专题12　二次函数菱形存在性综合应用（专项训练）

1．如图，在平面直角坐标系中，抛物线 C_1：$y=ax^2+bx+c$ 与坐标轴交于 A，B，C 三点，其中 $OA=OC=2OB$，D（0，4）是 OA 的中点．

（1）求该二次函数的解析式．

（2）如图1，若 E 为该抛物线在第一象限内的一动点，点 F 在该抛物线的对称轴上，求使得△ECD 的面积取最大值时点 E 的坐标，并求出此时 $EF+CF$ 的最小值．

（3）如图2，将抛物线 C_1 向右平移2个单位长度，再向下平移5个单位长度得到抛物线 C_2，M 为抛物线 C_2 上一动点，N 为平面内一动点，是否存在这样的点 M，N 使得四边形 $DMCN$ 为菱形？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

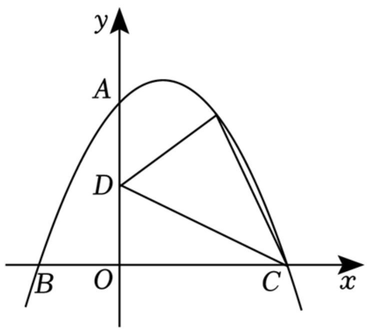


图1

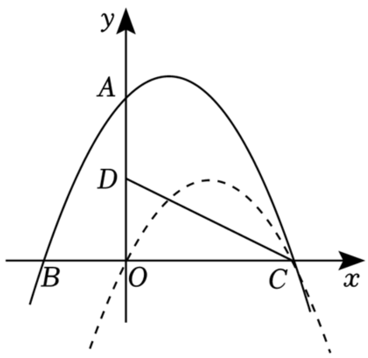


图2

【解答】解：（1）∵D（0，4）是 OA 的中点，

∴$OA=8$．

∵$OA=OC=2OB$，

∴A（0，8），B（﹣4，0），C（8，0），

将 A（0，8），B（﹣4，0），C（8，0）代入 $y=ax^2+bx+c$，

得 $\begin{cases} c=8 \\ 16a-4b+c=0 \\ 64a+8b+c=0 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{4} \\ b=1 \\ c=8 \end{cases}$．

∴二次函数的解析式为：$y=-\dfrac{1}{4}x^2+x+8$．

（2）∵$y=-\frac{1}{4}x^2+x+8=-\frac{1}{4}(x-2)^2+9$，

∴对称轴为直线 $x=2$，

令 $y=0$，

则 $-\frac{1}{4}x^2+x+8=0$，

∴$x=-4$ 或 $x=8$，

∴C（8，0），

设直线 CD 的解析式为 $y=kx+b$，

∴$\begin{cases}8k+b=0\\ b=4\end{cases}$，

∴$\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\ b=4\end{cases}$，

∴$y=-\frac{1}{2}x+4$，

过点 E 作 $EH\perp x$ 轴交 CD 于点 H，

设 E（m，$-\frac{1}{4}m^2+m+8$），F（2，n），

则 H（m，$-\frac{1}{2}m+4$），

∴$EH=-\frac{1}{4}m^2+m+8+\frac{1}{2}m-4=-\frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m+4$，

∴$S_{\triangle ECD}=\frac{1}{2}\times8\times\left(-\frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m+4\right)=-m^2+6m+16=-(m-3)^2+25$，

∴当 $m=3$ 时，$S_{\triangle ECD}$ 的面积有最大值 25，

此时 E（3，$\frac{35}{4}$），

连接 BE，交对称轴于点 F，连接 CF，

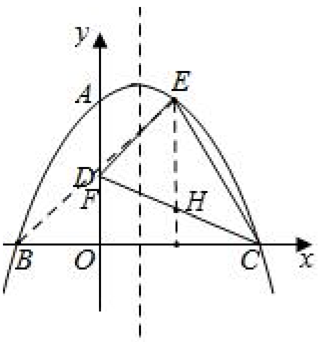


图1

∵B 点与 C 点关于对称轴 $x=2$ 对称，

∴$BF=CF$，

∴$CF+EF=BF+EF\geqslant BE$，

当B、E、F三点共线时，$EF+CF$有最小值，最小值为BE，

∴$BE=\sqrt{7^2+(\frac{35}{4})^2}=\frac{7\sqrt{41}}{4}$；

（3）存在点M、N使得四边形$DMCN$为菱形，

理由如下：

平移后的抛物线为$y=-\frac{1}{4}(x-2-2)^2+9-5=-\frac{1}{4}(x-4)^2+4=-\frac{1}{4}x^2+2x$，

设$M(t,\ -\frac{1}{4}t^2+2t)$，$N(x,y)$，

∵四边形$DMCN$为菱形，

∴DC与MN为对角线，

∴$\begin{cases}8=t+x\\4=y-\frac{1}{4}t^2+2t\end{cases}$，

∵$CN=CM$，

∴$(x-8)^2+y^2=(t-8)^2+(-\frac{1}{4}t^2+2t)^2$，

∴$t^2+(4+\frac{1}{4}t^2-2t)^2=(t-8)^2+(-\frac{1}{4}t^2+2t)^2$，

∴$t=2\sqrt{6}$或$x=-2\sqrt{6}$，

∴$M(2\sqrt{6},\ -6+4\sqrt{6})$或$(-2\sqrt{6},\ -6-4\sqrt{6})$．

2．如图，抛物线$y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$与x轴交于点A和点$B(-4,0)$．与y轴交于点$C(0,4)$，连接AC，BC．

（1）求抛物线的解析式；

（2）如图1，点P是第二象限内抛物线上的一点，当点P到AB，AC距离相等时，求点P的坐标；

（3）如图2，点M在抛物线上，点N在直线BC上，在抛物线的对称轴上是否存在点Q，使四边形$BMNQ$为菱形？若存在，请直接写出点Q的坐标；若不存在，请说明理由．

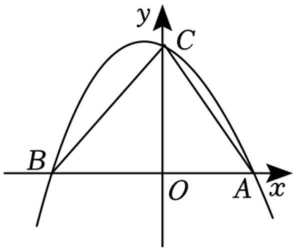


图1

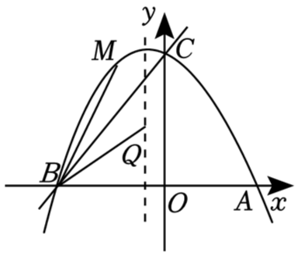
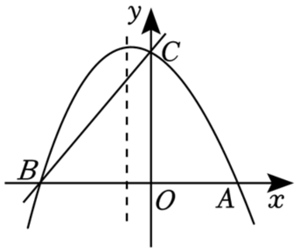


图2



备用图

【解答】解：（1）将 B（﹣4，0），C（0，4）代入 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$，

∴$\begin{cases} c=4 \\ -\frac{16}{3}-4b+c=0 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} c=4 \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+4$；

（2）令 $y=0$，则 $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+4=0$，

解得 $x=3$ 或 $x=-4$，

∴A（3，0），

∵点 P 到 AB，AC 距离相等，

∴P 点在∠CAB 的角平分线上，

设 AP 与 y 轴交于点 E，过 E 作 $EF\perp AC$ 交于 F 点，

∵$OA=3$，$CO=4$，

∴$AC=5$，

∴$CF=2$，

在 Rt△CEF 中，$CE^2=CF^2+EF^2$，即 $(4-OE)^2=OE^2+4$，

解得 $OE=\frac{3}{2}$，

∴E（0，$\frac{3}{2}$），

设直线 AE 的解析式为 $y=kx+m$，

∴$\begin{cases} 3k+m=0 \\ m=\frac{3}{2} \end{cases}$，

解得$\begin{cases} m=\frac{3}{2} \\ k=-\frac{1}{2} \end{cases}$，

∴$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，

联立方程组$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+4 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} x=-\frac{5}{2} \\ y=\frac{11}{4} \end{cases}$或$\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$，

∴$P\left(-\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$；

（3）存在点Q，使四边形$BMNQ$为菱形，理由如下；

∵$y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+4=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{49}{12}$，

∴抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{1}{2}$，

设直线BC的解析式为$y=k'x+m'$，

∴$\begin{cases} -4k'+m'=0 \\ m'=4 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} k'=1 \\ m'=4 \end{cases}$，

∴$y=x+4$，

设$Q\left(-\frac{1}{2}, t\right)$，

∵四边形$BMNQ$为菱形，

∴M点与Q点关于直线BC对称，

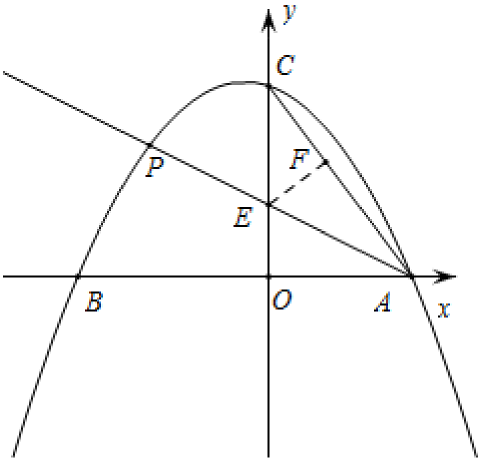
∴$M\left(t-4, \frac{7}{2}\right)$，

∴$-\frac{1}{3}(t-4)^2-\frac{1}{3}(t-4)+4=\frac{7}{2}$，

解得$t=\frac{7+\sqrt{7}}{2}$或$t=\frac{7-\sqrt{7}}{2}$，

∴$Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{7+\sqrt{7}}{2}\right)$（舍）或$\left(-\frac{1}{2}, \frac{7-\sqrt{7}}{2}\right)$，

∴Q点坐标为$\left(-\frac{1}{2}, \frac{7-\sqrt{7}}{2}\right)$．



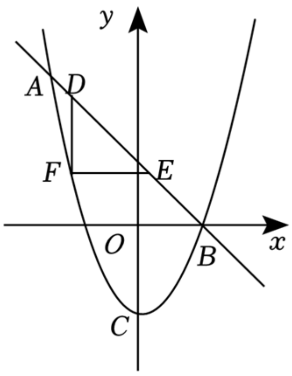
3．如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 A（﹣2，4），B（2，0）两点，与 y 轴交于点 C，

$DE=\frac{1}{2}AB$，DE 在直线 AB 上滑动，以 DE 为斜边，在 AB 的下方作等腰直角△DEF.

（1）求抛物线的解析式；

（2）当△DEF 与抛物线有公共点时，求点 E 的横坐标 t 的取值范围；

（3）在△DEF 滑动过程中是否存在点 P，使以 C，D，E，P 为顶点的四边形为菱形，若存在，直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



【解答】解：（1）将 A（﹣2，4），B（2，0）代入 $y=x^2+bx+c$，

∴$\begin{cases}4+2b+c=0\\4-2b+c=4\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b=-1\\c=-2\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=x^2-x-2$；

（2）设直线 AB 的解析式为 $y=kx+m$，

∴$\begin{cases}-2k+m=4\\2k+m=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-1\\m=2\end{cases}$，

∴$y=-x+2$，

∵E点的横坐标为t，

∴E（t，$-t+2$），

∵A（-2，4），B（2，0），

∴$AB=4\sqrt{2}$，

∵$DE=\frac{1}{2}AB$，

∴$DE=2\sqrt{2}$，

∵△DEF是等腰直角三角形，

∴$DF=EF=2$，

∴F（$t-2$，$-t+2$），D（$t-2$，$-t+4$），

当E点与A点重合时，$t=-2$，

当F点在抛物线上时，（$t-2$）^{2}－（$t-2$）$-2=-t+2$，

解得$t=2+\sqrt{2}$或$t=2-\sqrt{2}$，

∴$-2\leqslant t\leqslant 2-\sqrt{2}$时，△$DEF$与抛物线有公共点；

当E点与B点重合时，$t=2$，

当D点与B点重合时，$t-2=2$，

解得$t=4$，

∴$2\leqslant t\leqslant 4$时，△DEF与抛物线有公共点；

综上所述：$-2\leqslant t\leqslant 2-\sqrt{2}$或$2\leqslant t\leqslant 4$时，△$DEF$与抛物线有公共点；

（3）存在点P，使以C，D，E，P为顶点的四边形为菱形，理由如下：

由（2）知，E（t，$-t+2$），D（$t-2$，$-t+4$），C（0，-2），

设P（x，y），

①当CD为菱形的对角线时，$CE=DE$，

∴$\begin{cases}t-2=t+x\\-t+2=-t+2+y\\t^2+(t-4)^2=4+4\end{cases}$，

解得$\begin{cases}t=2\\x=-2\\y=0\end{cases}$，

∴P（﹣2，0）；

②当 CE 为菱形的对角线时，$CD=DE$，

∴$\begin{cases} t=t-2+x \\ -t=-t+4+y \\ (t-2)^2+(t-6)^2=4+4 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} t=4 \\ x=2 \\ y=-4 \end{cases}$，

∴P（2，﹣4）；

③当 CP 为菱形的对角线时，$CE=CD$，

∴$\begin{cases} x=2t-2 \\ y-2=-2t+6 \\ t^2+(t-4)^2=(t-2)^2+(t-6)^2 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} t=3 \\ x=4 \\ y=2 \end{cases}$，

∴P（4，2）；

综上所述：P 点坐标为（﹣2，0）或（2，﹣4）或（4，2）．

4．如图，抛物线 $y=ax^2+3x+c$（$a\neq0$）与 x 轴交于点 A（﹣2，0）和点 B，与 y 轴交于点 C（0，8），点 P 为直线 BC 上方抛物线上的动点，连接 CP，PB，直线 BC 与抛物线的对称轴 l 交于点 E．

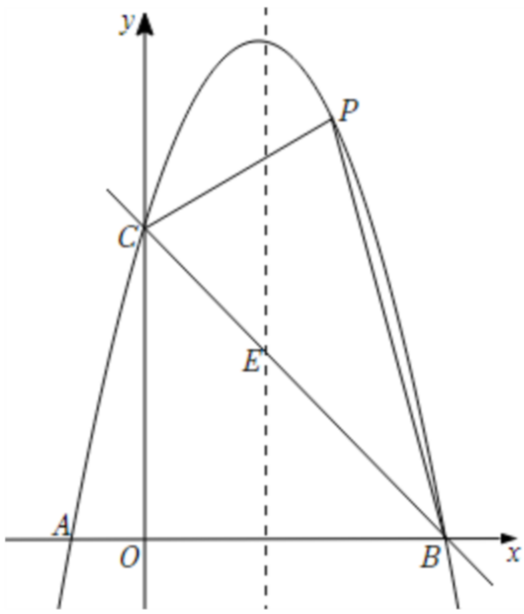
（1）求抛物线的解析式；

（2）求△BCP 的面积最大值；

（3）点 M 是抛物线的对称轴 l 上一动点．

①是否存在点 M，使得△BEM 为等腰三角形？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

②请在平面内找到一点 N，使得以 B、E、M、N 为顶点的四边形是菱形，并直接写出 N 点的坐标．



【解答】解：（1）将 A（－2，0），C（0，8）代入 $y=ax^2+3x+c$，

∴$\begin{cases}4a-6+c=0\\c=8\end{cases}$，

解得－$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\c=8\end{cases}$，

∴$y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+8$；

（2）令 $y=0$，则 $-\dfrac{1}{2}x^2+3x+8=0$，

解得 $x=-2$ 或 $x=8$，

∴B（8，0），

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，

∴$\begin{cases}b=8\\8k+b=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-1\\b=8\end{cases}$，

∴$y=-x+8$，

过点 P 作 $PG/\!/y$ 轴交 BC 于 G，

设 P（t，$-\dfrac{1}{2}t^2+3t+8$），则 G（t，$-t+8$），

∴$PG=-\dfrac{1}{2}t^2+3t+8+t-8=-\dfrac{1}{2}t^2+4t$，

∴$S_{\triangle CBP}=\dfrac{1}{2}\times8\times\left(-\dfrac{1}{2}t^2+4t\right)=-2t^2+16t=-2(t-4)^2+32$，

∴当 $t=4$ 时，$\triangle BCP$ 的面积有最大值，最大值为 32；

（3）①存在点 M，使得△BEM 为等腰三角形，理由如下：

∵$y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{25}{2}$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=3$，

∴E（3，5），

设 M（3，m），

∴$BE=5\sqrt{2}$，$BM=\sqrt{25+m^2}$，$EM=|m-5|$，

当 $BE=BM$ 时，$5\sqrt{2}=\sqrt{25+m^2}$，

解得 $m=5$（舍）或 $m=-5$，

∴M（3，－5）；

当 $BE=EM$ 时，$5\sqrt{2}=|m-5|$，

解得 $m=5\sqrt{2}+5$ 或 $m=-5\sqrt{2}+5$，

∴M（3，$5\sqrt{2}+5$）或（3，$-5\sqrt{2}+5$）；

当 $BM=EM$ 时，$\sqrt{25+m^2}=|m-5|$，

解得 $m=0$，

∴M（3，0）；

综上所述：M 点坐标为（3，0）或（3，－5）或（3，$5\sqrt{2}+5$）或（3，$-5\sqrt{2}+5$）；

②设 N（x，y），M（3，m），

当 BE 为菱形的对角线时，$BM=EM$，

∴$\begin{cases}8+3=3+x\\5=m+y\\25+m^2=(m-5)^2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=8\\y=5\\m=0\end{cases}$，

∴N（8，5）；

当 BM 为菱形的对角线时，$BE=EM$，

∴$\begin{cases}8+3=3+x\\m=5+y\\50=(m-5)^2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=8\\y=5\sqrt{2}\\m=5\sqrt{2}+5\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=8\\y=-5\sqrt{2}\\m=-5\sqrt{2}+5\end{cases}$，

∴N（8，$5\sqrt{2}$）或（8，$-5\sqrt{2}$）；

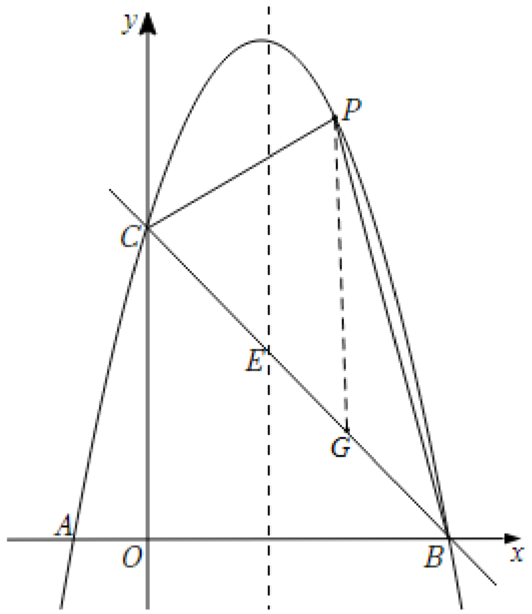
当BN为菱形的对角线时，$BE=BM$，

∴$\begin{cases}8+x=3+3\\y=5+m\\50=25+m^2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=-2\\y=10\\m=5\end{cases}$（舍）或$\begin{cases}x=-2\\y=0\\m=-5\end{cases}$，

∴N（﹣2，0）；

综上所述：N点坐标为（8，5）或（8，$5\sqrt{2}$）或（8，$-5\sqrt{2}$）或（﹣2，0）．



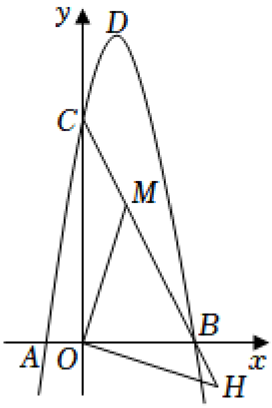
5．如图，抛物线$y=ax^2+bx+6$（$a\neq0$）与x轴交于A（﹣1，0），B（3，0）两点，与y轴交于点C，顶点为D．

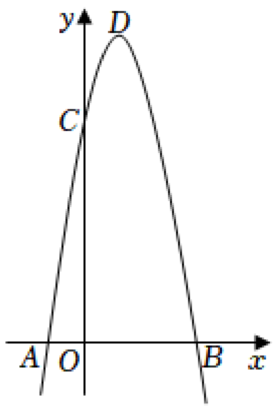
（1）求抛物线的解析式；

（2）若在线段BC上存在一点M，使得$\angle BMO=45°$，过点O作$OH\perp OM$交BC的延长线于点H，求点M的坐标；

（3）点P是y轴上一动点，点Q是在对称轴上一动点，是否存在点P，Q，使得以点P，Q，C，D为顶点的四边形是菱形？若存在，求出点Q的坐标；

若不存在，请说明理由．





备用图

【解答】解：（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+6$ 经过点 A（﹣1，0），B（3，0）两点，

∴$\begin{cases} a-b+6=0 \\ 9a+3b+6=0 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-2x^2+4x+6$；

（2）由（1）得，点 C（0，6），

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+c$，

∵直线 BC 经过点 B（3，0），C（0，6），

∴$\begin{cases} 3k+c=0 \\ c=6 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} k=-2 \\ c=6 \end{cases}$

∴直线 BC 的解析式为 $y=-2x+6$，

设点 M 的坐标为（m，$-2m+6$）（$0<m<3$），

如图 1，过点 M 作 $MN\perp y$ 轴于点 N，过点 H 作 $HK\perp y$ 轴于点 K，

则 $\angle MNO=\angle OKH=90°$，

∵$OH\perp OM$，

∴$\angle MOH=90°$，

∵$\angle OMB=45°$，

∴$\triangle MOH$ 是等腰直角三角形，

∴$OM=OH$．

∵$\angle MON+\angle KOH=90°$，$\angle OHK+\angle KOH=90°$，

∴$\angle MON=\angle OHK$，

∴$\triangle OMN\cong\triangle HOK$（$AAS$），

∴$MN=OK$，$ON=HK$.

∴H（$-2m+6$，$-m$），

∵点H（$-2m+6$，$-m$）在直线$y=-2x+6$上，

∴$-2(-2m+6)=-m$，

解得：$m=\frac{6}{5}$，

把$m=\frac{6}{5}$代入$y=-2x+6$得：$y=\frac{18}{5}$，

∴当$\angle OMB=45°$时，点M的坐标为（$\frac{6}{5}$，$\frac{18}{5}$）；

（3）存在，理由如下：

∵抛物线的解析式为$y=-2x^2+4x+6=-2(x-1)^2+8$，顶点为D，

∴点D的坐标为（1，8），

分两种情况讨论：

①当CD为菱形的边时，

如图2，过C作$CE\perp DQ$于E

∵C（0，6），D（1，8），

∴$CD=\sqrt{(1-0)^2+(8-6)^2}=\sqrt{5}$，

∴$DQ=CD=\sqrt{5}$，

∴Q点的坐标为（1，$8-\sqrt{5}$）或（1，$8+\sqrt{5}$）；

②当CD为菱形的对角线时，

如图3，设点Q（1，m），P（0，n），

∵C（0，6），D（1，8），

∴$m+n=6+8=14$，

∴$n=14-m$，

∴P（0，$14-m$），

∴$PC=14-m-6=8-m$，

∵$CQ=\sqrt{(1-0)^2+(m-6)^2}=\sqrt{1+(m-6)^2}$，$PC=CQ$，

∴$8-m=\sqrt{1+(m-6)^2}$，

解得：$m=\frac{27}{4}$，

∴点 Q 的坐标为（1，$\frac{27}{4}$）；

综上所述，点 Q 的坐标为（1，$8-\sqrt{5}$）或（1，$8+\sqrt{5}$）或（1，$\frac{27}{4}$）．

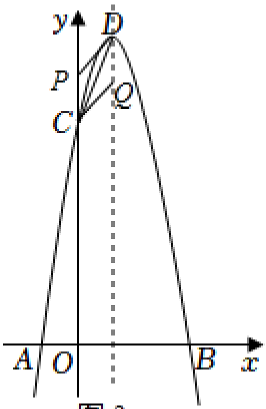


图 3

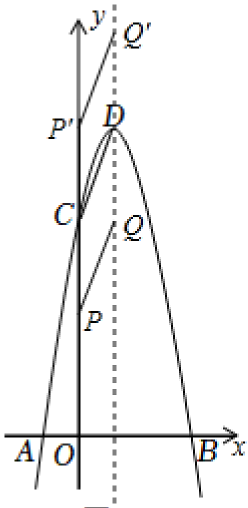


图 2

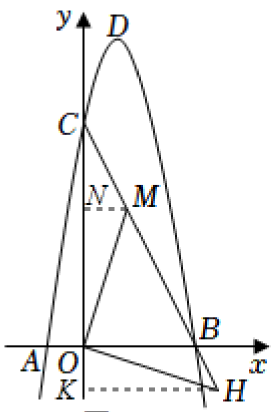


图 1

6．如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象交 x 轴于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，$OB=3OA=3$，点 P 是抛物线上一动点．

（1）求抛物线的解析式及点 C 坐标；

（2）如图 1，若点 P 在第一象限内，过点 P 作 x 轴的平行线，交直线 BC 于点 E，求线段 PE 的最大值及此时点 P 的坐标；

（3）如图 2，过点 P 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 Q，交直线 BC 于点 M，在 y 轴上是否存在点 G，使得以 M，P，C，G 为顶点的四边形为菱形？若存在，请直接写出所有满足条件的点 G 坐标；若不存在，请说明理由 .

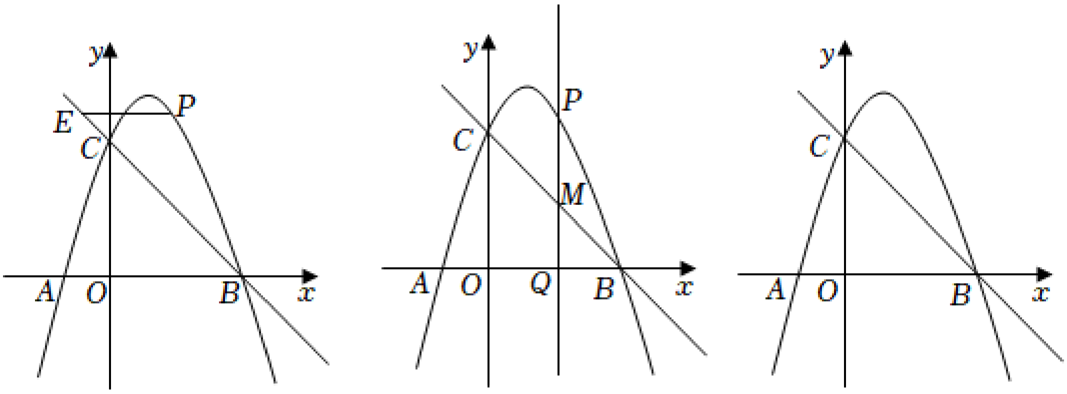


图1　　图2　　备用图

【解答】解：（1）∵$OB=3OA=3$，

∴B（3，0），A（﹣1，0），

将（3，0），（﹣1，0）代入 $y=-x^2+bx+c$ 得 $\begin{cases}0=-9+3b+c\\0=-1-b+c\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}b=2\\c=3\end{cases}$，

∴$y=-x^2+2x+3$，

将 $x=0$ 代入 $y=-x^2+2x+3$ 得 $y=3$，

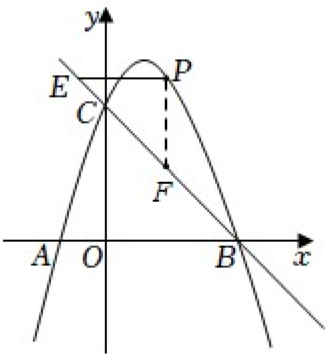
∴点 C 坐标为（0，3）．

（2）设直线 BC 解析式为 $y=kx+b$，将（3，0），（0，3）代入 $y=kx+b$ 得 $\begin{cases}0=3k+b\\b=3\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=-1\\b=3\end{cases}$，

∴$y=-x+3$，

作 $PF\perp x$ 轴交 BC 于点 F，



∵$OB=OC$，

∴$\angle CBO=45°$，

∵$PE/\!/x$ 轴，

∴$\angle PEF=\angle OBC=45°$，

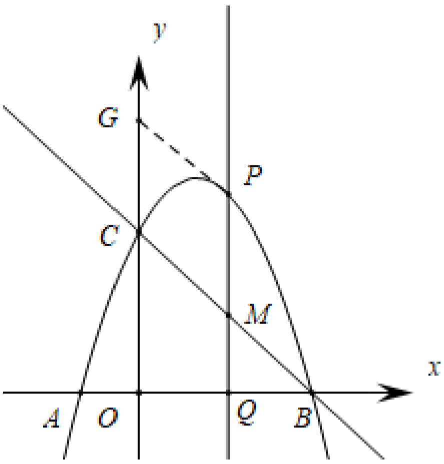
∴$PF=PE$，

设点 P 坐标为（m，$-m^2+2m+3$），则点 F 坐标为（m，$-m+3$）．

∴$PF=PE=-m^2+2m+3-(-m+3)=-m^2+3m=-(m-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$，

∴$m=\frac{3}{2}$时，PE 的最大值为$\frac{9}{4}$，此时点 P 坐标为（$\frac{3}{2}$，$\frac{15}{4}$）．

（3）①如图，$PM=CM$，



设点 P 坐标为（m，$-m^2+2m+3$），则 M（m，$-m+3$），由（2）得 $PM=-m^2+3m$，

∵点 C 坐标为（0，3），

∴$CM=\sqrt{m^2+(-m+3-3)^2}=\sqrt{2}m$，

∴$-m^2+3m=\sqrt{2}m$，

解得 $m=0$（舍）或 $m=3-\sqrt{2}$，