弦公式, 关键在于掌握公式, 属基础题.

4、C

【解析】

将三辆车的出车可能顺序一一列出, 找出符合条件的即可.

【详解】

三辆车的出车顺序可能为: 123、132、213、231、312、321

方案一坐车可能: 132、213、231, 所以, $P_1 = \frac{3}{6}$;

方案二坐车可能: 312、321, 所以, $P_1 = \frac{2}{6}$;

$$\text{所以 } P_1 + P_2 = \frac{5}{6}$$

故选 C.

【点睛】

本题考查了古典概型的概率的求法, 常用列举法得到各种情况下基本事件的个数, 属于基础题.

5、C

【解析】

若 $S_n \leq S_m$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则 S_m 为 S_n 的最大值, 所以由已知, 只需求出 S_n 取得最大值时的 n 即可.

【详解】

由已知, $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, 又三角形有一个内角为 120° , 所以 $a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + a_2 a_3$,

$a_1^2 = (a_1 - 2)^2 + (a_1 - 4)^2 + (a_1 - 2)(a_1 - 4)$, 解得 $a_1 = 7$ 或 $a_1 = 2$ (舍),

故 $S_n = 7n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-2) = -n^2 + 8n$, 当 $n = 4$ 时, S_n 取得最大值, 所以 $m = 4$.

故选: C.

【点睛】

本题考查等差数列前 n 项和的最值问题, 考查学生的计算能力, 是一道基础题.

6、B

【解析】

由三视图可知该几何体是一个底面边长为 4 的正方形, 高为 5 的正四棱柱, 挖去一个底面边长为 4, 高为 3 的正四棱锥, 利用体积公式, 即可求解.

【详解】

由题意, 几何体的三视图可知该几何体是一个底面边长为 4 的正方形, 高为 5 的正四棱柱, 挖去一个底面边长为 4, 高为 3 的正四棱锥,

所以几何体的体积为 $V = V_{\text{柱}} - V_{\text{锥}} = 4 \times 4 \times 5 - \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 3 = 64$, 故选 B.

【点睛】

本题考查了几何体的三视图及体积的计算, 在由三视图还原为空间几何体的实际形状时, 要根据三视图的规则, 空间几何体的可见轮廓线在三视图中为实线, 不可见轮廓线在三视图中为虚线. 求解以三视图为载体的空间几何体的表面积与体积的关键是由三视图确定直观图的形状以及直观图中线面的位置关系和数量关系, 利用相应公式求解.

7、C

【解析】

根据题意, 分两种情况进行讨论: ①语文和数学都安排在上午; ②语文和数学一个安排在上午, 一个安排在下午. 分别求出每一种情况的安排方法数目, 由分类加法计数原理可得答案.

【详解】

根据题意, 分两种情况进行讨论:

①语文和数学都安排在上午, 要求 2 节语文课必须相邻且 2 节数学课也必须相邻, 将 2 节语文课和 2

节数学课分别捆绑，然后在剩余3节课中选1节到上午，由于2节英语课不加以区分，此时，排法种数为 $\frac{C_3^1 A_2^2 A_3^3}{A_2^2} = 18$

种；

②语文和数学都一个安排在上午，一个安排在下午.

语文和数学一个安排在上午，一个安排在下午，但2节语文课不加以区分，2节数学课不加以区分，2节英语课也不加以区分，此时，排法种数为 $\frac{C_2^1 A_4^4}{A_2^2} = 24$ 种.

综上所述，共有 $18 + 24 = 42$ 种不同的排法.

故选：C.

【点睛】

本题考查排列、组合的应用，涉及分类计数原理的应用，属于中等题.

8、B

【解析】

根据极值点处的导数为零先求出 m 的值，然后再按照求函数在连续的闭区间上最值的求法计算即可.

【详解】

解：由已知得 $f'(x) = 3x^2 - 2mx + 2$ ， $\therefore f'(1) = 3 - 2m + 2 = 0$ ， $\therefore m = \frac{5}{2}$ ，经检验满足题意.

$\therefore f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$ ， $f'(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

由 $f'(x) < 0$ 得 $\frac{2}{3} < x < 1$ ；由 $f'(x) > 0$ 得 $x < \frac{2}{3}$ 或 $x > 1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ 上递增，在 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 上递减，在 $[1, 2]$ 上递增.

则 $f(x)_{\text{极大值}} = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{27}$ ， $f(2) = 2$ ，

由于 $f(2) > f(x)_{\text{极大值}}$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 2.

故选：B.

【点睛】

本题考查了导数极值的性质以及利用导数求函数在连续的闭区间上的最值问题的基本思路，属于中档题.

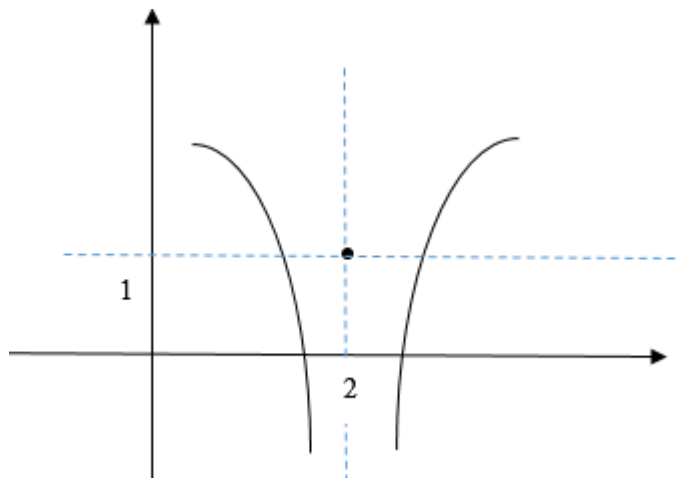
9、B

【解析】

画出函数 $f(x)$ 的图象，利用函数的图象判断函数的零点个数，然后转化求解，即可得出结果.

【详解】

作出函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x-2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$ 的图象如图所示，



令 $f(x) = t$ ，

由图可得关于 x 的方程 $f(x) = t$ 的解有两个或三个（ $t=1$ 时有三个， $t \neq 1$ 时有两个），

所以关于 t 的方程 $t^2 + bt + c = 0$ 只能有一个根 $t=1$ （若有两个根，则关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有四个或五个根），

由 $f(x) = 1$ ，可得 x_1, x_2, x_3 的值分别为 1, 2, 3，

则 $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 11$

故选 B.

【点睛】

本题考查数形结合以及函数与方程的应用，考查转化思想以及计算能力，属于常考题型.

10、A

【解析】

由复数的运算法则计算.

【详解】

因为 $(z-i)(-i) = 5$ ，所以 $z = \frac{5}{-i} + i = 6i$

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的运算. 属于简单题.

11、C

【解析】

利用对数函数，指数函数以及正弦函数的性质和计算公式，将 a, b, c 与 $\sqrt{\frac{4}{5}}, \frac{1}{2}$ 比较即可.

【详解】

$$\text{由 } a = 0.82^{0.5} > 0.8^{0.5} = \sqrt{\frac{4}{5}},$$

$$\frac{1}{2} < b = \sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} < \sqrt{\frac{4}{5}},$$

$$c = \lg 3 < \lg \sqrt{10} = \frac{1}{2} \lg 10 = \frac{1}{2},$$

所以有 $c < b < a$. 选 C.

【点睛】

本题考查对数值，指数值和正弦值大小的比较，是基础题，解题时选择合适的中间值比较是关键，注意合理地进行等价转化.

12、A

【解析】

先通过降幂公式和辅助角法将函数转化为 $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，再求最值.

【详解】

$$\text{已知函数 } f(x) = \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2},$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sqrt{3} \sin 2x}{2} \right) = 1 - \frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{因为 } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in [-1, 1],$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的最小值为 } \frac{1}{2}.$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查倍角公式及两角和与差的三角函数的逆用，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/588054143030006134>