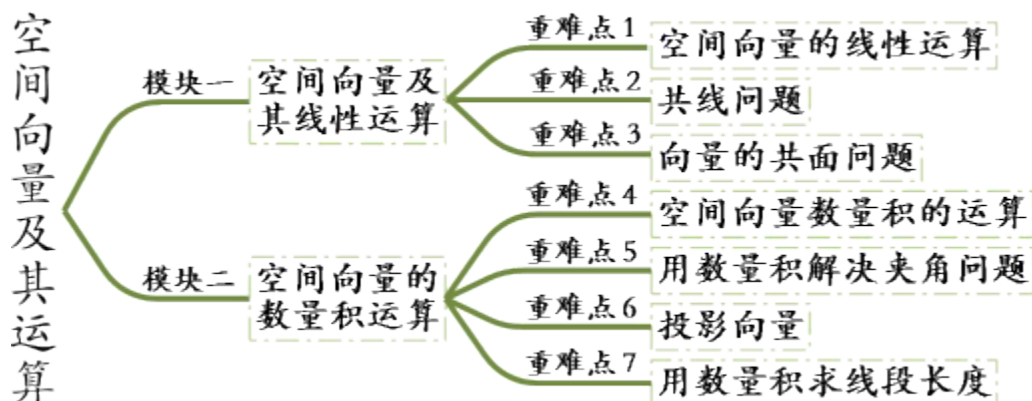


专题 1.1 空间向量及其运算

重难点目录



模块一空间向量及其线性运算二

知识点 1 空间向量的有关概念

1. 空间向量的定义及表示

定义	在空间，把具有方向和大小的量叫做空间向量	
长度或模	空间向量的大小叫做空间向量的长度或模	
表示方法	几何表示法	空间向量用有向线段表示，有向线段的长度表示空间向量的模
	符号表示法	若向量 $\vec{a}$ 的起点是 A ，终点是 B ，则 $\vec{a}$ 也可记作 $\overrightarrow{AB}$ ，其模记 $ \vec{a} $ 或 $ \overrightarrow{AB} $

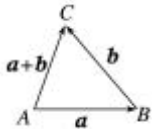
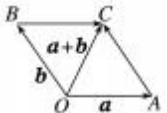
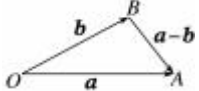
2. 几类特殊的空间向量

名称	方向	模	表示法
零向量	任意	0	记为 $\vec{0}$
单位向量		1	$ \vec{a} = 1$ 或 $ \overrightarrow{AB} = 1$
相反向量	相反	相等	记为 $-\vec{a}$
共线向量	相同或相反		$\vec{a} // \vec{b}$ 或 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$
相等向量	相同	相等	$\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

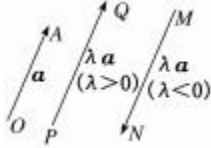
知识点 2 空间向量的线性运算

1.空间向量的加减运算

加法运算	三角形法则	语言叙述	首尾顺次相接，首指向尾为和
------	-------	------	---------------

		图形叙述	
	平行四边形法则	语言叙述	共起点的两边为邻边作平行四边形，共起点对角线为和
		图形叙述	
减法运算	三角形法则	语言叙述	共起点，连终点，方向指向被减向量
		图形叙述	

2.空间向量的数乘运算

定义	与平面向量一样，实数 λ 与空间向量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 仍然是一个向量，称为空间向量的数乘		
几何意义	$\lambda > 0$	$\lambda\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 的方向相同	 $\lambda\vec{a}$ 的长度是$\vec{a}$的长度的 λ 倍
	$\lambda < 0$	$\lambda\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 的方向相反	
	$\lambda = 0$	$\lambda\vec{a} = \vec{0}$ ，其方向是任意的	

3.空间向量的运算律

交换律	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
结合律	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
分配律	$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

知识点 3 共线向量与共面向量

1.直线 l 的方向向量

定义：把与 $\vec{a}$ 平行的非零向量称为直线 l 的方向向量.

2.共线向量与共面向量的区别

	共线(平行)向量	共面向量
--	----------	------

定 义	位置关系	表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，这些向量叫做共线向量或平行向量	平行于同一个平面的向量叫做共面向量
--------	------	---	-------------------

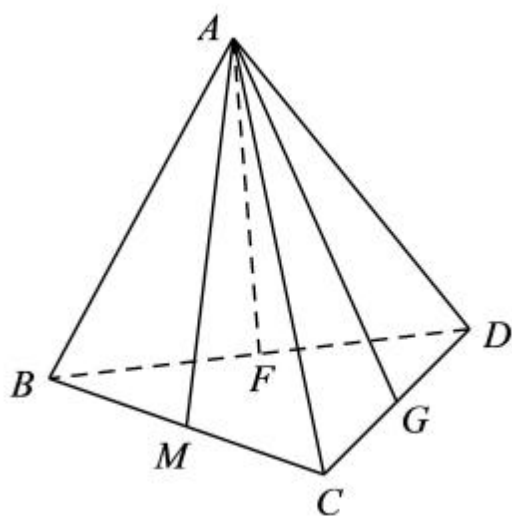
	特征	方向相同或相反	
	特例	零向量与任意向量 平行	
充要条件	共线向量定理：对于空间任意两个向量 $\vec{a}, \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$ ， $\vec{a} // \vec{b}$ 的充要条件是存在实数 λ 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$		共面向量定理：若两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线，则向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y) ，使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$
	对空间任一点 O ， $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} (x + y = 1)$		空间中 P, A, B, C 四点共面的充要条件是存在有序实数对 (x, y, z) ，使得对空间中任意一点 O ，都有 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC} \text{ (其中 } x + y + z = 1 \text{)}$



重难点训练

重难点 1 空间向量的线性运算

1. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中， F, M, G 分别是 BD, BC, CD 的中点，化简下列各式：

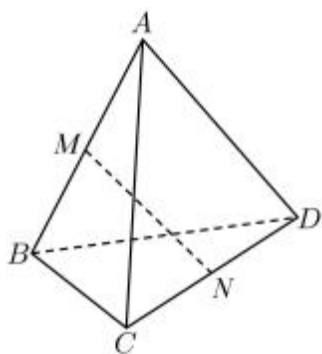


$$(1) \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BD});$$

$$(2) \vec{AG} - \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC});$$

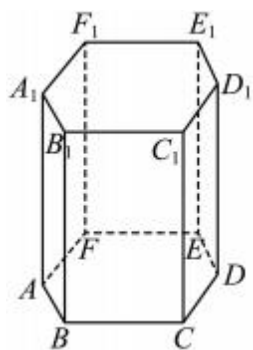
$$(3) \vec{AC} + \vec{GD} + \vec{MB}.$$

2. 如图, 点 M, N 分别是四面体 $ABCD$ 的棱 AB 和 CD 的中点, 求证: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.



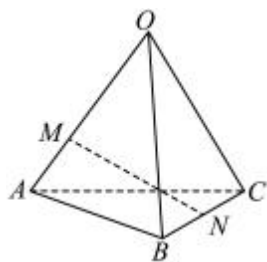
---, ---, ---.

3. 在正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中, 化简 $\overrightarrow{AF_1} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, 并在图中标出化简结果.



4. 如图空间四边形 $OABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 点 M 在 OA 上, 且满足 $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{MA}$, 点 N 为 BC 的

中点, 则 $\overrightarrow{MN} = ()$



A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

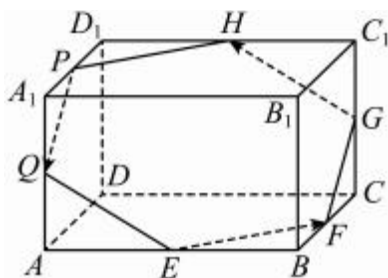
B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

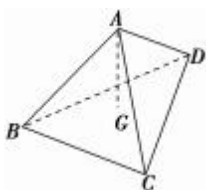
D. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

5. 如图所示, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1A} = \vec{c}$, E, F, G, H, P, Q 分别是 $AB,$

$BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A$ 的中点, 求证: $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}.$

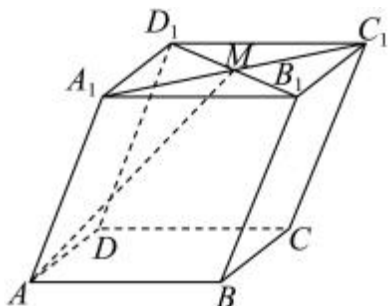


6. 如图, 设 A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外的一点, G 是 $\triangle BCD$ 的重心. 求证: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.



7. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点. 记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ 则下列正

确的是 ()



A. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

B. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

重难点 2 共线问题

8. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是空间中两个不共线的向量, 已知 $\overrightarrow{AB} = 9\vec{a} + m\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = -2\vec{b}$, 且 A, B, D 三点共线, 则实数 $m =$ _____;

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 和侧面 CC_1D_1D 的中心, 若

$\overrightarrow{EF} + \lambda \overrightarrow{A_1D} = \vec{0} (\lambda \in \mathbb{R})$, 则 $\lambda =$ _____.

10. (多选) 若空间中任意四点 O, A, B, P 满足 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OR}$, 其中 $m+n=1$, 则结论正确的有 ()

A. $P \in$ 直线 AB

B. $P \notin$ 直线 AB

C . O, A, B, P 四点共面

D . P, A, B 三点共线

11. 已知 $|\vec{a}| = 5$, $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

(1) 若 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相同, 且 $|\vec{b}| = 7$, 则 λ 的值为_____;

(2) 若 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反, 且 $|\vec{b}| = 7$, 则 λ 的值为_____.

12. 已知 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 是空间的一个基底, 下列不能与 $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{b} - \vec{c}$ 构成空间的另一个基底的是 ()

A. $\vec{a} - \vec{c}$

B. $\vec{a} + \vec{c}$

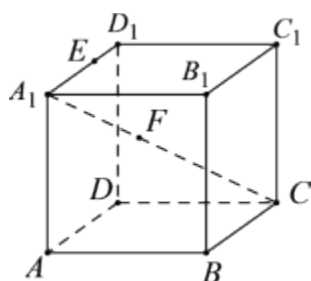
C. $\vec{a} + \vec{b}$

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

13. 已知平面单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 满足 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$, 且 $\vec{a} = x\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $x \in \mathbb{R}$, $\vec{b} = 2\lambda\vec{e}_1 + (1-\lambda)\vec{e}_2$, 若使 $|\vec{b} - \vec{a}| = 1$ 成立的正数 λ 有且只有一个, 则 x 的取值范围为_____.

14. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 在 A_1D_1 上, 且 $A_1E = 2ED_1$, F 在对角线 A_1C 上, 且 $A_1F = \frac{2}{3}FC$.

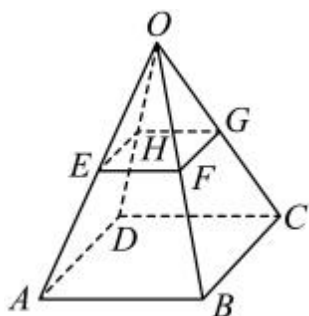
若 $\vec{A_1B} = \vec{a}$, $\vec{A_1D} = \vec{b}$, $\vec{AA_1} = \vec{c}$.



(1) 用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示 $\vec{EF}$.

(2) 求证: E, F, B 三点共线.

15. 如图, 已知 $O, A, B, C, D, E, F, G, H$ 为空间的 9 个点, 且 $\vec{OE} = k\vec{OA}$, $\vec{OF} = k\vec{OB}$, $\vec{OH} = k\vec{OD}$, $\vec{AC} = \vec{AD} + m\vec{AB}$, $\vec{EG} = \vec{EH} + m\vec{EF}$, $k > 0, m > 0$.



求证: (1) $\vec{AC} \parallel \vec{EG}$;

(2) $\vec{OG} = k\vec{OC}$.

重难点 3 向量的共面问题

16. 已知空间 A, B, C, D 四点共面, 且其中任意三点均不共线, 设 P 为空间中任意一点, 若

$$\vec{BD} = 6\vec{PA} - 4\vec{PB} + \lambda\vec{PC}, \text{ 则 } \lambda = ()$$

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

17. 已知点 M 在平面 ABC 内, 并且对空间任一点 O , $OM = xOA + \frac{1}{3}OB + \frac{1}{2}OC$, 则 $x =$ _____.

18. 已知 A, B, M 三点不共线, 对于平面 ABM 外的任意一点 O , 判断在下列各条件下的点 P 与点 A, B, M 是否共面.

(1) $3\vec{OP} + \vec{OM} = 3\vec{OA} - \vec{OB}$;

(2) $\vec{OP} = 4\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OM}$.

19. 已知 e_1, e_2 为两个不共线的非零向量, 且 $AB = e_1 + e_2$, $AC = 2e_1 + 8e_2$, $AD = 3e_1 - 3e_2$, 求证: A, B, C, D

四点共面.

20. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是三个不共面的向量, $\vec{AB} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{BC} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{CD} = \lambda\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, 且 A, B, C, D 四点共面, 则 λ 的值为 _____.

21. 下列条件中, 一定使空间四点 P, A, B, C 共面的是 ()

A. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = -\vec{OP}$

B. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OP}$

C. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OP}$

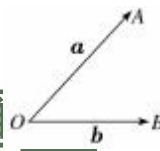
D. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OP}$

22. 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底, 则下列向量不共面的是 ()

A. $\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$

B. $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ C. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}$ D. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}$

么模块三空间向量的数量积运算



知识点 1 空间向量的夹角

如图, 已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 在空间任取一点 O , 作 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角,

记作 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$,

夹角的范围： $[0, \pi]$ ，特别地，如果 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$ ，那么向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 互相垂直，记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$

知识点 2 空间向量的数量积运算

1. 空间向量的数量积

已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，则 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ 叫做 $\vec{a}, \vec{b}$ 的数量积，记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ 。

零向量与任意向量的数量积为0，即 $0 \cdot a = 0$ 。

2. 数量积的运算律

数乘向量与数量积的结合律	$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$
交换律	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
分配律	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3. 投影向量

在空间，向量 $\vec{a}$ 向向量 $\vec{b}$ 投影，由于它们是自由向量，因此可以先将它们平移到同一个平面 α 内，进而利用平面上向量的投影，得到与向量 $\vec{b}$ 共线的向量 $\vec{c}$ ， $\vec{c} = |\vec{a}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ ，向量 $\vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量。

4. 数量积的性质

若 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量，

则 (1) $\vec{a} \perp \vec{b}$ 常 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}| & (\vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 同向}) \\ -|\vec{a}||\vec{b}| & (\vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 反向}) \end{cases}$; (3)

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}};$$

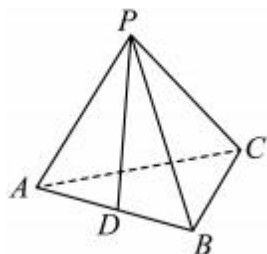
$$(4) \cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}; (5) |\vec{a} \cdot \vec{b}| < |\vec{a}||\vec{b}|$$



重难点训练

重难点 4 空间向量数量积的运算

23. 在正四面体 $P-ABC$ 中，棱长为1，且 D 为棱 AB 的中点，则 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的值为()。



A.

$$\frac{1}{4}$$

B.

$$\frac{1}{8}$$

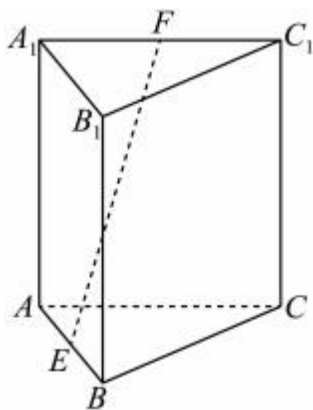
C.

$$\frac{1}{2}$$

D.

$$\frac{1}{2}$$

24 . 如图 , 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 , $BB_1 = 3$, E 、 F 分别为棱 AB 、 A_1C_1 的中点 , 则 $EF \cdot BB_1 =$ _____ .



25. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为棱 CC_1 上任意一点, 则 $\vec{A_1M} \cdot \vec{B_1C_1} =$ _____.

26. 给出下列命题:

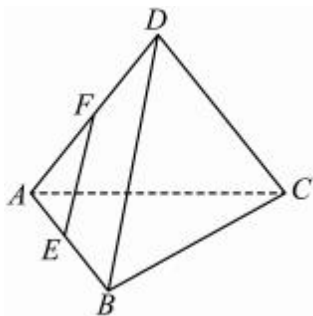
①空间中任意两个单位向量必相等;

②若空间向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$;

③在向量的数量积运算中 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$;

④对于非零向量 $\vec{c}$, 由 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$, 其中假命题的个数是_____.

27. 已知空间四面体 $D-ABC$ 的每条棱长都等于 1, 点 E, F 分别是 AB, AD 的中点, 则 $\vec{FE} \cdot \vec{CD}$ 等于 ()



- A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

28. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为空间中的任意两个非零向量, 有下列各式:

① $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; ② $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \theta$; ③ $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$; ④ $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

其中正确的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

29. 已知向量 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 向量 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角都是 60° , 且 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, 试求

(1) $(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})^2$;

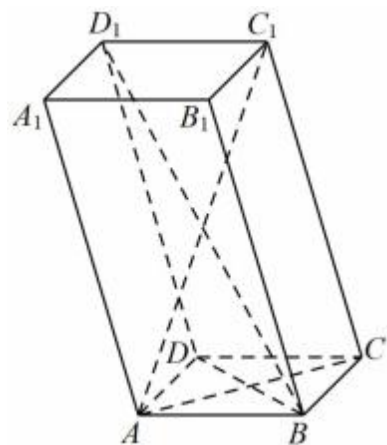
(2) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - 3\vec{c})$.

30. 在三棱锥 $D-ABC$ 中, 已知 $AB = AD = 2$, $BC = 1$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -3$, 则 $CD =$ _____

重难点 5 用数量积解决夹角问题

31. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧棱 AA_1 的长度为 4, 且

$\angle A_1AB = \angle A_1AD = 120^\circ$. 用向量法求:

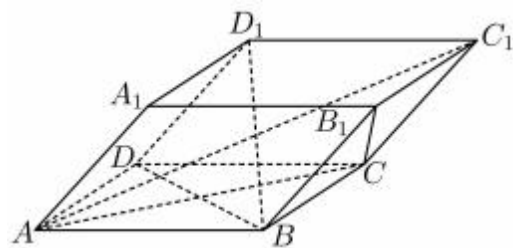


(1) BD_1 的长;

(2) 直线 BD_1 与 AC 所成角的余弦值.

32. (多选) 如图所示, 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 其中 $AB = AD = \sqrt{2}$, $AA_1 = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$,

$\angle DAA_1 = \angle BAA_1 = 45^\circ$, 下列说法中正确的是 ()



A. $AC = \sqrt{11}$

B. $AC_1 \perp DB$

C. 直线 AC 与直线 BD_1 是相交直线

D. BD_1 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

33. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是空间向量, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\pi}{3}$, 则 $3\vec{a} \cdot (-4\vec{b}) =$ _____.

34. 已知不共面的三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都是单位向量, 且夹角都是 $\frac{\pi}{3}$, 则向量 $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问: <https://d.book118.com/595113204200011132>