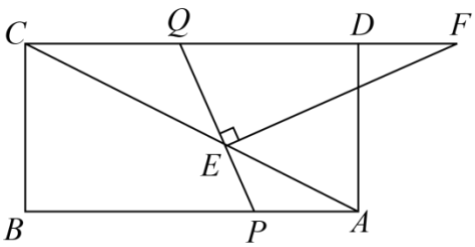
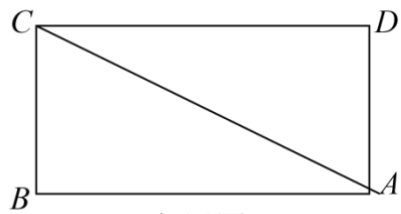
相似三角形中的动点问题

典例精析

【典例 1】如图，在矩形$ABCD$中，$AB=4$，$AD=2$，动点 P 从点 A 开始以每秒 2 个单位长度沿AB向终点 B 运动，同时，动点 Q 从点 C 开始沿$C-D-A$以每秒 3 个单位长度向终点 A 运动，它们同时到达终点．连接PQ交AC于点 E．过点 E 作$EF\perp PQ$，交直线CD于点 F.





备用图

（1）当点 Q 在线段CD上时，求证：$\frac{CE}{AE}=\frac{3}{2}$.

（2）当$DQ=1$时，求$\triangle APE$的面积.

（3）在 P，Q 的运动过程中，是否存在某一位置，使得以点 E，F，Q 为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似？若存在，求BP的长；若不存在，请说明理由.

【思路点拨】

（1）证明$\triangle CQE\backsim\triangle APE$即可得到答案；

（2）①当点 Q 在CD上时，如图 1，$CQ=CD-DQ=3$．过点 E 作AB的垂线交AB于点 M，交CD于点 N．②当点 Q 在AD上时，如图 2，作$EM\perp AB$于点 M，设$EM=h$，再利用相似三角形的性质求解三角形的高，再利用面积公式计算即可；

(3)分三种情况讨论:①当点 Q 在CD上时,设$CQ=3t$,则$AP=2t$,若点 F 在 Q 的右侧,如图 3,当$\triangle FEQ\backsim\triangle ABC$，则$\angle1=\angle2$，作$PH\perp CD$于点 H，而$\angle B=\angle PHQ=90°$，

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle PHQ$，则$\frac{PH}{QH}=\frac{AB}{BC}=2$，从而可得答案；若点 F 在 Q 的左侧，如图 4，$\triangle FEQ\backsim\triangle ABC$，点 F 与点 C 重合,从而可得答案;②当点 Q 在 AD 上时,如图 5,$\triangle FEQ\backsim\triangle ABC$,$\frac{EF}{EQ}=\frac{BA}{BC}=2$,$\angle FEG=\angle B=90°$,作$EN\perp CD$于点 N，$EG\perp AD$于点 G．，则$\angle NEQ=90°$，再结合相似三角形的性质建立方程可得答案.

【解题过程】

（1）当点 Q 在线段CD上时，由题意可得：$AB\parallel CD$，$CQ=3t$，$AP=2t$，

$\therefore\triangle CQE\backsim\triangle APE$，

$\therefore \frac{CE}{AE}=\frac{CQ}{AP}=\frac{3}{2}$.

（2）①当点 Q 在CD上时，如图 1，$CQ=CD-DQ=3$．过点 E 作AB的垂线交AB于点 M，交CD于点 N.

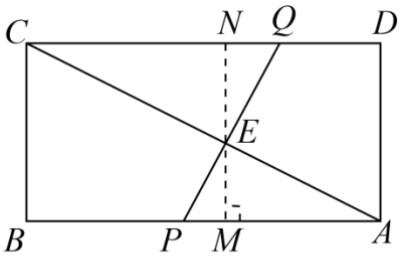


图1

由$\frac{CQ}{AP}=\frac{V_{点Q}}{V_{点P}}=\frac{3}{2}$，得$AP=2$.

由$\triangle CQE\backsim\triangle APE$，得$\frac{EN}{EM}=\frac{CE}{AE}=\frac{3}{2}$，

$\therefore EM=\frac{2}{5}MN=\frac{4}{5}$，

$\therefore S_{\triangle APE}=\frac{1}{2}AP\cdot EM=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$.

②当点 Q 在AD上时，如图 2，作$EM\perp AB$于点 M，设$EM=h$.

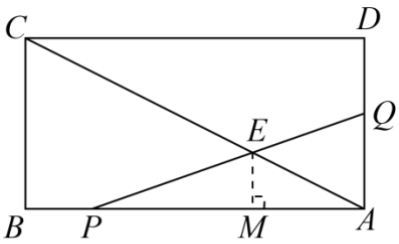


图2

$AQ=AD-DQ=1$，$AP=\frac{2}{3}(CD+DQ)=\frac{10}{3}$.

同理：$\triangle AME\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{EM}{AM}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，

$\therefore AM=2EM=2h$.

同理：$\triangle PME\backsim\triangle PAQ$，得$\frac{EM}{PM}=\frac{AQ}{PA}=\frac{1}{\frac{10}{3}}=\frac{3}{10}$，

$\therefore PM=\frac{10}{3}EM=\frac{10}{3}h$.

$\therefore AP=PM+AM=\frac{10}{3}h+2h=\frac{10}{3}$，解得$h=\frac{5}{8}$，

$\therefore S_{\triangle APE}=\frac{1}{2}AP\cdot EM=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{25}{24}$.

∴△ APE的面积为$\frac{4}{5}$或$\frac{25}{24}$.

（3）①当点 Q 在CD上时，设$CQ=3t$，则$AP=2t$.

若点 F 在 Q 的右侧，如图 3，当△ $FEQ\backsim$ △ ABC，则$\angle 1=\angle 2$.

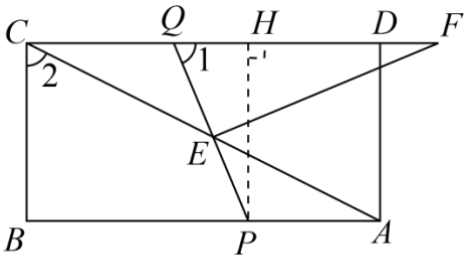


图3

作$PH\perp CD$于点 H，而$\angle B=\angle PHQ=90°$，

∴△ $ABC\backsim$△ PHQ，则$\frac{PH}{QH}=\frac{AB}{BC}=2$，

∴$QH=\frac{1}{2}PH=1$.

∵$HD=AP=2t$，

∴$CD=CQ+QH+HD=3t+1+2t=4$，

解得$t=\frac{3}{5}$.

∴$BP=4-2t=4-\frac{6}{5}=\frac{14}{5}$.

若点 F 在 Q 的左侧，如图 4，△ $FEQ\backsim$ △ ABC，点 F 与点 C 重合.

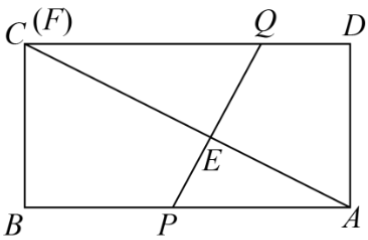


图4

∵$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

又∵$\frac{CE}{AE}=\frac{3}{2}$

∴$AE=\frac{2}{5}AC=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

∵由△ $FEQ\backsim$ △ ABC结合对顶角可得：$\angle AEP=\angle B=90°$，而$\angle PAE=\angle BAC$，

∴△ $AEP\backsim$ △ ABC，

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AP}{AC}$，即$\frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{4}=\frac{AP}{2\sqrt{5}}$，则$AP=2$，

$\therefore BP=AB-AP=2$.

②当点Q在AD上时，如图5，$\triangle FEQ\backsim\triangle ABC$，$\frac{EF}{EQ}=\frac{BA}{BC}=2$，$\angle FEG=\angle B=90°$，

作$EN\perp CD$于点N，$EG\perp AD$于点G.，则$\angle NEQ=90°$，

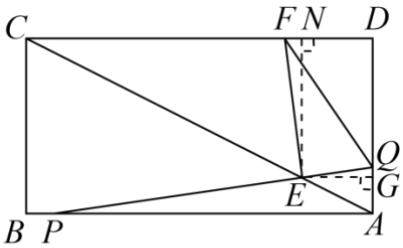


图5

由$\angle FEQ=\angle NEG=90°$，得$\angle FEN=\angle QEG$，

$\therefore$Rt$\triangle FEN\backsim$Rt$\triangle QEG$，

$\therefore \frac{EN}{EG}=\frac{EF}{EQ}=2$.

同理可得：$\frac{AG}{EG}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，

设$AG=k$，则$EG=2AG=2k$，$EN=2EG=4k$.

$\therefore DG=EN=4k$，$AD=AG+DG=5k$，

由$AD=2$，得$5k=2$，$k=\frac{2}{5}$，

$\therefore AG=\frac{2}{5}$，$EG=\frac{4}{5}$.

由题意，$\frac{AQ}{BP}=\frac{V_{点Q}}{V_{点P}}=\frac{6-3t}{4-2t}=\frac{3}{2}$，

设$AQ=3x$，则$BP=2x$，$AP=4-2x$，$QG=AQ-AG=3x-\frac{2}{5}$，

由$\triangle QGE\backsim\triangle QAP$，得$\frac{EG}{AP}=\frac{QG}{QA}$，即$\frac{\frac{4}{5}}{4-2x}=\frac{3x-\frac{2}{5}}{3x}$，

化简，得$15x^2-26x+4=0$，

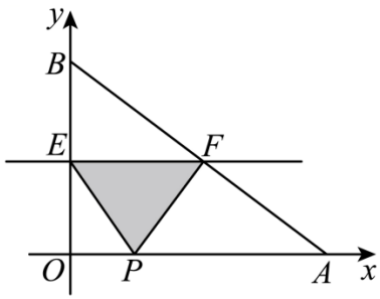
解得$x_1=\frac{13+\sqrt{109}}{15}$（舍去），$x_2=\frac{13-\sqrt{109}}{15}$.

$\therefore BP=2x=\frac{26-2\sqrt{109}}{15}$.

综上所述，BP的长为$\frac{14}{5}$或2或$\frac{26-2\sqrt{109}}{15}$.

学霸必刷

1．（2023 秋·江苏常州·九年级常州市第二十四中学校考阶段练习）如图，在平面直角坐标系中，A、B两点的坐标分别为$(20,0)$和$(0,15)$，动点P从点A出发在线段AO上以每秒2cm的速度向原点O运动，动直线EF从x轴开始以每秒1cm的速度向上平行移动(即$EF\parallel x$轴)，分别与y轴、线段AB交于点E、F，连接EP、FP，设动点P与动直线EF同时出发，运动时间为t秒．



（1）求$t=9$时，$\triangle PEF$的面积；

（2）直线EF、点P在运动过程中，是否存在这样的t使得$\triangle PEF$的面积等于40cm^2？若存在，请求出此时t的值；若不存在，请说明理由；

（3）当t为何值时，$\triangle EOP$与$\triangle BOA$相似．

【思路点拨】

（1）由于$EF//x$轴，则$S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot OE$，$t=9$时，$OE=9$，关键是求$EF$.易证$\triangle BEF\backsim\triangle BOA$，则$\frac{EF}{OA}=\frac{BE}{BO}$，从而求出$EF$的长度，得出$\triangle PEF$的面积；

（2）假设存在这样的t，使得$\triangle PEF$的面积等于40cm^2，则根据面积公式列出方程，由根的判别式进行判断，得出结论；

（3）如果$\triangle EOP$与$\triangle BOA$相似，由于$\angle EOP=\angle BOA=90°$，则只能点$O$与点$O$对应，然后分两种情况分别讨论：①点$P$与点$A$对应；②点$P$与点$B$对应．即可得解．

【解题过程】

（1）$\because EF//OA$，

$\therefore\angle BEF=\angle BOA$

又$\because\angle B=\angle B$，

$\therefore\triangle BEF\backsim\triangle BOA$，

$\therefore\frac{EF}{OA}=\frac{BE}{BO}$，

当$t=9$时，$OE=9$，$OA=20$，$OB=15$，$BE=OB-OE=15-9=6$，

$\therefore EF=\frac{20\times6}{15}=8$，

$\therefore S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}EF\cdot OE=\frac{1}{2}\times8\times9=36(\text{cm}^2)$；

（2）不存在．

理由：$\because\triangle BEF\backsim\triangle BOA$，

$\therefore EF=\frac{BE\cdot OA}{BO}=\frac{(15-t)\cdot20}{15}=\frac{4}{3}(15-t)$，

$\therefore\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}(15-t)\times t=40$，

整理，得$t^2-15t+60=0$，

$\because\triangle=15^2-4\times1\times60<0$，

∴方程没有实数根．

∴不存在使得$\triangle PEF$的面积等于40cm^2的t值；

（3）当$\angle EPO=\angle BAO$时，$\triangle EOP\backsim\triangle BOA$，

$\therefore\frac{OP}{OA}=\frac{OE}{OB}$，即$\frac{20-2t}{20}=\frac{t}{15}$，

解得$t=6$；

当$\angle EPO=\angle ABO$时，$\triangle EOP\backsim\triangle AOB$，

$\therefore\frac{OP}{OB}=\frac{OE}{OA}$，即$\frac{20-2t}{15}=\frac{t}{20}$，

解得$t=\frac{80}{11}$.

∴当$t=6\text{s}$或$t=\frac{80}{11}\text{s}$时，$\triangle EOP$与$\triangle BOA$相似.

2．（2022·四川·九年级专题练习）如图 1，已知矩形$ABCD$的边长$AB=3\text{cm}$，$BC=6\text{cm}$．某一时刻，动点 M 从点 A 出发，沿AB以1cm/s的速度向点 B 匀速运动：同时点 N 从点 D 出发，沿DA方向以2cm/s的速度向点 A 匀速运动，点 N 运动到点 A 时停止运动，运动时间为 t.

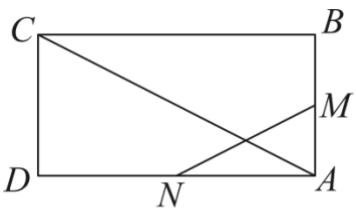


图1

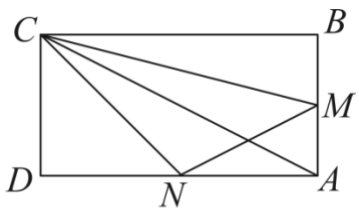


图2

（1）若$\triangle AMN$是等腰直角三角形，则$t=$_____（直接写出结果）．

（2）是否存在时刻 t，使以 A、M、N 为顶点的三角形与$\triangle ACD$相似？若存在，求 t 的值，若不存在，请说

明理由.

（3）如图 2，连接CN、CM，试求$CN+2CM$的最小值.

【思路点拨】

（1）根据题意可知只有$AM=AN$时，$\triangle AMN$是等腰直角三角形，再根据题意可用 t 表示出$AM=t$，$AN=6-2t$，列出等式，解出 t 即可；

（2）分类讨论①当$\triangle ACD\sim\triangle NMA$时和②当$\triangle CAD\sim\triangle NMA$时，列出比例式，代入数据，即可求解；

（3）取 CN 中点 E，作 E 点关于 CD 的对称点E'，连接CE'. 作 M 点关于 BC 的对称点M'，连接CM'，$E'M'$. 根据作图可知$CE'=CE$，$CM'=CM$，即可知当$CE'+CM'$最小时$CN+2CM$最小，即最小值为$E'M'$的长. 连接$E'E$并延长，交 CD 于点 F，AB 于点 G. 由作图结合题意易求出$E'G=E'F+AD=t+6$，$BG=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$，$BM'=BM=AB-AM=3-t$，从而可求出$GM'=BG+BM'=\frac{9}{2}-t$. 在$Rt\triangle E'GM'$中，利用勾股定理可求出$E'M'=\sqrt{E'G^2+GM'^2}=\sqrt{2(t+\frac{3}{4})^2+\frac{441}{8}}$，最后根据二次函数的性质，即得出$t=0$时，$\sqrt{2(t+\frac{3}{4})^2+\frac{441}{8}}$最小，即此时$E'M'=\frac{15}{2}$，故可求出$CN+2CM$的最小值为 15.

【解题过程】

（1）$\because\angle MAN=90°$，

$\therefore$若$\triangle AMN$是等腰直角三角形时，只有$AM=AN$.

根据题意可知$AM=t$，$DN=2t$，则$AN=AD-DN=6-2t$，

$\therefore t=6-2t$，

解得$t=2$，

故答案为：2.

（2）$\because\angle MAN=\angle ADC=90°$，

$\therefore$以 A、M、N 为顶点的三角形与$\triangle ACD$相似分为两种情况，

①当$\triangle ACD\sim\triangle NMA$时，有$\frac{AD}{AN}=\frac{CD}{AM}$，即$\frac{6}{6-2t}=\frac{3}{t}$，

解得：$t=\frac{3}{2}$；

②当$\triangle CAD\sim\triangle NMA$时，有$\frac{AD}{AM}=\frac{CD}{AN}$，即$\frac{6}{t}=\frac{3}{6-2t}$，

解得：$t=\frac{12}{5}$.

当$t=\frac{3}{2}$或$t=\frac{12}{5}$时，以 A、M、N 为顶点的三角形与$\triangle ACD$相似；

（3）如图，取 CN 中点 E，作 E 点关于 CD 的对称点E'，连接CE'．作 M 点关于 BC 的对称点M'，连接CM'，$E'M'$．

根据作图可知$CE'=CE$，$CM'=CM$，

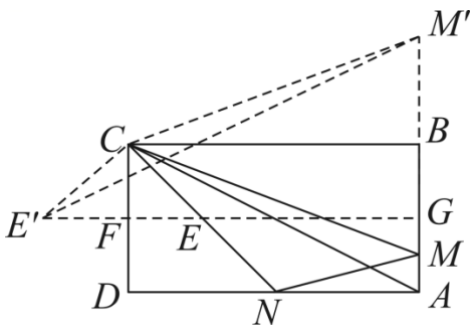
$\therefore CN+2CM=2(CE+CM)=2(CE'+CM')$，

$\therefore$当$CE'+CM'$最小时$CN+2CM$最小，

$\because CE'+CM'\geq E'M'$，

$\therefore CE'+CM'$的最小值为$E'M'$的长，即$CN+2CM$的最小值为 $2E'M'$的长．

如图，连接$E'E$并延长，交 CD 于点 F，AB 于点 G．



$\because$作 E 点关于 CD 的对称点E'，

$\therefore E'F//AD$，$E'F=EF$．

又$\because E$ 为中点，

$\therefore E'F=EF=\frac{1}{2}DN=t$，$G$ 为 AB 中点，

$\therefore E'G=E'F+AD=t+6$，$BG=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$．

$\because$作 M 点关于 BC 的对称点M'，

$\therefore BM'=BM=AB-AM=3-t$，

$\therefore GM'=BG+BM'=\frac{3}{2}+3-t=\frac{9}{2}-t$．

在$Rt\triangle E'GM'$中，$E'M'=\sqrt{E'G^2+GM'^2}=\sqrt{(6+t)^2+(\frac{9}{2}-t)^2}=\sqrt{2(t+\frac{3}{4})^2+\frac{441}{8}}$，

$\because t\geq 0$，$2>0$

$\therefore t=0$时，$\sqrt{2(t+\frac{3}{4})^2+\frac{441}{8}}$最小，即$E'M'=\sqrt{2\times(\frac{3}{4})^2+\frac{441}{8}}=\frac{15}{2}$．

$\therefore CN+2CM=2E'M'=15$．

3．（2022 秋·江苏泰州·九年级校联考阶段练习）如图 1，四边形 $ABCD$ 是矩形，点 P 是对角线 AC 上的一个动点（不与 A、C 重合），过点 P 作 $PE\perp CD$ 于点 E，连接 PB，已知 $AD=3$，$AB=4$，设 $AP=m$．

（1）当 $m=1$ 时，求 PE 的长；

（2）连接 BE，试问点 P 在运动的过程中，能否使得$\triangle PAB\cong\triangle PEB$？请说明理由；

（3）如图 2，过点 P 作 $PF\perp PB$ 交 CD 边于点 F，设 $CF=n$，试判断 $5m+4n$ 的值是否发生变化，若不变，请求出它的值；若变化，请说明理由．

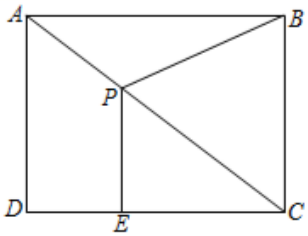


图 1

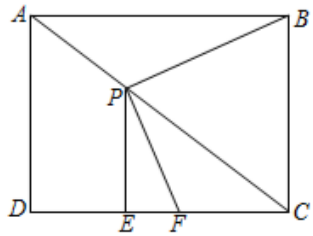


图 2

【思路点拨】

（1）根据勾股定理得出 AC，进而利用相似三角形的判定和性质解答即可；

（2）根据全等三角形的性质和勾股定理解答即可；

（3）根据相似三角形的判定和性质以及勾股定理解答即可．

【解题过程】

解：（1）连接 BE，

由已知：在 Rt$\triangle ADC$ 中，$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

当 $AP=m=1$ 时，$PC=AC-AP=5-1=4$，

$\because PE\perp CD$，

$\therefore\angle PEC=\angle ADC=90°$，

$\because\angle ACD=\angle PCE$，

$\therefore\triangle ACD\backsim\triangle PCE$，

$\therefore\frac{AD}{PE}=\frac{AC}{PC}$，即$\frac{3}{PE}=\frac{5}{4}$，

$\therefore PE=\frac{12}{5}$；

（2）如图 1，当$\triangle PAB\cong\triangle PEB$ 时，

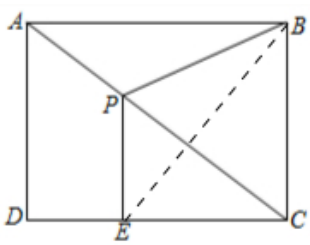


图 1

∴$PA=PE$，

∵$AP=m$，则 $PC=5-m$，

由（1）得：$\triangle ACD\backsim\triangle PCE$，

∴$\frac{3}{PE}=\frac{5}{5-m}$，

∴$PE=\frac{3(5-m)}{5}$，

由 $PA=PE$，即$\frac{3(5-m)}{5}=m$，

解得：$m=\frac{15}{8}$，

∴$EC=\sqrt{PC^2-PE^2}=\sqrt{\left(5-\frac{15}{8}\right)^2-\left(\frac{15}{8}\right)^2}=\frac{5}{2}$，

∴$BE=\sqrt{EC^2+BC^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+3^2}=\frac{\sqrt{31}}{2}\neq AB$，

∴$\triangle PAB$ 与$\triangle PEB$ 不全等，

∴不能使得$\triangle PAB\cong\triangle PEB$；

（3）如图 2，延长 EP 交 AB 于 G，

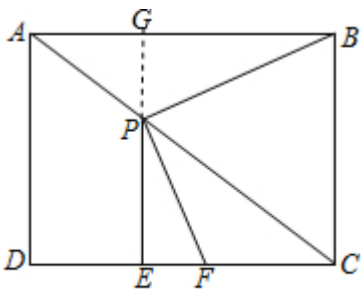


图 2

∵$BP\perp PF$，

∴$\angle BPF=90°$，

∴$\angle EPF+\angle BPG=90°$，

∵$EG\perp AB$，

∴$\angle PGB=90°$，

∴$\angle BPG+\angle PBG=90°$，

∴$\angle PBG=\angle EPF$，

∵$\angle PEF=\angle PGB=90°$，

∴$\triangle BPG\backsim\triangle PFE$，

$\therefore \frac{BG}{PE}=\frac{PG}{EF}$,

由（1）得：$\triangle PCE\backsim\triangle ACD$，$PE=\frac{3(5-m)}{5}$,

$\therefore \frac{EC}{DC}=\frac{PC}{AC}$,

即$\frac{EC}{4}=\frac{5-m}{5}$,

$\therefore EC=\frac{4(5-m)}{5}$,

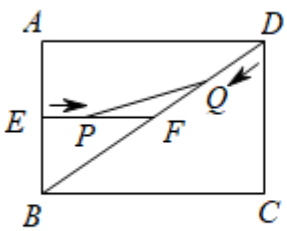
$\therefore BG=EC=\frac{4(5-m)}{5}$,

$\therefore \frac{3-\frac{3(5-m)}{5}}{\frac{4(5-m)}{5}-n}=\frac{4(5-m)}{3(5-m)}=\frac{4}{3}$,

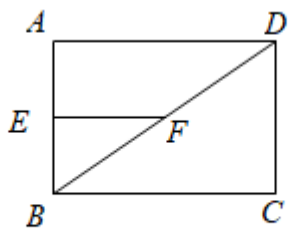
$\therefore 5m+4n=16$.

4．（2023 秋·河北保定·九年级统考期末）如图（1），在矩形$ABCD$中，$AB=6\text{cm}$，$\tan\angle ABD=\frac{4}{3}$，$E$、$F$分别是$AB$、$BD$中点，连接$EF$，点 P 从点 E 出发，沿EF方向匀速运动，速度为1cm/s，同时，点 Q 从点 D 出发，沿DB方向匀速运动，速度为2cm/s，当点 P 停止运动时，点 Q 也停止运动，连接PQ，设运动时间为ts（$0<t<4$），解答下列问题：

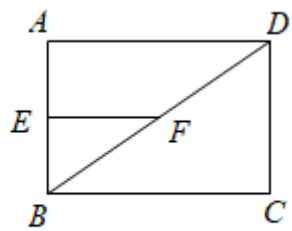
$\therefore t=1$



图①



备用图



备用图

（1）当$0<t<2.5$时，$FQ=$_____．（用含有 t 的式子表示）

（2）当点 Q 在线段DF上运动时，若$\triangle PQF$的面积为0.6cm^2，求 t 的值；

（3）当 t 为_____时，$\triangle PQF$为等腰三角形？（直接写出结果）．

【思路点拨】

（1）先由题目条件求出AD ，再利用勾股定理求出DF，当$0<t<2.5$时，接着判断出点 Q 的位置，即可求解．

（2）先判断出$\triangle QMF\backsim\triangle BEF$，进而得出，再利用面积公式建立方程求解即可．

（3）分点 Q 在DF 和BF 上，利用相似三角形的性质建立方程求解即可得出结论．

【解题过程】

（1）在矩形$ABCD$中，$\angle A=90°$

∴在直角三角形DBA中$\tan\angle ABD=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{6}=\frac{4}{3}$

$\therefore AD=8$

∵E、F 分别是AB、BD中点，

$\therefore EF=\frac{1}{2}AD=4$

$\because BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=10$

$\therefore DF=\frac{1}{2}BD=5$

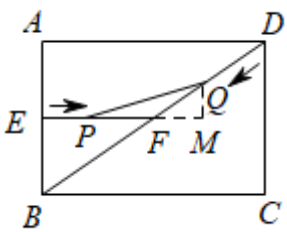
∴ Q从 D 到 F 的时间为$\frac{5}{2}=2.5$

当$0<t<2.5$时，Q 在线段DF上，

$\therefore FQ=DF-DQ=5-2t.$

故答案为：$5-2t.$

（2）过点 Q 作$QM\perp EF$交EF延长线于点 M，



可知：$QM\parallel BE$，

∴△ $QMF\backsim$ △ BEF，

$\therefore\frac{QM}{BE}=\frac{QF}{BF}$，

$\therefore\frac{QM}{3}=\frac{5-2t}{5}$，可得$QM=\frac{3}{5}(5-2t)$，

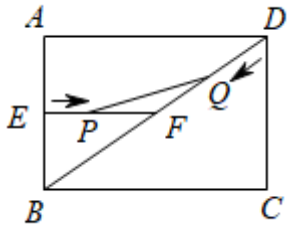
$\therefore S_{\triangle PFQ}=\frac{1}{2}\times PF\cdot QM=\frac{1}{2}\times(4-t)\times\frac{3}{5}(5-2t)=0.6=\frac{3}{5}$，

解得：$t=\frac{9}{2}$（舍去）或$t=2$，

∴当$t=2$时，△ PQF的面积为0.6cm^2；

故答案为：$t=2$.

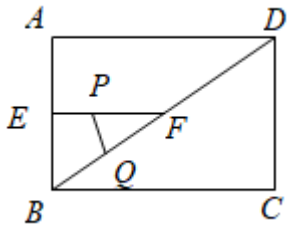
（3）当点 Q 在DF 上时，如图$PF = QF$



$\therefore 4 - t = 5 - 2t$

$\therefore t = 1$

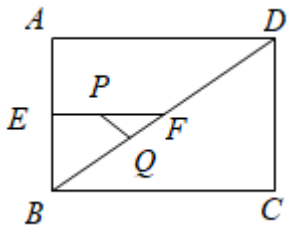
当点 Q 在BF 上时，如图$PF = QF$



$\therefore 4 - t = 2t - 5$

$\therefore t = 3$

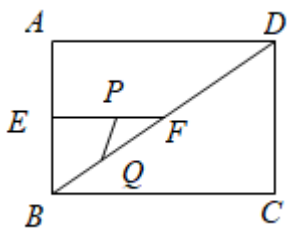
当$PQ = FQ$时，如图



$\therefore \frac{\frac{1}{2}(4-t)}{2t-5} = \frac{4}{5}$

$\therefore t = \frac{20}{7}$

当$PF = PQ$时，如图



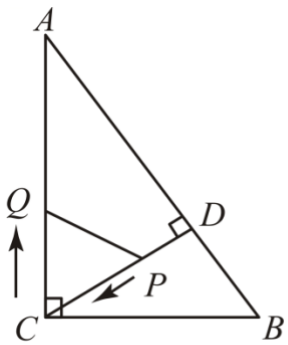
$\therefore \frac{\frac{1}{2}(2t-5)}{4-t}=\frac{4}{5}$

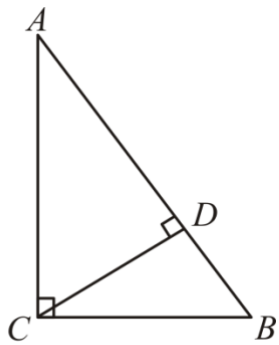
$\therefore t=\frac{19}{6}$

所以$t=1$或 3 或$\frac{20}{7}$或$\frac{19}{6}$时，$\triangle PQF$为等腰三角形.

故答案为：$t=1$或 3 或$\frac{20}{7}$或$\frac{19}{6}$.

5.（2023 秋·山东青岛·九年级山东省青岛第五十九中学校考阶段练习）如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，$CD\perp AB$于点D．点P从点D出发，沿线段DC向点C运动，点Q从点C出发，沿线段CA向点A运动，两点同时出发，速度都为每秒 1 个单位长度，当点P运动到C时，两点都停止运动．设运动时间为t秒．





备用图

（1）用含t的代数式分别表示线段$CP=$_____、$CQ=$_____.

（2）在运动过程中是否存在某一时刻t，使得$S_{\triangle CPQ}:S_{\triangle ABC}=9:100$？若存在，求出$t$的值；若不存在，请说明理由.

（3）是否存在某一时刻t，使得$\triangle CPQ$为直角三角形？若存在，求出所有满足条件的t的值；若不存在，请说明理由.

【思路点拨】

（1）利用勾股定理可求出AB长，再用等积法就可求出线段CD的长，据此求解即可；

（2）过点 P 作$PH\perp AC$，垂足为 H，通过三角形相似即可用 t 的代数式表示PH，从而可以求出 S 与 t 之间的函数关系式；利用$S_{\triangle CPQ}:S_{\triangle ABC}=9:100$建立 t 的方程，解方程即可解决问题；

（3）分两种情况，利用相似三角形得出比例式建立方程求解，即可得出结论.

【解题过程】

（1）解：如图 1，$\because \angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，

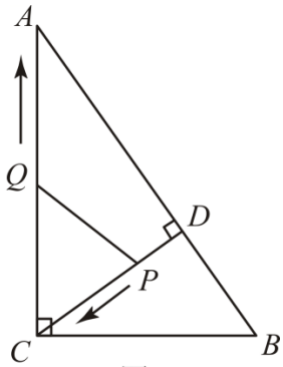


图1

$\therefore AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\because CD\perp AB$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

$\therefore CD=\frac{BC\cdot AC}{AB}=\frac{6\times 8}{10}=\frac{24}{5}$，

由题意得$CQ=PD=t$，

$\therefore CP=\frac{24}{5}-t$

故答案为：t，$\frac{24}{5}-t$；

（2）解：过点P作$PH\perp AC$，垂足为H，如图 2 所示．

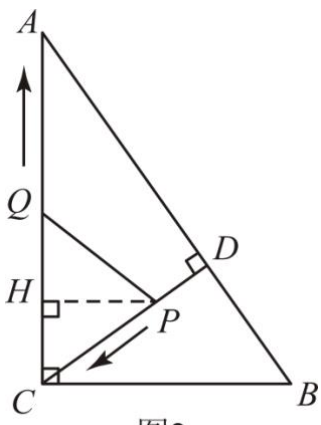


图2

由题可知$CQ=PD=t$，$CP=\frac{24}{5}-t$，

$\because \angle ACB=\angle CDB=90°$，

$\therefore \angle HCP=90°-\angle DCB=\angle B$，

$\because PH\perp AC$，

$\therefore \angle CHP=90°$，

$\therefore \angle CHP = \angle ACB$，

$\therefore \triangle CHP \backsim \triangle BCA$，

$\therefore \frac{PH}{AC} = \frac{PC}{AB}$，

$\therefore \frac{PH}{8} = \frac{4.8-t}{10}$，

$\therefore PH = \frac{96}{25} - \frac{4}{5}t$，

$\therefore S_{\triangle CPQ} = \frac{1}{2}CQ \cdot PH = \frac{1}{2}t\left(\frac{96}{25} - \frac{4}{5}t\right) = -\frac{2}{5}t^2 + \frac{48}{25}t$；

存在某一时刻t，使得$S_{\Delta CPQ}:S_{\Delta ABC} = 9:100$，

$\because S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$，且$S_{\triangle CPQ}:S_{\triangle ABC} = 9:100$，

$\therefore \left(-\frac{2}{5}t^2 + \frac{48}{25}t\right):24 = 9:100$，

整理得：$5t^2 - 24t + 27 = 0$，

即$(5t-9)(t-3) = 0$，

解得：$t = \frac{9}{5}$或$t = 3$，

$\because 0 \le t \le \frac{24}{5}$，

$\therefore$当$t = \frac{9}{5}$秒或$t = 3$秒时，$S_{\Delta CPQ}:S_{\Delta ABC} = 9:100$；

（3）解：由（2）知$\angle ACD = \angle B$，

①当$\angle CPQ = \angle BCA = 90°$时，

$\therefore \triangle CPQ \backsim \triangle BCA$，

$\therefore \frac{CP}{BC} = \frac{CQ}{AB}$，

$\therefore \frac{\frac{24}{5}-t}{6} = \frac{t}{10}$，

$\therefore t = 3$；

②当$\angle CQP = \angle BCA = 90°$时，

$\therefore \triangle CQP \backsim \triangle BCA$，

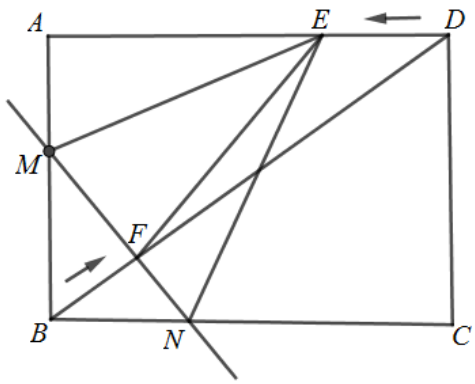
$\therefore \frac{CP}{AB} = \frac{CQ}{BC}$，

$\therefore \frac{\frac{24}{5}-t}{10} = \frac{t}{6}$

$\therefore t=\frac{9}{5}$,

即：t 为 3 秒或$\frac{9}{5}$秒时，$\triangle CPQ$为直角三角形.

6．（2022·山东青岛·统考一模）如图，在矩形 $ABCD$ 中，BD 是对角线，AB=6cm，BC=8cm．点 E 从点 D 出发，沿 DA 方向匀速运动，速度是 2cm/s；点 F 从点 B 出发，沿 BD 方向匀速运动，速度是 1cm/s，MN 是过点 F 的直线，分别交 AB、BC 于点 M、N，且在运动过程中始终保持 $MN\perp BD$．连接 EM、EN、EF，两点同时出发，设运动时间为 t（s）（$0<t<3.6$），请回答下列问题：



（1）求当 t 为何值时，$\triangle EFD\sim\triangle ABD$？

（2）设四边形 $BMEN$ 的面积为 S（cm²），求 S 关于 t 之间的函数关系式；

（3）求当 t 为何值时，$\triangle EFD$ 为等腰三角形；

（4）将$\triangle EMN$ 沿直线 MN 进行翻折，形成的四边形能否是菱形？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由；

【思路点拨】

（1）由题意得，DE=2t，BF=t，在$Rt\triangle ABD$中，BD=10，DF=BD=BF=10-t，当$\triangle ABD\sim\triangle EFD$，利用对应边成比例，即可求出 t 值；

（2）证得$\triangle BFM\sim\triangle BAD$，可求出$BM=\frac{5}{3}t$，$BN=\frac{5}{4}t$，$AM$=$AB$-$BM$=6-$\frac{5}{3}t$，代入面积表达式，即可求出关系式；

（3）分种情况进行讨论即可，注意结果是否符合；

（4）假设 t 值存在，则四边形 $EKCD$ 为矩形，利用勾股定理表示出$EN^2=EK^2+NK^2=\frac{169}{16}t^2-52t+100$，$EM^2=AM^2+AE^2=\frac{61}{6}t^2-52t+100$，可知 t=0，不符合题意，可知不存在符合的 t 值.

【解题过程】

（1）解：由题意得，DE=2t，BF=t，

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，

∴$\angle BAD=90°$，

在$Rt\triangle ABD$中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∴$DF=BD=BF=10-t$，

当$\triangle ABD\sim\triangle EFD$时，

则$\frac{ED}{AD}=\frac{DF}{DB}$，即$\frac{2t}{8}=\frac{10-t}{10}$，

解得：$t=\frac{20}{7}$.

即当 t 为$\frac{20}{7}$时，$\triangle EFD\sim\triangle ABD$；

（2）∵$MN\perp BD$，

∴$\angle MFB=90°$，

∵$\angle MBF=\angle MBF$，

∴$\triangle BFM\sim\triangle BAD$，

∴$\frac{BF}{AB}=\frac{BM}{BD}$，

即$\frac{t}{6}=\frac{BM}{10}$，

∴$BM=\frac{5}{3}t$，

同理$BN=\frac{5}{4}t$，

∴$AM=AB-BM=6-\frac{5}{3}t$，

$S=S_{梯形ABNE}-S_{\triangle AME}=\frac{(8-2t+\frac{5}{4}t)\times 6}{2}-\frac{(8-2t)\times(6-\frac{5}{3}t)}{2}=-\frac{5}{3}t^2+\frac{125}{12}t$，

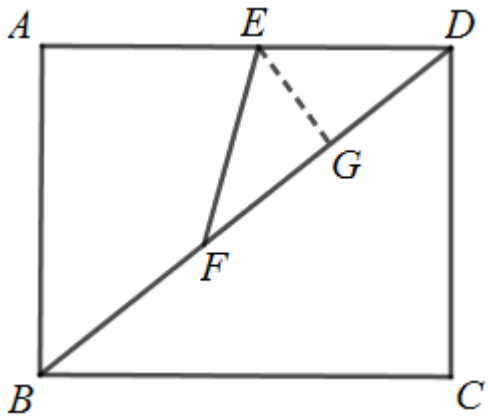
即 S 关于 t 之间的函数关系式为：$S=-\frac{5}{3}t^2+\frac{125}{12}t$；

（3）$ED=DF$ 时，

则 $2t=10-t$，

解得：$t=\frac{10}{3}$；

$ED=EF$ 时，过点 E 作 $EG\perp BF$ 于 G，



∵$ED=EF$，

∴△EFD为等腰三角形，

又∵$EG\perp DF$，

∴$DG=\frac{1}{2}DF=\frac{10-t}{2}$，

∵$\angle EDG=\angle BDA$，$\angle EGD=\angle BAD=90°$，

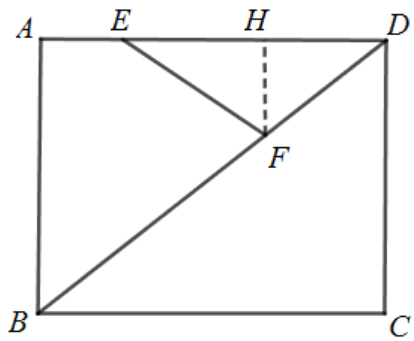
∴△$EGD\sim$△BAD，

∴$\frac{DG}{AD}=\frac{ED}{BD}$，

即$\frac{\frac{10-t}{2}}{8}=\frac{2t}{10}$，

∴$t=\frac{50}{21}$；

$EF=FD$ 时，过点 F 作 $FH\perp AD$，



∵$EF=FD$，

∴△EFD为等腰三角形，

又∵$FH\perp ED$，

∴$HD=\frac{1}{2}ED=t$，

∵∠*ADB*=∠*HDF*，∠*BAD*=∠*FHD*，

∴△ DHF ∼△ DAB，

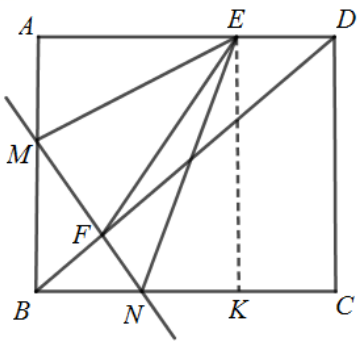
即$\frac{t}{8}=\frac{10-t}{10}$，

∴$t=\frac{40}{9}$＞3.6（舍去）；

综上所述，当$t=\frac{10}{3}$或$\frac{50}{21}$时，△ EFD为等腰三角形；

（4）假设存在符合题意的 *t*，则 *EM*=*EN*，

过点 *E* 作 *EK*⊥*BC* 交 *BC* 于 *K*，



则四边形 *EKCD* 为矩形，

∴*ED*=*CK*=2*t*，*EK*=*CD*=6，*NK*=*BC*-*BN*-*CK*=8 $-\frac{5}{4}t-2t=8-\frac{13}{4}t$，

∴$EN^2=EK^2+NK^2=6^2+(8-\frac{13}{4}t)^2=\frac{169}{16}t^2-52t+100$，

$EM^2=AM^2+AE^2=(6-\frac{5}{3}t)^2+(8-2t)^2=\frac{61}{6}t^2-52t+100$，

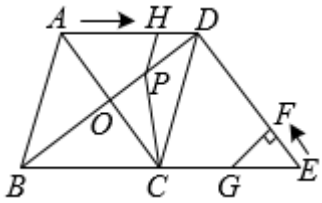
∴$\frac{169}{16}t^2-52t+100=\frac{61}{9}t^2-52t+100$，

即$t_1=t_2=0$，

∵*t*=0 不符合题意，

∴不存在符合题意的 *t*.

7．（2023 春·山东青岛·九年级专题练习）已知，在菱形 *ABCD* 中，对角线 *AC*，*BD* 相交于点 *O*，$AC=6\text{cm}$，$BD=8\text{cm}$.延长 *BC* 至点 *E*，使$CE=BC$，连接 *ED*，点 *F* 从点 *E* 出发，沿 *ED* 方向向点 *D* 运动，速度为1cm/s，过点 *F* 作$FG\perp ED$垂足为点 *F* 交 *CE* 于点 *G*；点 *H* 从点 *A* 出发，沿 *AD* 方向向点 *D* 运动，速度为1cm/s，过点 *H* 作$HP\parallel AB$，交 *BD* 于点 *P*，当 *F* 点停止运动时，点 *H* 也停止运动.设运动时间为$t(0<t\leq 3)$，解答下列问题：



（1）求证：$\angle BDE=90°$；

（2）是否存在某一时刻t，使 G 点在 ED 的垂直平分线上?若存在，求出t值；若不存在，请说明理由.

（3）设六边形 $PCGFDH$ 的面积为$S(\text{cm}^2)$，求S与t的函数关系式；

（4）连接 HG，是否存在某一时刻t，使$HG\parallel AC$?若存在，求出t值；若不存在，请说明理由.

【思路点拨】

（1）根据菱形和等腰三角形的性质，得四边形$ACED$为平行四边形、$\angle E=\angle CDE$，从而完成证明；

（2）根据平行四边形和垂直平分线的性质分析，即可得到答案；

（3）根据菱形和勾股定理的性质，得CE；延长 CP，交 AD 于点 M，根据相似三角形的性质，得MD；设AD和BC的距离为h，根据三角形面积的性质，得$h=\frac{24}{5}\text{cm}$，根据相似三角形的性质得$\frac{S_{\triangle GFE}}{S_{\triangle BDE}}=\frac{t}{6}$，通过计算即可得到答案；

（4）根据相似三角形的性质，得$GE=\frac{5t}{3}\text{cm}$，根据平行四边形和一元一次方程的性质计算，即可得到答案.

【解题过程】

（1）∵菱形 $ABCD$，

$\therefore AC\perp BD$，$AD=BC$，$AD//BC$，$AO=CO=\frac{1}{2}AC$，$BO=DO=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore\angle CBD+\angle ACB=90°$，$\angle CBD=\angle CDB$ ，

$\because CE=BC$，

$\therefore AD=CE$，$CD=CE$ ，

∴四边形$ACED$为平行四边形，$\angle E=\angle CDE$ ，

$\therefore AC//DE$ ，

$\therefore\angle ACB=\angle E$，

$\therefore\angle CDB+\angle CDE=90°$，即$\angle BDE=90°$；

（2）∵四边形$ACED$为平行四边形，

$\therefore DE=AC=6\text{cm}$ ，

$\because FG\perp ED$，

∴当$EF=DF=\frac{1}{2}DE$时，使 G 点在 ED 的垂直平分线上，

∴$t=\frac{\frac{1}{2}DE}{1\text{cm/s}}=3\text{s}$；

（3）∵点 F 从点 E 出发，沿 ED 方向向点 D 运动，速度为1cm/s，点 H 从点 A 出发，沿 AD 方向向点 D 运动，速度为1cm/s，

∴$AH=EF=t(\text{cm})$，

∵$AC\perp BD$，$AC=6\text{cm}$，$BD=8\text{cm}$，$AO=CO=\frac{1}{2}AC$，$BO=DO=\frac{1}{2}BD$，

∴$CE=BC=CD=AD=\sqrt{\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BD\right)^2}=5\text{cm}$，

∴$DH=AD-AH=5-t(\text{cm})$，

∵菱形 $ABCD$，

∴$\angle ADP=\angle CDP$，

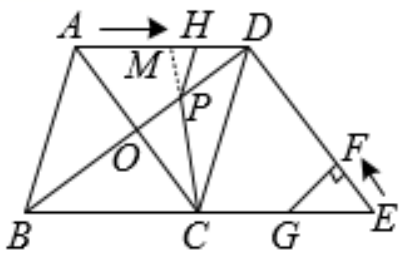
∵HP，

∴$\angle HPD=\angle CDP$，

∴$\angle ADP=\angle HPD$，

∴$PH=DH$，

如图，延长 CP，交 AD 于点 M，



∵HP，

∴$\angle MHP=\angle MDC$，

∵$\angle PMH=\angle CMD$，

∴$\triangle MPH\backsim\triangle MCD$，

∴$\frac{S_{\triangle MPH}}{S_{\triangle MCD}}=\frac{PH}{CD}=\frac{DH}{CD}=\frac{5-t}{5}$，$\frac{MH}{MD}=\frac{MH}{MH+DH}=\frac{PH}{CD}=\frac{5-t}{5}$，

∴$\frac{MH}{MH+5-t}=\frac{5-t}{5}$，

∴$MH=\frac{(5-t)^2}{t}$，

$\therefore MD = MH + DH = \frac{(5-t)^2}{t} + 5 - t = \frac{5(5-t)}{t}$ ，

设AD和BC的距离为h ，

$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \times OD = \frac{1}{2}AD \times h$ ，

$\therefore h = \frac{24}{5}\text{cm}$ ，

$\because \angle BDE = 90°$，$FG \perp ED$，

$\therefore \triangle GFE \backsim \triangle BDE$ ，

$\therefore \frac{S_{\triangle GFE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{EF}{DE} = \frac{t}{6}$ ，

$\therefore$六边形$PCGFDH$的面积，

$= S_{\triangle MCD} - S_{\triangle MPH} + S_{\triangle CDE} - S_{\triangle GFE}$

$= S_{\triangle MCD} - \frac{5-t}{5} \times S_{\triangle MCD} + S_{\triangle CDE} - \frac{t}{6} \times S_{\triangle BDE}$

$= \frac{t}{5} \times S_{\triangle MCD} + S_{\triangle CDE} - \frac{t}{6} \times S_{\triangle BDE}$

$= \frac{t}{5} \times \frac{1}{2} \times MD \times h + \frac{1}{2} \times CE \times h - \frac{t}{6} \times \frac{1}{2} \times (BC + CE) \times h$

$= \frac{t}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{5(5-t)}{t} \times \frac{24}{5} + \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{24}{5} - \frac{t}{6} \times \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{24}{5}$

$= 12 - \frac{12t}{5} + 12 - 4t$

$= 24 - \frac{32t}{5}\text{cm}$，

$\therefore S = 24 - \frac{32t}{5}\ (0 < t \leq 3)$；

（4）$\because \triangle GFE \backsim \triangle BDE$，

$\therefore \frac{GE}{BE} = \frac{EF}{DES}$ ，

$\therefore GE = \frac{EF \times BE}{DE} = \frac{t \times (BC+CE)}{6} = \frac{t \times 10}{6} = \frac{5t}{3}\text{cm}$ ，

$\because DH = AD - AH = 5 - t(\text{cm})$，

当$GE = DH$时，得$\frac{5t}{3} = 5 - t$，

$\therefore t = \frac{15}{8}$ ，

$\because AD//BE$，$GE = DH$，

$\therefore$四边形$HGED$为平行四边形，

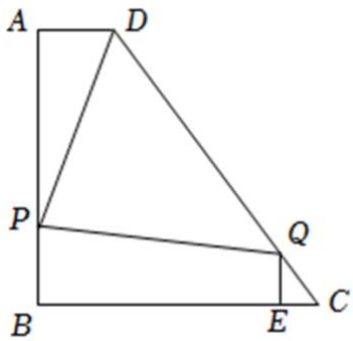
$\therefore HG//DE$ ，

$\because AC//DE$，

$\therefore HG//AC$，

$\therefore$当$t=\frac{15}{8}$时，$HG//AC$.

8．（2022 秋·山西运城·九年级校考阶段练习）如图，已知梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AD=1$，$AB=BC=4$，$CD=5$.



（1）求梯形$ABCD$的面积S；

（2）动点P从点B出发，以1cm/s的速度，沿$B\to A\to D\to C$方向，向点C运动：动点Q从点C出发，以1cm/s的速度，沿$C\to D\to A$方向，向点A运动，过点Q作$QE\perp BC$于点E．若P、Q两点同时出发，当其中一点到达目的地时整个运动随之结束，设运动时间为t秒．问：

①在运动过程中，是否存在这样的t，使得以P、D、Q为顶点的三角形恰好是以DP为底的等腰三角形？若存在，请求出所有符合条件的t的值；若不存在，请说明理由．

②在运动过程中，是否存在这样的t，使得以P、A、D为顶点的三角形与$\triangle COE$相似？若存在，请求出所有符合条件的t的值；若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）作$DF\parallel AB$交BC于F，即易证四边形$ABFD$是平行四边形，从而可求出$DF=AB=3$，$BF=AD=1$，$CF=3$．再利用勾股定理逆定理即可证$\angle ABC=\angle DFC=90°$，最后利用梯形的面积公式计算即可；

（2）①在图1的基础上作$QG\perp AB$于G，易证四边形$BEQG$是矩形，即得出$BG=EQ$，$QG=BE$．又易证$\triangle CEQ\backsim\triangle CFD$，得出$\frac{EQ}{DF}=\frac{CE}{CF}=\frac{CQ}{CD}$，从而可用$t$表示出$CE=\frac{3}{5}t$，$EQ=\frac{4}{5}t$，$BG=\frac{4}{5}t$，$QG=BE=4-\frac{3}{5}t$．$PG=\frac{t}{5}$，即可利用勾股定理得出$PQ^2=(\frac{1}{5}t)^2+(4-\frac{3}{5}t)^2$，最后根据等腰三角形的定义列出等式，解出$t$即可；②分类讨论当$\triangle PAD\backsim\triangle QEC$时和当$\triangle PAD\backsim\triangle CEQ$时，根据对应边成比例计算即可．

【解题过程】

（1）如图1，作$DF \parallel AB$交BC于F，

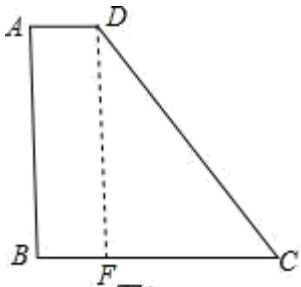


图1

$\because AD \parallel BC$，

∴四边形$ABFD$是平行四边形，

$\therefore DF = AB = 3$，$BF = AD = 1$，

$\therefore CF = BC - BF = 3$.

$\because 3^2 + 4^2 = 5^2$，即$CF^2 + DF^2 = CD^2$，

$\therefore \angle DFF = 90°$，

$\therefore \angle ABC = \angle DFC = 90°$，

$\therefore S_{梯形ABCD} = \frac{1}{2}(1+4) \times 4 = 10$；

（2）①如图2，在图1的基础上作$QG \perp AB$于 G，

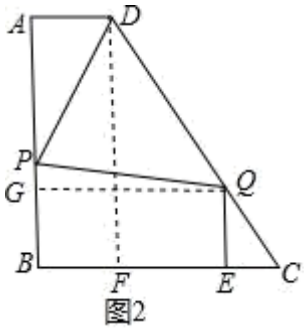


图2

由题意可知$t \leq 6$.

$\because \angle B = \angle QEB = 90°$，

∴四边形$BEQG$是矩形，

$\therefore BG = EQ$，$QG = BE$.

$\because EQ \parallel DF$，

$\therefore \triangle CEQ \backsim \triangle CFD$，

$\therefore \frac{EQ}{DF} = \frac{CE}{CF} = \frac{CQ}{CD}$，

$\therefore \frac{EQ}{4}=\frac{CE}{3}=\frac{t}{5}$,

$\therefore CE=\frac{3}{5}t$，$EQ=\frac{4}{5}t$，

$\therefore BG=\frac{4}{5}t$，$QG=BE=BC-CE=4-\frac{3}{5}t$.

在Rt△PQG中，$PG=BP-BG=t-\frac{4}{5}t=\frac{t}{5}$，

$\therefore PQ^2=PG^2+QG^2=(\frac{1}{5}t)^2+(4-\frac{3}{5}t)^2$，

由$PQ^2=DQ^2$得，$(\frac{1}{5}t)^2+(4-\frac{3}{5}t)^2=(5-t)^2$，

解得：$t_1=\frac{13-\sqrt{109}}{2}$，$t_2=\frac{13+\sqrt{109}}{2}$(舍去)，

∴当$t=\frac{13-\sqrt{109}}{2}$时，使得以$P$、$D$、$Q$为顶点的三角形恰好是以$DP$为底的等腰三角形；

②如图3，

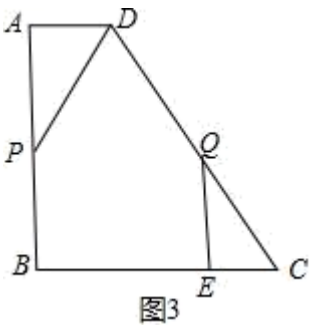


图3

当△PAD∽△QEC时，

∵$\angle A=\angle QEC=90°$，

$\therefore \frac{PA}{AD}=\frac{QE}{CE}$，即$\frac{AP}{1}=\frac{4}{3}$，

$\therefore AP=\frac{4}{3}$，

$\therefore t=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$；

当△PAD∽△CEQ时，

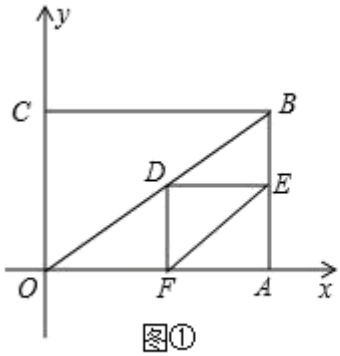
$\therefore \frac{PA}{AD}=\frac{CE}{QE}$，即$\frac{PA}{1}=\frac{3}{4}$，

$\therefore PA=\frac{3}{4}$，

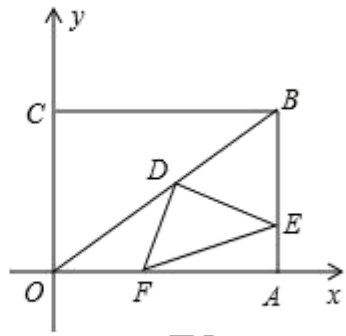
$\therefore t=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$.

综上所述：$t=\frac{8}{3}$或$\frac{13}{4}$.

9．（2022 秋·陕西咸阳·九年级期末）在平面直角坐标系中，过原点 O 及点 A（8，0），C（0，6）作矩形 $OABC$，连接 OB，点 D 为 OB 的中点，点 E 是线段 AB 上的动点，连接 DE，作 $DF\perp DE$，交 OA 于点 F，连接 EF．已知点 E 从 A 点出发，以每秒 1 个单位长度的速度在线段 AB 上移动，设移动时间为 t 秒．



图①



图②

（1）如图①，当 $t=3$ 时，求 DF 的长；

（2）如图②，当点 E 在线段 AB 上移动的过程中，$\frac{DF}{DE}$的大小是否发生变化？若变化，请说明理由；若不变，请求出$\frac{DF}{DE}$的值；

（3）连接 AD，当 AD 将$\triangle DEF$ 分成的两部分的面积之比为 1：2 时，求相应的 $t<3$ 时的值．

【思路点拨】

（1）当$t=3$时，可知$DE//OA$，$DE=\frac{1}{2}OA=4$，则四边形$DFAE$是矩形，得$DF=AE=3$；

（2）作$DM\perp OA$于点M，$DN\perp AB$于点N，根据两个角相等，可证明$\Delta DMF\backsim\Delta DNE$，得$\frac{DF}{DE}=\frac{DM}{DN}=\frac{3}{4}$；

（3）作$DM\perp OA$于点M，$DN\perp AB$于点N，则点G为EF的三等分点，利用（2）同理可得E、F的坐标，从而得出点G的坐标，代入直线AD的解析式即可解决问题．

【解题过程】

（1）当$t=3$时，E为AB的中点，

$\because A(8,0)$，$C(0,6)$，

$\therefore OA=8$，$OC=6$，

$\because$点D为OB的中点，

$\therefore DE//OA$，$DE=\frac{1}{2}OA=4$，

$\because$四边形$OABC$是矩形，

$\therefore OA\perp AB$，

$\therefore DE\perp AB$，

$\therefore \angle OAB = \angle DEA = 90°$，

又$\because DF \perp DE$，

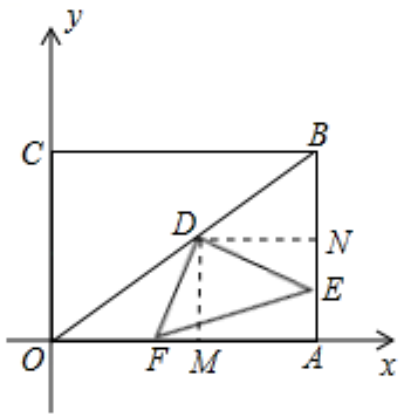
$\therefore \angle EDF = 90°$，

∴四边形$DFAE$是矩形，

$\therefore DF = AE = 3$；

（2）$\frac{DF}{DE}$的大小不变，理由如下：

如图，作$DM \perp OA$于点M，$DN \perp AB$于点N，



∵四边形$OABC$是矩形，

$\therefore OA \perp AB$，

∴四边形$DMAN$是矩形，

$\therefore \angle MDN = 90°$，$DM//AB$，$DN//OA$，

$\therefore \frac{BD}{DO} = \frac{BN}{NA}, \frac{DO}{BD} = \frac{OM}{MA}$，

∵点D是OB的中点，

∴ M，N分别是OA，OB的中点，

$\therefore DM = \frac{1}{2}AB = 3, DN = \frac{1}{2}OA = 4$，

$\because \angle EDF = 90°$，

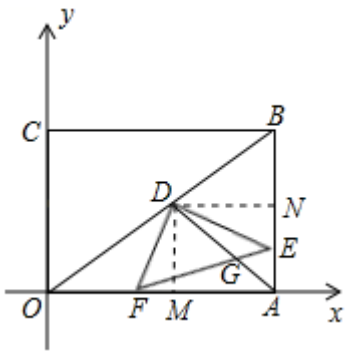
$\therefore \angle FDM = \angle EDN$，

又$\because \angle DMF = \angle DNE = 90°$，

$\therefore \Delta DMF \backsim \Delta DNE$，

$\therefore \frac{DF}{DE} = \frac{DM}{DN} = \frac{3}{4}$；

（3）作$DM \perp OA$于点M，$DN \perp AB$于点N，



若AD将ΔDEF的面积分成$1:2$的两部分，

设AD交EF于点G，则点G为EF的三等分点，

如图，$NE = 3 - t$，

由$\Delta DMF \backsim \Delta DNE$得，$MF = \frac{3}{4}(3 - t)$，

$\therefore AF = 4 + MF = -\frac{3}{4}t + \frac{25}{4}$，

$\because$点G为EF的三等分点，

$\therefore G(\frac{3t+71}{12}, \frac{2}{3}t)$，

设直线AD的表达式为$y = kx + b$，

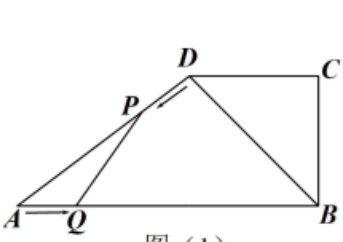
将$A(8,0)$，$D(4,3)$代入得$\begin{cases} 8k + b = 0 \\ 4k + b = 3 \end{cases}$，解得$\begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = 6 \end{cases}$，

$\therefore$直线AD的表达式为$y = -\frac{3}{4}x + 6$，

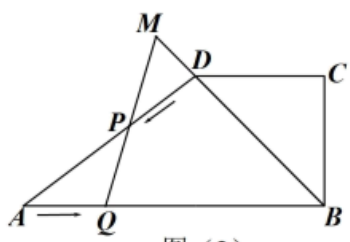
将$G(\frac{3t+71}{12}, \frac{2}{3}t)$代入得：$t = \frac{75}{41}$，

$\therefore$当$t < 3$时的值为$t = \frac{75}{41}$.

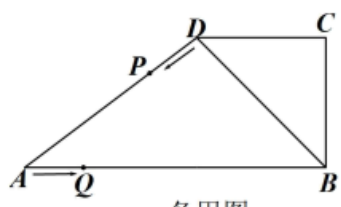
10．（2022 秋·河北邯郸·九年级邯郸市第二十三中学校考期末）如图（1），在四边形$ABCD$中，$AB \parallel DC$，$CB \perp AB$，$AB = 14\text{cm}$，$BC = CD = 6\text{cm}$，动点P从点D开始沿DA边匀速运动，动点Q从点A开始沿AB边匀速运动，它们的运动速度均为1cm/s．点P和点Q同时出发，设运动的时间为$t(\text{s})$，$0 < t < 10$．



图（1）



图（2）



备用图

（1）用含t的代数式表示AP；

（2）当以点A、P、Q为顶点的三角形与△ABD相似时，求t的值；

（3）如图（2），延长QP、BD，两延长线相交于点M，当ΔQMB为直角三角形时，直接写出t的值．

【思路点拨】

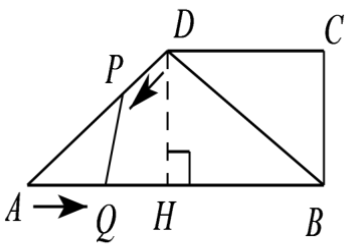
（1）作$DH \perp AB$于H，得矩形$DHBC$，则$CD = BH = 6\text{cm}$，$DH = BC = 6\text{cm}$，$AH = 8\text{cm}$，由勾股定理可求得AD的长，从而可得AP；

（2）分两种相似情况加以考虑，根据对应边成比例即可完成；

（3）分$\angle QMB = 90°$和$\angle MQB = 90°$两种情况考虑即可，再由相似三角形的性质即可求得 t 的值．

【解题过程】

（1）如图，作$DH \perp AB$于H



则四边形$DHBC$是矩形

$\therefore CD = BH = 6\text{cm}$，$DH = BC = 6\text{cm}$

$\therefore AH = 8\text{cm}$

在$Rt\Delta ADH$中，

由勾股定理得$AD = \sqrt{DH^2 + AH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(\text{cm})$

$\because DP = t\text{cm}$

$\therefore AP = AD - DP = (10 - t)\text{cm}$

（2）①当$\Delta APQ \backsim \Delta ADB$时

则有$\frac{AP}{AQ} = \frac{AD}{AB}$

$\therefore \frac{10-t}{t} = \frac{10}{14}$

解得：$t = \frac{35}{6}$

②当$\Delta APQ \backsim \Delta ABD$时

则有$\frac{AP}{AQ}=\frac{AB}{AD}$

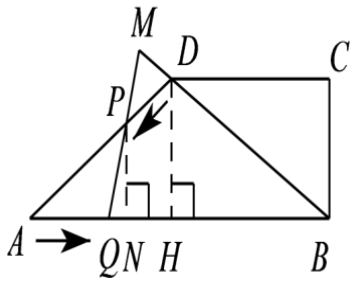
$\therefore\frac{10-t}{t}=\frac{14}{10}$

解得：$t=\frac{25}{6}$

综上所述，当$t=\frac{35}{6}$或$\frac{25}{6}$时，以点A、P、Q为顶点的三角形与$\triangle ABD$相似；

（3）①当$\angle QMB=90°$时，ΔQMB为直角三角形

如图，过点 P 作$PN\perp AB$于 N，$DH\perp AB$于 H



图（2）

$\therefore\angle PNQ=\angle BHD$

$\because\angle QMB=90°$

$\therefore\angle PQN+\angle DBH=90°$

$\because\angle PQN+\angle QPN=90°$

$\therefore\angle QPN=\angle DBH$

$\therefore\Delta PNQ\backsim\Delta BHD$

$\therefore\frac{QN}{PN}=\frac{DH}{BH}=\frac{6}{6}=1$

即$QN=PN$

$\because PN\parallel DH$

$\therefore\Delta APN\backsim\Delta ADH$

$\therefore\frac{PN}{AP}=\frac{DH}{AD}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$\frac{AN}{AP}=\frac{AH}{AD}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

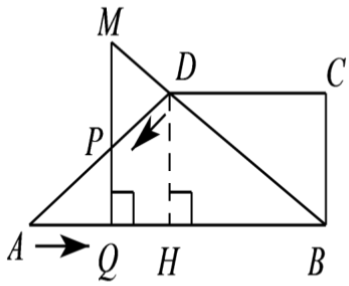
$\therefore PN=\frac{3}{5}AP=\frac{3}{5}(10-t)$，$AN=\frac{4}{5}AP=\frac{4}{5}(10-t)$

$\therefore QN=AN-AQ=\frac{4}{5}(10-t)-t=8-\frac{9}{5}t$

由$QN=PN$得：$8-\frac{9}{5}t=\frac{3}{5}(10-t)$

解得：$t=\frac{5}{3}$

②当$\angle MQB=90°$时，ΔQMB为直角三角形，如图



图（3）

则$PQ \parallel DH$

$\therefore \Delta APQ \backsim \Delta ADH$

$\therefore \frac{AQ}{AP}=\frac{AH}{AD}=\frac{4}{5}$

$\therefore AQ=\frac{4}{5}AP$

即$t=\frac{4}{5}(10-t)$

解得：$t=\frac{40}{9}$

综上所述，当$t=\frac{5}{3}$或$\frac{40}{9}$时，ΔQMB是直角三角形．

11．（2022 秋·山东青岛·九年级统考期中）如图 1，在RtΔABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，$CD \perp AB$于点D．点P从点D出发，沿线段DC向点C运动，点Q从点C出发，沿线段CA向点A运动，两点同时出发，速度都为每秒 1 个单位长度，当点P运动到C时，两点都停止．设运动时间为t秒．

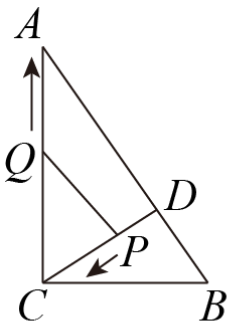


图1

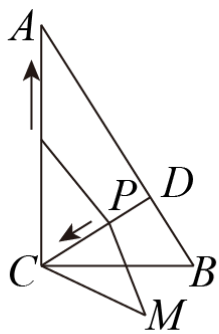


图2

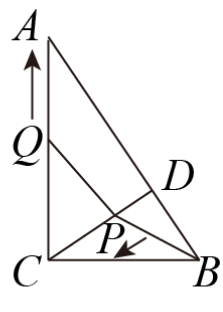


图3

（1）当ΔPQC是等腰三角形时，请直接写出t值为_____.

（2）如图 2，在运动过程中是否存在某一时刻t，使得沿PC翻折ΔCPQ所得到的四边形$CQPM$是菱形？若存在，求出t的值；若不存在，请说明理由；

（3）如图 3，连接BP，设四边形$BPQC$的面积为S．求S与t之间的函数关系式；

（4）是否存在某一时刻t，使得P、Q、B三点共线？若存在，求出t的值；若不存在，请说明理由．

【思路点拨】

（1）根据勾股定理及等面积法可求 CD，由等腰三角形的性质分$PC=QC$、$PC=QP$、$PQ=CQ$三种情况讨论即可求解；

（2）根据菱形的性质可知，当$PQ=CQ$时复合题意，过点 Q 作 $QF\perp CD$，证$\Delta ABC\sim\Delta QCF$，得$CF=\frac{3}{5}t$，由$PC=2\times\frac{3}{5}t=\frac{24}{5}-t$，即可求解；

（3）过点 Q 作 $QH\perp CD$，证$\Delta ABC\sim\Delta QCH$，得$\frac{10}{t}=\frac{8}{QH}$，即$QH=\frac{4}{5}t$，证$\Delta ABC\sim\Delta BCD$，得$BD=\frac{18}{5}$，由$S=S_{\Delta PCQ}+S_{\Delta BPC}=\frac{1}{2}PC\cdot QH+\frac{1}{2}PC\cdot BD$即可求解；

（4）过点 P 作 $PG\perp BC$，可得，$\Delta ABC\sim\Delta CPG$，得$\frac{\frac{24}{5}-t}{10}=\frac{CG}{8}$，即$CG=\frac{4}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)$，$BG=6-\frac{4}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)$，由$S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}PC\cdot BD=\frac{1}{2}BC\cdot PG$可得$PG=\frac{3}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)$，由$\frac{CQ}{PG}=\frac{6}{6-\frac{4}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)}$，当$\Delta BCQ\sim\Delta BGP$时，$B$、$P$、$Q$ 三点共线，得$\frac{t}{\frac{3}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)}=\frac{6}{6-\frac{4}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)}$，即可求解；

【解题过程】

（1）解：$\because\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

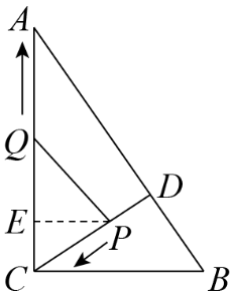
$\because CD\perp AB$，

$\therefore CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{6\times8}{10}=\frac{24}{5}$，

$\because\Delta PQC$是等腰三角形，

①当$PC=QC$时，即$\frac{24}{5}-t=t$，解得：$t=\frac{12}{5}$；

②当$PC=QP$时，如图，过点 P 作 $PE\perp AC$，



$\because PC = QP$，$PE \perp AC$，

$\therefore QE = CE$，

$\because PE \perp AC$，$CD \perp AB$，$\angle ACB = 90°$，

$\therefore \angle A = \angle ACD$，

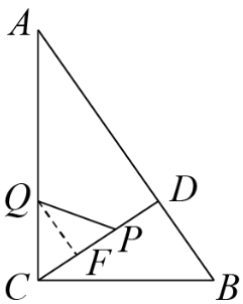
$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PCE$，

$\therefore \frac{AB}{PC} = \frac{BC}{EC}$，

即，$\frac{10}{\frac{24}{5} - t} = \frac{6}{\frac{1}{2}t}$，

解得：$t = \frac{144}{55}$.

③当$PQ = CQ$时，过点 Q 作 $QF \perp CD$，



$\because \angle A = \angle ACD$，

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta QCF$，

$\therefore \frac{AB}{QC} = \frac{BC}{CF}$，即$\frac{10}{t} = \frac{6}{CF}$，

$\therefore CF = \frac{3}{5}t$，

$\because PQ = CQ$，$QF \perp CD$，

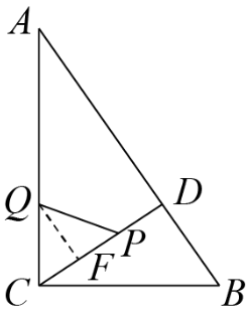
$\therefore CF = PF = \frac{3}{5}t$，

$\therefore PC = 2 \times \frac{3}{5}t = \frac{24}{5} - t$，

解得：$t=\frac{24}{11}$，

故当ΔPQC是等腰三角形时，t值为$\frac{12}{5}$或$\frac{144}{55}$或$\frac{24}{11}$.

（2）当$PQ=CQ$时，四边形$CQPM$是菱形，过点 Q 作 $QF\perp CD$，



$\because\angle A=\angle ACD$，

$\therefore\Delta ABC\sim\Delta QCF$，

$\therefore\frac{AB}{QC}=\frac{BC}{CF}$，即$\frac{10}{t}=\frac{6}{CF}$，

$\therefore CF=\frac{3}{5}t$，

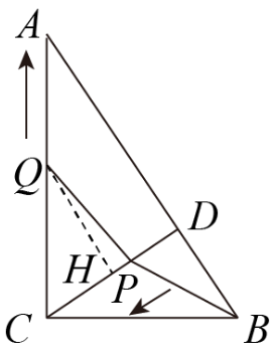
$\because PQ=CQ$，$QF\perp CD$，

$\therefore CF=PF=\frac{3}{5}t$，

$\therefore PC=2\times\frac{3}{5}t=\frac{24}{5}-t$，

解得：$t=\frac{24}{11}$，

（3）如图，过点 Q 作 $QH\perp CD$，



$\because\angle A=\angle ACD$，

$\therefore\Delta ABC\sim\Delta QCH$，

$\therefore\frac{AB}{QC}=\frac{AC}{QH}$，即$\frac{10}{t}=\frac{8}{QH}$，

$\therefore QH=\frac{4}{5}t$，

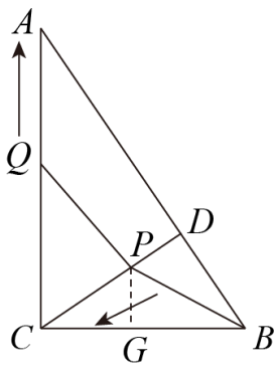
易证$\Delta ABC\sim\Delta BCD$，

$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BD}$，即$\frac{10}{6}=\frac{6}{BD}$，

解得：$BD=\frac{18}{5}$.

$S=S_{\Delta\square PCQ}+S_{\Delta BPC}=\frac{1}{2}PC\cdot QH+\frac{1}{2}PC\cdot BD=\frac{1}{2}\times\left(\frac{24}{5}-t\right)\left(\frac{4}{5}t+\frac{18}{5}\right)=-\frac{2}{5}t^2+\frac{3}{25}t+\frac{216}{25}$；

（4）如图过点 P 作 $PG\perp BC$，可得，$\Delta ABC\sim\Delta CPG$，



$\therefore\frac{CP}{AB}=\frac{CG}{AC}$，即$\frac{\frac{24}{5}-t}{10}=\frac{CG}{8}$，

$\therefore CG=\frac{4}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)$，

$\therefore BG=6-\frac{4}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)$，

$\because S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}PC\cdot BD=\frac{1}{2}BC\cdot PG$，

$\therefore PG=\frac{PC\cdot BD}{BC}=\frac{\left(\frac{24}{5}-t\right)\times\frac{18}{5}}{6}=\frac{3}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)$，

$\therefore\frac{CQ}{PG}=\frac{t}{\frac{3}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)}$，$\frac{BC}{BG}=\frac{6}{6-\frac{4}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)}$，

当$\Delta BCQ\sim\Delta BGP$时，B、P、Q 三点共线，

所有$\frac{t}{\frac{3}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)}=\frac{6}{6-\frac{4}{5}\left(\frac{24}{5}-t\right)}$，

解得：$t_1=\frac{12\sqrt{6}-18}{5}$，$t_2=\frac{-12\sqrt{6}-18}{5}$（舍去），

$\therefore$当$t=\frac{12\sqrt{6}-18}{5}$时，$P$、$Q$、$B$三点共线.

12．（2023 秋·浙江金华·九年级统考期末）如图 1，在矩形$ABCD$中，$AB=6$，$BC=3$，动点 P 从点 A 出发，沿AB边以每秒 2 个单位的速度向点 B 运动，同时，动点 Q 从点 B 出发，沿$BC-CD$匀速向终点 D 运动，点 P、Q 同时到达终点，BD与PQ交于点 E．过点 B 作$BF\perp PQ$于点 F．设点 P、Q 的运动时间为 t 秒．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/595202011143011141