专题26　点、直线与圆的位置关系

中考命题解读

直线与圆位置关系的判定是中考考查的热点，通常出现在选择题中．考查的重点是切线的性质和判定，题型多样，常与三角形、四边形、相似、函数等知识结合在一起综合考查．圆与圆位置关系的判定一般借助两圆公共点的个数或利用两圆半径与圆心距的关系来判定，通常出现在选择题、填空题中．

考标要求

1. 探索并了解点和圆、直线和圆以及圆和圆的位置关系．
2. 知道三角形的内心和外心．
3. 了解切线的概念，并掌握切线的判定和性质，会过圆上一点画圆的切线.

考点精讲

考点1　点与圆的位置关系

设⊙O 的半径是 r，点 P 到圆心 O 的距离为 d，则有：

$d<r \Leftrightarrow$ 点 P 在⊙O 内；

$d=r \Leftrightarrow$ 点 P 在⊙O 上；

$d>r \Leftrightarrow$ 点 P 在⊙O 外。

考点2　过三点的圆

1、　过三点的圆

不在同一直线上的三个点确定一个圆。

2、三角形的外接圆

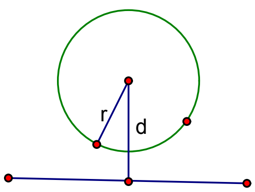
经过三角形的三个顶点的圆叫做三角形的外接圆。

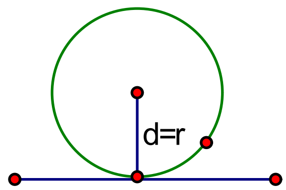
3、三角形的外心

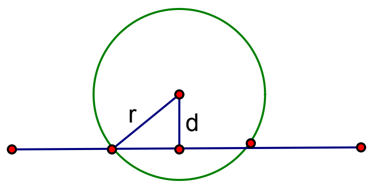
三角形的外接圆的圆心是三角形三条边的**垂直平分线**的交点，它叫做这个三角形的外心。

考点3 直线与圆的位置关系

1、直线与圆相离 $\Rightarrow$ $d > r$ $\Rightarrow$ 无交点；
2、直线与圆相切 $\Rightarrow$ $d = r$ $\Rightarrow$ 有一个交点；
3、直线与圆相交 $\Rightarrow$ $d < r$ $\Rightarrow$ 有两个交点；







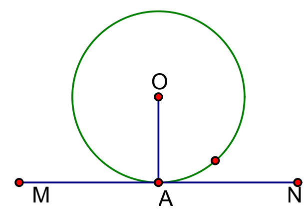
考点4 切线的性质与判定定理

1、切线的判定定理：过半径外端且垂直于半径的直线是切线；

两个条件：**过半径外端且垂直半径**，二者缺一不可

即：∵ $MN \perp OA$ 且 MN 过半径 OA 外端

∴ MN 是 $\odot O$ 的切线



2、性质定理：切线垂直于过切点的半径（如上图）

推论 1：过圆心垂直于切线的直线必过切点。

推论 2：过切点垂直于切线的直线必过圆心。

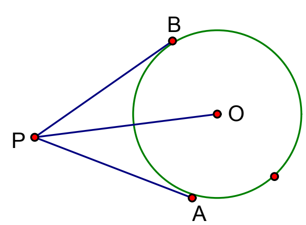
以上三个定理及推论也称二推一定理：

即：①**过圆心**；②**过切点**；③**垂直切线**，三个条件中知道其中两个条件就能推出最后一个。

考点5 切线长定理

切线长定理： 从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，这点和圆心的连线平分两条切线的夹角。

即：∵ PA、PB 是的两条切线
∴ $PA = PB$； PO 平分 $\angle BPA$



考点6 三角形的内切圆和内心

1、三角形的内切圆

与三角形的各边都相切的圆叫做三角形的内切圆。

2、三角形的内心

三角形的内切圆的圆心是三角形的三条内角平分线的交点，它叫做三角形的内心。

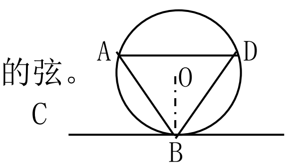
注意：内切圆及有关计算。

（1）三角形内切圆的圆心是三个内**角平分线**的交点，它到三边的距离相等。

（2）△ABC中，∠C=90°，AC=b，BC=a，AB=c，则内切圆的半径r=$\frac{a+b-c}{2}$。

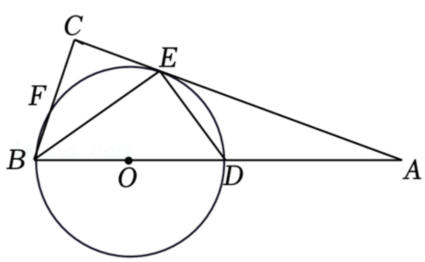
（3）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$，其中a，b，c是边长，r是内切圆的半径。

（4）弦切角：角的顶点在圆周上，角的一边是圆的切线，另一边是圆的弦。如图，BC切⊙O于点B，AB为弦，∠ABC叫弦切角，∠ABC=∠D。

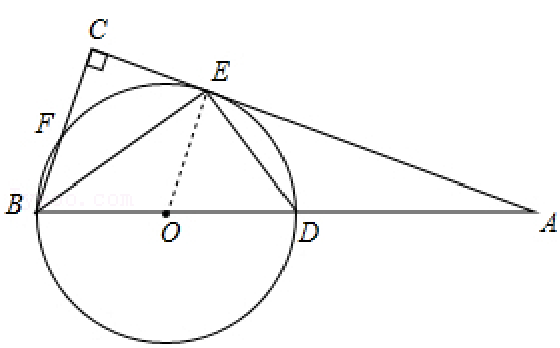


母题精讲

【典例1】（2022秋•宽城区校级期末）如图，BD是⊙O的直径，A是BD延长线上的一点，点E在⊙O上，$BC\perp AE$，交AE的延长线于点C，BC交⊙O于点F，且点E是$\overset{\frown}{DF}$的中点．求证：AC是⊙O的切线．



【解答】证明：连接OE，



∵E是$\overset{\frown}{DF}$的中点，

∴$\angle OBE=\angle CBE$．

∵$OE=OB$，

∴$\angle OEB=\angle OBE$．

∴$\angle OEB=\angle CBE$．

∴$OE/\!/BC$．

∵$BC\perp AC$，

∴$\angle C=90^\circ$．

∴$\angle AEO=\angle C=90^\circ$，

∴$DE\perp AC$．

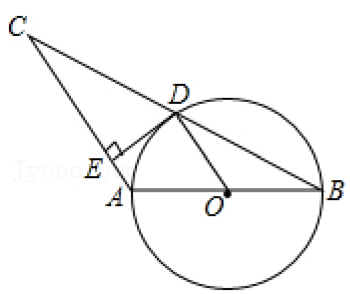
又∵OE为半圆O的半径，

∴AC是⊙O的切线．

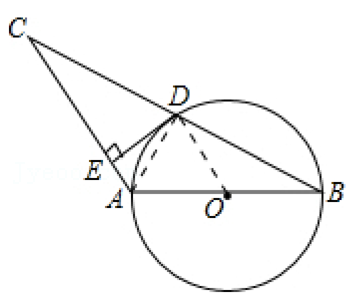
【变式1-1】（2022秋•河西区校级期末）如图，⊙O的直径$AB=4$，$\angle ABC=30^\circ$，BC交⊙O于点D，D是BC的中点．

（1）求BC的长；

（2）过点D作$DE\perp AC$，垂足为E，求证：直线DE是⊙O的切线．



【解答】解：（1）连接AD，



∵AB是⊙O的直径，

∴$\angle ADB=90^\circ$，

又∵$\angle ABC=30^\circ$，$AB=4$，

∴$BD=2\sqrt{3}$，

∵D是BC的中点，

∴$BC=2BD=4\sqrt{3}$；

（2）连接OD.

∵D是BC的中点，O是AB的中点，

∴DO是$\triangle ABC$的中位线，

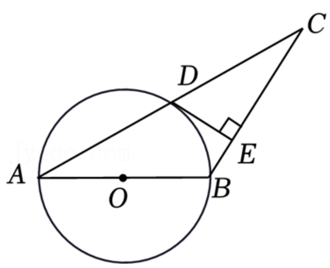
∴$OD\parallel AC$，则$\angle EDO=\angle CED$

又∵$DE\perp AC$，

∴$\angle CED=90^\circ$，$\angle EDO=\angle CED=90^\circ$

∴DE是$\odot O$的切线.

【变式1-2】（2022秋•天河区校级期末）如图，AB是$\odot O$的直径，AC的中点D在$\odot O$上，$DE\perp BC$于E．求证：DE是$\odot O$的切线．



【解答】证明：连接OD，

∵$AO=OB$，D为AC的中点，

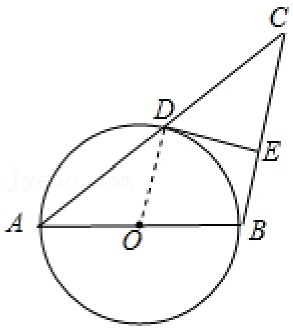
∴$OD\parallel BC$，

∵$DE\perp BC$，

∴$DE\perp OD$，

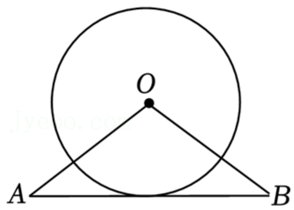
∵OD是$\odot O$的半径，

∴DE是$\odot O$的切线.



【典例2】（2022秋•长乐区期中）如图，在△OAB中，$OA=OB=5$，$AB=8$，⊙O的半径为3．

求证：AB是⊙O的切线．



【解答】证明：如图，过O作$OC\perp AB$于C，

∵$OA=OB$，$AB=8$，

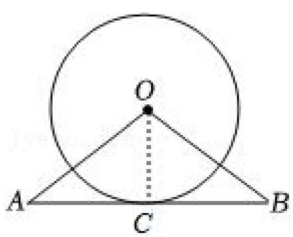
∴$AC=\frac{1}{2}AB=4$，

在Rt△OAC中，$OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

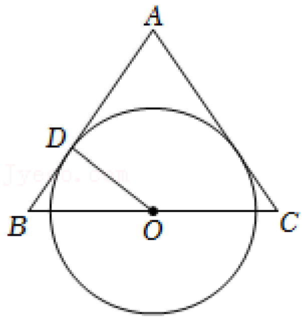
∵⊙O的半径为3，

∴OC为⊙O的半径，

∴AB是⊙O的切线．



【变式2-1】（2022秋•平潭县校级期中）如图，△ABC为等腰三角形，O是底边BC的中点，过点O作$OD\perp AB$于点D，以点O为圆心，OD的长为半径作⊙O．求证：AC是⊙O的切线．



【解答】证明：连接OA，作$OF\perp AC$于F，如图，

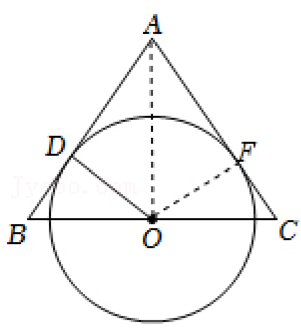
∵△ABC为等腰三角形，O是底边BC的中点，

∴$AO\perp BC$，AO平分∠BAC，

∵$OD\perp AB$，

∴$OF=OD$，

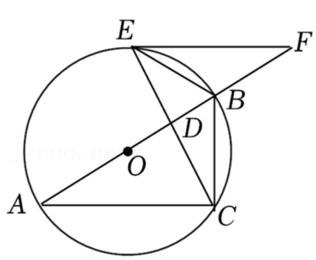
∴AC是⊙O的切线．



【典例3】（2022•鞍山）如图，⊙O是△ABC的外接圆，AB为⊙O的直径，点E为⊙O上一点，EF∥AC交AB的延长线于点F，CE与AB交于点D，连接BE，若∠$BCE=\frac{1}{2}$∠ABC．

（1）求证：EF是⊙O的切线．

（2）若$BF=2$，$\sin\angle BEC=\frac{3}{5}$，求⊙$O$的半径．



【解答】（1）证明：连接OE，

∵ $\angle BCE=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle BCE=\frac{1}{2}\angle BOE$，

∴ $\angle ABC=\angle BOE$，

∴ $OE\parallel BC$，

∴ $\angle OED=\angle BCD$，

∵ $EF\parallel AC$，

∴ $\angle FEC=\angle ACE$，

∴ $\angle OED+\angle FEC=\angle BCD+\angle ACE$，

即 $\angle FEO=\angle ACB$，

∵ AB是直径，

∴ $\angle ACB=90°$，

∴ $\angle FEO=90°$，

∴ $FE\perp EO$，

∵ EO是⊙O的半径，

∴ EF是⊙O的切线.

（2）解：∵ $EF\parallel AC$，

∴ $\triangle FEO\backsim\triangle ACB$，

∴ $\frac{EO}{BC}=\frac{FO}{AB}$，

∵ $BF=2$，$\sin\angle BEC=\frac{3}{5}$，

设⊙O的半径为r，

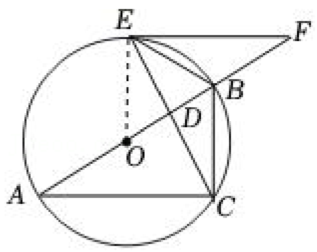
∴ $FO=2+r$，$AB=2r$，$BC=\frac{6}{5}r$，

∴ $\frac{r}{\frac{6}{5}r}=\frac{2+r}{2r}$，

解得：$r=3$，

检验得：$r=3$是原分式方程的解，

∴⊙O的半径为3.

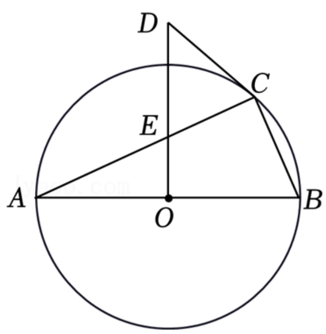


【变式3-1】（2022秋•河西区校级期末）如图，AB是⊙O的直径，点C是⊙O上的一点，$OD\perp AB$交AC于点E，$\angle D=2\angle A$．

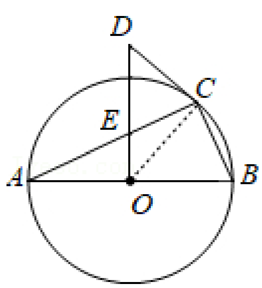
（1）求证：CD是⊙O的切线；

（2）求证：$DE=DC$；

（3）若$OD=10$，$CD=6$，求AE的长．



【解答】（1）证明：连接OC，如图，



$\because OA=OC$，

$\therefore \angle ACO=\angle A$，

$\therefore \angle COB=\angle A+\angle ACO=2\angle A$，

又$\because \angle D=2\angle A$，

$\therefore \angle D=\angle COB$．

又$\because OD\perp AB$，

$\therefore \angle COB+\angle COD=90°$，

$\therefore \angle D+\angle COD=90°$，即$\angle DCO=90°$，

$\therefore OC\perp DC$，

又点C在$\odot O$上，

$\therefore CD$是$\odot O$的切线；

（2）证明：$\because \angle DCO=90°$，

$\therefore \angle DCE+\angle ACO=90°$，

又$\because OD\perp AB$，

$\therefore \angle AEO+\angle A=90°$，

又$\because \angle A=\angle ACO$，$\angle DEC=\angle AEO$，

$\therefore \angle DEC=\angle DCE$，

$\therefore DE=DC$；

（3）解：$\because \angle DCO=90°$，$OD=10$，$DC=6$，

$\therefore OC=\sqrt{OD^2-DC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

$\therefore OA=OC=8$，

又$DE=DC=6$，

$\therefore OE=OD-DE=4$，

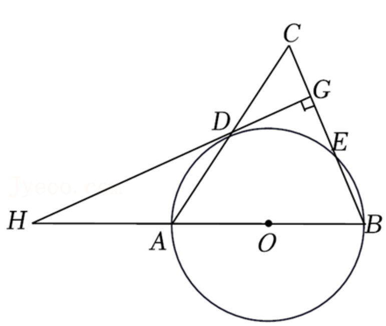
在Rt$\triangle AEO$中，由勾股定理得：$AE^2=OA^2+OE^2=8^2+4^2=80$，

$\therefore AE=4\sqrt{5}$.

【变式3-2】（2022•菏泽）如图，在$\triangle ABC$中，以AB为直径作$\odot O$交AC、BC于点D、E，且D是AC的中点，过点D作$DG\perp BC$于点G，交BA的延长线于点H.

（1）求证：直线HG是$\odot O$的切线；

（2）若$HA=3$，$\cos B=\frac{2}{5}$，求CG的长.



【解答】（1）证明：连接OD，

∵$AD=DC$，$AO=OB$，

∴OD是△ABC的中位线，

∴$OD\parallel BC$，$OD=\frac{1}{2}BC$，

∵$DG\perp BC$，

∴$OD\perp HG$，

∵OD是⊙O的半径，

∴直线HG是⊙O的切线；

（2）解：设⊙O的半径为x，则$OH=x+3$，$BC=2x$，

∵$OD\parallel BC$，

∴$\angle HOD=\angle B$，

∴$\cos\angle HOD=\frac{2}{5}$，即$\frac{OD}{OH}=\frac{x}{x+3}=\frac{2}{5}$，

解得：$x=2$，

∴$BC=4$，$BH=7$，

∵$\cos B=\frac{2}{5}$，

∴$\frac{BG}{BH}=\frac{2}{5}$，即$\frac{BG}{7}=\frac{2}{5}$，

解得：$BG=\frac{14}{5}$，

∴$CG=BC-BG=4-\frac{14}{5}=\frac{6}{5}$.