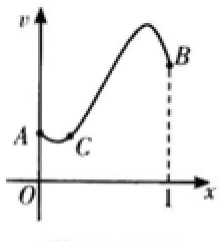
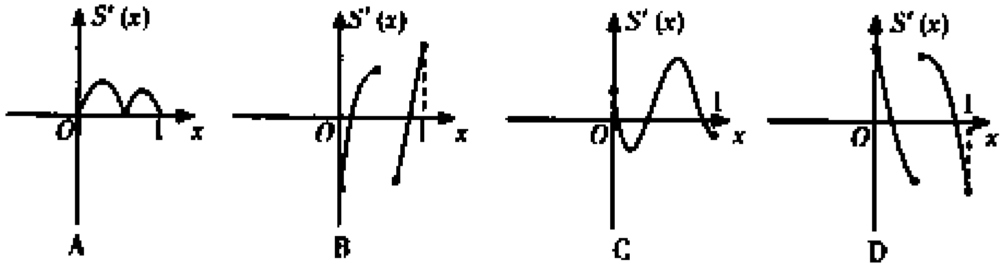
专题 3.5 导数的综合应用

A 基础巩固训练

1. 定义在区间[0,1]上的函数 f(x)的图象如图所示，以 $A(0,f(0)),B(1,f(1)),C(x,f(x))$ 为顶点的△ABC 的面积记为函数 S(x)，则函数 S(x)的导函数 $S'(x)$ 的大致图象为（　　）





【答案】D

【解析】

因为 ΔABC 底边长一定，点 C 由 A 到 B 的过程中，当 C 与 A、B 共线时不能组成三角形，所以函数 $S(x)$ 与其导函数都不连续，故排除选项 A、C，又点 C 由 A 到 B 的过程中 ΔABC 面积先增后减，再增再减，因此导函数应该先正后负，再正再负，所以选项 D 符合题意，故选 D.

2. 定义在 R 上的函数 $y=f(x)$，满足 $f(1-x)=f(x),(x-\frac{1}{2})f'(x)>0$，若 $x_1<x_2$ 且 $x_1+x_2>1$，则有（　　）

A. $f(x_1)<f(x_2)$　　B. $f(x_1)>f(x_2)$　　C. $f(x_1)=f(x_2)$　　D. 不能确定

【答案】A

【解析】由 $f(1-x)=f(x),(x-\frac{1}{2})f'(x)>0$，可知函数 $y=f(x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称且 $x>\frac{1}{2}$ 递增，$x<\frac{1}{2}$ 递减. 由若 $x_1<x_2$ 且 $x_1+x_2>1$，所以 x_1,x_2 的位置关系只有两种. 若 $\frac{1}{2}<x_1<x_2$. 则 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立. 若 $x_1<\frac{1}{2}<x_2$. 则 $\frac{1}{2}-x_1<x_2-\frac{1}{2}$. 根据对称性可得 $f(x_1)<f(x_2)$. 综上结论成立.

3.【2017河北武邑三调】已知 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的偶函数，其导函数为 $f'\left(x\right)$，若 $f'\left(x\right)<f\left(x\right)$，且 $f\left(x+1\right)=f\left(3-x\right),f\left(2015\right)=2$，则不等式 $f\left(x\right)<2e^{x-1}$ 的解集为（　）

A. $\left(1,+\infty\right)$　　B. $\left(e,+\infty\right)$　　C. $\left(-\infty,0\right)$

D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right)$

【答案】A

【解析】可取特殊函数 $f(x)=2\Rightarrow 2<2e^{x-1}\Rightarrow e^{x-1}>1\Rightarrow x>1$，故选A.

4. 已知定义在R上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(x+2)$ 为偶函数，$f(4)=1$，则不等式 $f(x)<\mathrm{e}^x$ 的解集为（　）

A. $\left(-2,+\infty\right)$　　B. $\left(4,+\infty\right)$　　C. $\left(1,+\infty\right)$　　D. $\left(0,+\infty\right)$

【答案】D

【解析】

因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)$ 为偶函数且 $f(4)=1$，所以 $f(2+x)=f(2-x)$ 且 $f(0)=1$，令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$ 在 R 上恒成立，即函数 $g(x)$ 在 R 上单调递减，又因为 $g(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=1$，所以由 $g(x)<1$，得 $x>0$，即不等式 $f(x)<\mathrm{e}^x$ 的解集为 $(0,+\infty)$；故选D.

5.【2017山西大学附中二模】设函数 $f\left(x\right)=e^x\left(2x-1\right)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 t，使得 $f\left(t\right)<0$，则 a 的取值范围是（　）

A. $\left[-\dfrac{3}{2e},1\right)$　　B. $\left[-\dfrac{3}{2e},\dfrac{3}{4}\right)$　　C. $\left[\dfrac{3}{2e},\dfrac{3}{4}\right)$

D. $\left[\dfrac{3}{2e},1\right)$

【答案】D

【解析】令 $g\left(x\right)=e^x\left(2x-1\right),h\left(x\right)=ax-a$. 由题意知存在唯一整数 t，使得

$g\left(t\right)$在直线$h\left(x\right)$的下方. $g^{'}\left(x\right)=e^{x}\left(2x+1\right)$，当$x<-\dfrac{1}{2}$时，函数单调递减，当$x>-\dfrac{1}{2}$，函数单调递增，当$x=-\dfrac{1}{2}$时，函数取得最小值为$-2e^{-\frac{1}{2}}$. 当$x=0$时，$g(0)=-1$，当$x=1$时，$g(1)=e>0$，直线$h\left(x\right)=ax-a$过定点$\left(1,0\right)$，斜率为$a$，故$-a>g\left(0\right)$且$g\left(-1\right)=-3e^{-1}\ge -a-a$，解得$m\in\left[\dfrac{3}{2e},1\right)$.

B能力提升训练

1.【四川成都树德中学高三模拟】若方程$x^{3}-3x+m=0$在$[0,2]$上有解，则实数m的取值范围是（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $[0,2]$　　C. $[-2,0]$　　D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

【答案】A

【解析】方程$x^{3}-3x+m=0$在$[0,2]$上有解，等价于$m=3x-x^{3}$在$[0,2]$上有解，故m的取值范围即为函数$f(x)=3x-x^{3}$在$[0,2]$上的值域，求导可得

$f'(x)=3-3x^{2}=3(1-x^{2})$，令$f'(x)>0$可知$f(x)$在$(-1,1)$上单调递增，在

$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$上单调递减，故当$x\in[0,2]$时$f(x)_{\max}=f(1)=2$，

$f(x)_{\min}=\min\left\{f(0),f(2)\right\}=-2$，故$m$的取值范围$[-2,2]$.

2.【2017四川泸州四诊】已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(2x\right)}{x}$，关于$x$的不等式

$f^{2}\left(x\right)+af\left(x\right)>0$只有两个整数解，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $\left(-\ln 2,-\dfrac{1}{3}\ln 6\right]$　　B. $\left(-\dfrac{1}{e},-\dfrac{\ln 6}{3}\right]$　　C. $\left[\dfrac{1}{3}\ln 6,\ln 2\right)$　　D. $\left[\dfrac{\ln 6}{3},\dfrac{2}{e}\right)$

【答案】A

【解析】函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，则$f'(x)=\frac{1-ln(2x)}{x^2}$，当 $f(x)>0$得 $1-ln(2x)>0$,即 $ln(2x)<1$，即 $0<2x<e$,

即$0<x<\frac{e}{2}$，由 $f(x)<0$ 得 $1-ln(2x)<0$,得 $ln(2x)>1$，即 $2x>e$,即$x>\frac{e}{2}$，即当$x=\frac{e}{2}$时,函数 $f(x)$取得极大值,

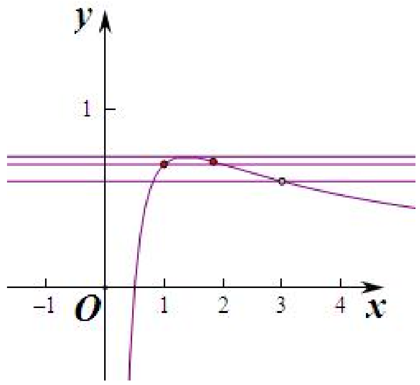
同时也是最大值$f\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{\ln e}{e^2}=2e$，即当$0<x<\frac{e}{2}$时，$f(x)<\frac{2}{e}$有一个整数解 1，

当$x>\frac{e}{2}$时，$0<f(x)<\frac{2}{e}$有无数个整数解，若 $a=0$,则 $f^2(x)+af(x)>0$ 得 $f^2(x)>0$，此时有无数个整数解，不满足条件。若 $a>0$，则由 $f^2(x)+af(x)>0$ 得 $f(x)>0$ 或 $f(x)<-a$，当 $f(x)>0$ 时，不等式有无数个整数解，不满足条件。当 $a<0$ 时,由 $f^2(x)+af(x)>0$ 得 $f(x)>-a$ 或 $f(x)<0$，当 $f(x)<0$ 时，没有整数解，则要使当 $f(x)>-a$ 有两个整数解，

$\because f(1)=\ln2, f(2)=\frac{\ln4}{2}=\ln2, f(3)=\frac{\ln6}{3}$，

∴当 $f(x)\geqslant\ln2$ 时，函数有两个整数点 1，2，当 $f(x)\ldots\frac{\ln6}{3}$ 时，函数有 3 个整数点 1，2，3，

∴要使 $f(x)>-a$ 有两个整数解，则$\frac{\ln6}{3}\le -a<\ln2$，即$-\ln2<a\le-\frac{1}{3}\ln6$，本题选择 A 选项.



3.【2017 广东惠州二调】已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 满足：函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，且当 $x\in(-\infty,0), f(x)+xf'(x)<0$ 成立（$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），若 $a=(\sin\frac{1}{2})f(\sin\frac{1}{2})$，$b=(ln2)f(ln2)$，$c=2f(log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4})$，则 a,b,c 的大小关系是（　）

（A）$a>b>c$　　（B）$b>a>c$　　（C）$c>a>b$　　（D）$a>c>b$

【答案】A

【解析】∵函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，∴ $y=f(x)$ 关于 y 轴对称，∴函数 $y=xf(x)$ 为奇函数. 因为 $[xf(x)]'=f(x)+xf'(x)$，

∴当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$[xf(x)]'=f(x)+xf'(x)<0$，函数 $y=xf(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $y=xf(x)$ 单调递减.

$\because 0<\sin\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$，$1>\ln 2>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$，$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$ $0<\sin\frac{1}{2}<\ln 2<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$，

$\therefore a>b>c$，故选 A.

4. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数，$f'(x)$ 是它的导函数，当 $x>0$ 时，$f(x)+xf'(x)\le 0$ 恒成立，且 $f(-2)=0$，则不等式 $xf(x)<0$ 的解集为__________.

【答案】$(-2,0)\cup(2,+\infty)$

【解析】令 $g(x)=xf(x)$，则函数 $g(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时，$g'(x)=f(x)+xf'(x)\le 0$，因此 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减，从而 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调增，由 $f(-2)=0$ 得

$g(-2)=0, g(2)=0$. $xf(x)<0\Leftrightarrow g(x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\g(x)<g(2)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\g(x)<g(-2)\end{cases}$，解得 $x>2$ 或 $-2<x<0$. 所求解集为 $(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

5. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-\ln x-2$，$a\in\mathrm{R}$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围.

【答案】（Ⅰ）当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{a}}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty)$ 上单调递增；（Ⅱ）$(0,\ e^3)$.

【解析】

（Ⅰ）$f'(x)=ax-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-1}{x}$，$x>0$

① 当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

② 当 $a>0$时，令$f'(x)=0$,解得$x=\frac{\sqrt{a}}{a}$.

当$x\in(0,\frac{\sqrt{a}}{a})$时，$f'(x)<0$；当$x\in(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty)$时，$f'(x)>0$.

∴函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{a}}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty)$ 上单调递增

综上：当 $a\le 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{a}}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty)$ 上单调递增

（Ⅱ）当 $a\le 0$时，由（Ⅰ）得 $f(x)$在 $(0,+\infty)$上单调递减，函数 $f(x)$ 不可能有两个零点；

当 a>0 时，由（Ⅰ）得，函数$f(x)$在$(0,\frac{\sqrt{a}}{a})$内单调递减，在$(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty)$内单调递增，且当 x 趋近于 0 和正无穷大时，$f(x)$ 都趋近于正无穷大，

故若要使函数 $f(x)$有两个零点，则 $f(x)$的极小值$f(\frac{\sqrt{a}}{a})<0$，

即$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln a-2<0$，解得$0<a<e^3$，

综上所述，a的取值范围是$(0,e^3)$

C 思维拓展训练

1. 设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有两个极值点 x_1,x_2，若点 $P(x_1,f(x_1))$ 为坐标原点，点 $Q(x_2,f(x_2))$ 在圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 上运动时，则函数 $f(x)$ 图象的切线斜率的最大值为（　　）

A. $3+\sqrt{2}$　　B. $2+\sqrt{3}$　　C. $2+\sqrt{2}$

D. $3+\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

因为 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，所以 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，又因为点 $P(x_1,f(x_1))$ 为坐标原点，所以 $f(0)=0,f'(0)=0$，$c=0,d=0$，

$f'(x)=3ax^2+2bx\le-\frac{2b}{3a}$，$x_2=-\frac{b}{2a}$，$f(x_2)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{4b^3}{27a^2}$，又点 $Q(x_2,f(x_2))$ 在圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 上运动，所以

$a<0$，$k=f'(x)=3ax^2+2bx\le-\frac{2b}{3a}=\frac{3}{2}\frac{y_2}{x_2}$，$\frac{y_2}{x_2}$ 表示是圆上动点与原点连线的斜率，由几何意义可求得 $\frac{y_2}{x_2}$ 的最大值为 $2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，因此 k 的最大值为 $3+\sqrt{3}$，故选 D.

2．已知函数 $f(x)=\ln\frac{x}{2}+\frac{1}{2},g(x)=e^{x-2}$，对于 $\forall m\in R,\exists n\in(0,+\infty)$ 使得 $g(m)=f(n)$ 成立，则 $n-m$ 的最小值为（　　）

A. $-\ln 2$　　B. $\ln 2$　　C. $2\sqrt{e}-3$　　D. e^2-3

【答案】B

【解析】由题意令 $e^{m-2}=\ln\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=t,(t>0)$，则 $m=\ln t+2,n=2e^{t-\frac{1}{2}}$，从而 $n-m=2e^{t-\frac{1}{2}}-\ln t-2=h(t)$，由 $h'(t)=2e^{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{t}=0$ 得 $t=\frac{1}{2}$，而当 $t>0$ 时 $h'(t)=2e^{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{t}$ 是单调递增函数，所以当 $t>\frac{1}{2}$ 时 $h'(t)>0$；当 $0<t<\frac{1}{2}$ 时 $h'(t)<0$；因此 $t=\frac{1}{2}$ 时 $h(t)$ 取最小值：$2e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}-\ln\frac{1}{2}-2=\ln 2$. 选 B.

3. 若不等式 $bx+c+9\ln x\le x^2$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$，$b\in(0,3)$ 恒成立，则实数 c 的取值范围是________.

【答案】$(-\infty,-9\ln 3]$

【解析】根据题意，得关于 b 的函数：$f(b)=xb+(9\ln x-x^2+c)$，这是一个一次函数，要使 $f(b)\le 0$ 对任意的 $b\in(0,3),x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则：$f(3)\le 0$

，即有：$3x+9\ln x-x^2+c\le 0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则有：

$c\le -3x-9\ln x+x^2$，可令函数 $g(x)=-3x-9\ln x+x^2$，求导可得：

$g'(x)=-3-\frac{9}{x}+2x=\frac{2x^2-3x-9}{x}=\frac{(2x+3)(x-3)}{x}$，发现有：

$g(x)_{\min}=g(3)=-9-9\ln 3+9=-9\ln 3$，故有：$c\le -9\ln 3$．

4.【2017安徽马鞍山二模】已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$．

（Ⅰ）证明曲线 $f(x)$ 上任意一点处的切线斜率不小于2；

（Ⅱ）设 $k\in R$，若 $g(x)=f(x)-2kx$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$g(x_2)<-2$．

【答案】（Ⅰ）见解析（Ⅱ）见解析

【解析】试题分析：（Ⅰ）先求导函数 $f'(x)$，只需证明 $f'(x)\ge 2$ 成立即可；（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-2kx=\ln x+\frac{1}{2}x^2-2kx-\frac{1}{2}(x>0)$， $g'(x)=\frac{1}{x}+x-2k$，可知 $g'(x)=\frac{1}{x}+x-2k=0$ 两根为 x_1,x_2，结合韦达定理可化简得 $g(x_2)=\ln x_2-\frac{x_2^2}{2}-\frac{3}{2}(x_2>1)$，研究函数 $h(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}(x>1)$ 的单调性，可证结论.

试题解析:（Ⅰ）因为 $x>0$，所以切线斜率 $f'(x)=\frac{1}{x}+x\ge 2$，当且仅当 $x=1$ 时取得等号；

（Ⅱ）$g(x)=f(x)-2kx=\ln x+\frac{1}{2}x^2-2kx-\frac{1}{2}\quad(x>0)$，

$g'(x)=\frac{1}{x}+x-2k$，

当 $k\le 1$ 时， $g'(x)=\frac{1}{x}+x-2k\ge 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot x}-2k=2-2k\ge 0$，

函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，无极值.

当 $k>1$ 时， $g'(x)=\frac{1}{x}+x-2k=\frac{x^2-2kx+1}{x}$，

由 $g'(x)=0$ 得 $x^2-2kx+1=0$， $\Delta=4(k^2-1)>0$，设两根为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=1$，

其中 $0<x_1=k-\sqrt{k^2-1}<1<x_2=k+\sqrt{k^2-1}$，

$g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上递增，在 (x_1,x_2) 上递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上递增，

从而 $g(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，

$$g(x_2)=\ln x_2+\frac{x_2^2}{2}-2kx_2-\frac{1}{2}=\ln x_2+\frac{x_2^2}{2}-(x_1+x_2)x_2-\frac{1}{2}$$

$$=\ln x_2+\frac{x_2^2}{2}-\left(\frac{1}{x_2}+x_2\right)x_2-\frac{1}{2}=\ln x_2-\frac{x_2^2}{2}-\frac{3}{2},$$

即 $g(x_2)=\ln x_2-\frac{x_2^2}{2}-\frac{3}{2}(x_2>1)$，

构造函数 $h(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}(x>1)$， $h'(x)=\frac{1}{x}-x<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减， 且 $h(1)=-2$. 故 $g(x_2)<-2$.

5.【2017 重庆二诊】已知曲线 $f(x)=\frac{\ln^2x+a\ln x+a}{x}$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线与直线 $2x+e^2y=0$ 平行， $a\in R$.

（1）求 a 的值；

（2）求证： $\frac{f(x)}{x}>\frac{a}{e^x}$.

【答案】（Ⅰ） $a=3$；（Ⅱ）见解析.

【解析】

试题分析：（1）先求导数，再运用导数的几何意义建立方程求解；（2）先将不等式进行等价转化，再运用导数分别求不等式中的两边的函数的最值进行分析推证：

（Ⅰ） $f'(x)=\frac{-\ln^2x+(2-a)\ln x}{x^2}$， 由题 $f'(e)=\frac{-1+2-a}{e^2}=-\frac{2}{e^2}\Rightarrow a=3$；

（Ⅱ） $f(x)=\frac{\ln^2x+3\ln x+3}{x}$， $f'(x)=\frac{-\ln x(\ln x+1)}{x^2}$， $f'(x)>0\Rightarrow\frac{1}{e}<x<1$，