指数与指数函数

高考概览	高考在本考点的常考题型为选择题，分值为5分，中等难度
考点研读	1.了解指数函数模型的实际背景 2．理解有理数指数幂的含义，了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算 3．理解指数函数的概念，理解指数函数的单调性，掌握指数函数图象通过的特殊点 4．体会指数函数是一类重要的函数模型

目录

狂刷小题 · 基础练
KUANG SHUA XIAO TI　JI CHU LIAN

精做大题 · 能力练
JING ZUO DA TI　NENG LI LIAN

狂刷小题·基础练

KUANG SHUA XIAO TI　JI CHU LIAN

一、基础小题

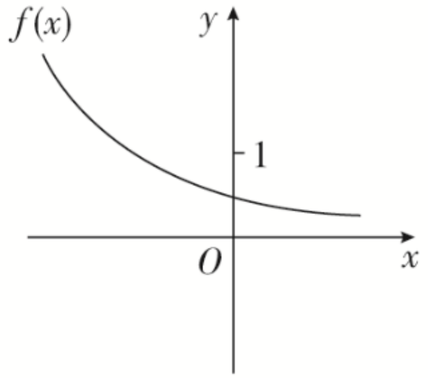
1．设 $2^x=8^{y+1}$，$9^y=3^{x-9}$，则 $x+y$ 的值为(　　)

A．18　　　　B．21

C．24　　　　D．27

解析　因为 $2^x=8^{y+1}=2^{3(y+1)}$，所以 $x=3y+3$，因为 $9^y=3^{2y}=3^{x-9}$，所以 $x-9=2y$，解得 $x=21$，$y=6$，所以 $x+y=27$.

2.函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象如图，其中 a，b 为常数，则下列结论正确的是(　　)



A．$a>1$，$b<0$

B．$a>1$，$b>0$

C．$0<a<1$，$b>0$

D．$0<a<1$，$b<0$

解析　由 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象可以观察出，函数 $f(x)=a^{x-b}$ 在定义域上单调递减，所以 $0<a<1$.函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象是 $f(x)=a^{x}$ 的图象向左平移得到的，所以 $b<0$.故选 D.

3．已知 $a=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，$b=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$，$c=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{5}{6}}$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A．$a>b>c$

B．$b>a>c$

C．$a>c>b$

D．$c>b>a$

解析　$\because a=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，$b=\left(\frac{2}{3}\right)^{2\times\frac{2}{3}}=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{3}}$，又幂函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$在$(0，+\infty)$上单调递增，且$\frac{4}{5}>\frac{4}{9}$，$\therefore\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{3}}$，即 $a>b$.又 $c=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{5}{6}}$，指数函数 $y=\left(\frac{4}{9}\right)^{x}$在定义域上单调递减，$\therefore\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{5}{6}}$，即 $b>c$，故 $a>b>c$.

4．某企业在生产中为倡导绿色环保的理念，购入污水过滤系统对污水进行过滤处理，已知在过滤过程中污水中的剩余污染物数量 N(mg/L)与时间 t(h)的关系为 $N=N_0e^{-kt}$，其中 N_0 为初始污染物的数量，k 为常数．若在某次过滤过程中，前 2 小时过滤掉了污染物的 30%，则可计算前 6 小时共能过滤掉污染物的(　　)

A．49%　　B．51%

C．65.7%　　D．72.9%

解析　依题意，前 2 小时过滤后剩余污染物的数量为 $70\%N_0$，于是 $70\%N_0=N_0e^{-2k}$，解得 $e^{-2k}=0.7$，因此前 6 小时过滤后剩余污染物的数量为 $N=N_0e^{-6k}=N_0(e^{-2k})^3=N_0\times0.7^3=0.343N_0$，所以前 6 小时共能过滤掉污染物的$\dfrac{N_0-0.343N_0}{N_0}\times100\%=65.7\%$.故选 C.

5．函数 $f(x)=x^2-bx+c$ 满足 $f(x+1)=f(1-x)$，且 $f(0)=3$，则 $f(b^x)$ 与 $f(c^x)$的大小关系是(　　)

A．$f(b^x)\leqslant f(c^x)$　　B．$f(b^x)\geqslant f(c^x)$

C．$f(b^x)>f(c^x)$　　D．与 x 有关，不确定

解析　$\because f(x+1)=f(1-x)$，$\therefore f(x)$图象的对称轴为直线 $x=1$，由此可得 $b=2$.又 $f(0)=3$，$\therefore c=3$.$\therefore f(x)$在$(-\infty，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增．若 $x\geqslant 0$，则 $3^x\geqslant 2^x\geqslant 1$，$\therefore f(3^x)\geqslant f(2^x)$．若 $x<0$，则 $3^x<2^x<1$，$\therefore f(3^x)>f(2^x)$，$\therefore f(3^x)\geqslant f(2^x)$．故选 A.

6．若函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{ax^2+2x+3}$ 的值域是 $\left(0,\frac{1}{9}\right]$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是（　　）

A．$(-\infty,-1]$　　B．$[1,+\infty)$

C．$(-\infty,2]$　　D．$[2,+\infty)$

解析　令 $g(x)=ax^2+2x+3$，由于 $f(x)$ 的值域是 $\left(0,\frac{1}{9}\right]$，所以 $g(x)$ 的值域是 $[2,+\infty)$，因此有 $\begin{cases} a>0, \\ \frac{12a-4}{4a}=2, \end{cases}$ 解得 $a=1$.所以 $g(x)=x^2+2x+3$，$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x+3}$，由于 $g(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-1]$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1]$.

7．已知函数 $f(x)=2^{x}-2^{-x}$，则不等式 $f(2x)+f(x^{2}-x)>0$ 的解集为(　　)

A．$(0，1)$　　B．$(-3，0)$

C．$(-\infty，-1)\cup(0，+\infty)$　　D．$(-\infty，0)\cup(3，+\infty)$

解析　因为函数 $f(x)=2^{x}-2^{-x}$ 的定义域为 **R**，$f(-x)=2^{-x}-2^{x}=-f(x)$，则函数 $f(x)$是奇函数，且是 **R** 上的增函数，$f(2x)+f(x^{2}-x)>0\Leftrightarrow f(x^{2}-x)>f(-2x)$，于是得 $x^{2}-x>-2x$，解得 $x<-1$ 或 $x>0$，所以所求不等式的解集是$(-\infty，-1)\cup(0，+\infty)$.

8．(多选)设函数 $f(x)=2^x$，对于任意的 x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$，下列命题中正确的是(　　)

A．$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

B．$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

C．$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$

D．$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

解析　因为 $2^{x_1}\cdot 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$，故 A 正确；因为 $2^{x_1}+2^{x_2}\neq 2^{x_1\cdot x_2}$，故 B 错误；函数 $f(x)=2^x$ 在 **R** 上是增函数，若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，故 C 正确；$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\dfrac{2^{x_1}+2^{x_1}}{2}\geqslant\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2^{\frac{x_1+x_2}{2}}=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，又 $x_1\neq x_2$，所以 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，故 D 正确．故选 ACD.

9．(多选)已知函数$f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$，则下列说法正确的是(　　)

A．函数$f(x)$的图象关于原点对称

B．函数$f(x)$的图象关于y轴对称

C．函数$f(x)$的值域为$(-1，1)$

D．$\forall x_1，x_2\in\mathbf{R}$，且$x_1\neq x_2$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$

解析　$f(-x)=\frac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}=\frac{1-3^{x}}{3^{x}+1}=-f(x)$，所以函数为奇函数，函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，故 A 正确，B 错误；设 $y=\frac{3^{x}-1}{3^{x}+1}$，整理得 $3^{x}=\frac{1+y}{1-y}$，所以 $\frac{1+y}{1-y}>0$，即 $\frac{y+1}{y-1}<0$，解得 $-1<y<1$，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$，故 C 正确；因为 $\forall x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$，若 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则该函数为减函数，而 $f(x)=\frac{3^{x}-1}{3^{x}+1}=1-\frac{2}{3^{x}+1}$ 为增函数，故 D 错误.