

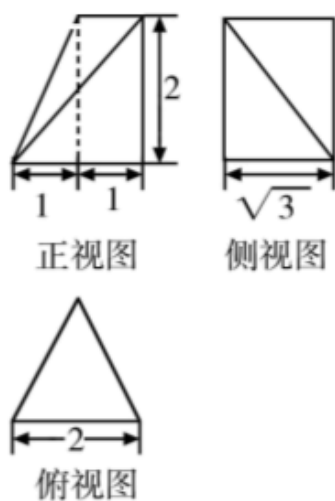
2025 届江苏省淮安市清江中学高三第六次模拟考试数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

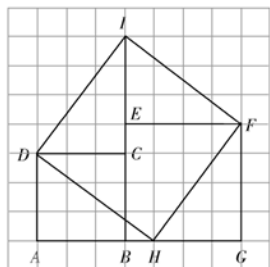
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的最长棱的长为 ()



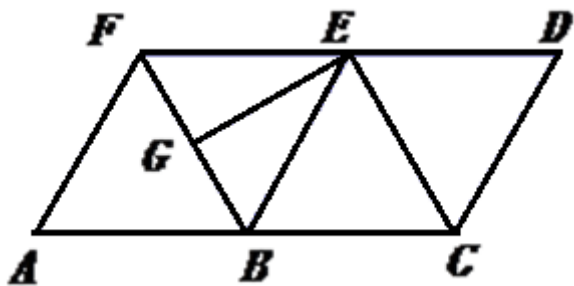
- A. $2\sqrt{5}$ B. 4 C. 2 D. $2\sqrt{2}$

2. 刘徽是我国魏晋时期伟大的数学家，他在《九章算术》中对勾股定理的证明如图所示。“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也。合成弦方之幂，开方除之，即弦也”。已知图中网格纸上小正方形的边长为 1，其中“正方形 $ABCD$ 为朱方，正方形 $BEFG$ 为青方”，则在五边形 $AGFID$ 内随机取一个点，此点取自朱方的概率为 ()



- A. $\frac{16}{37}$ B. $\frac{9}{49}$ C. $\frac{9}{37}$ D. $\frac{3}{11}$

3. 下图为一个正四面体的侧面展开图， G 为 BF 的中点，则在原正四面体中，直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{33}}{6}$

4. 函数 $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ 与 $g(x) = kx - k$ 在 $[-6, 8]$ 上最多有 n 个交点，交点分别为 (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$)，则

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = (\quad)$$

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

5. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $f(x)$ 是定义在 R 上的减函数， $g(x) = f(x) - f(ax)$ ($a > 1$)，则 ()

- A. $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$ B. $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$
C. $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}[f(x)]$ D. $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn}[f(x)]$

6. 2020 年是脱贫攻坚决战决胜之年，某市为早日实现目标，现将甲、乙、丙、丁 4 名干部派遣到 A、B、C 三个贫困县扶贫，要求每个贫困县至少分到一人，则甲被派遣到 A 县的分法有 ()

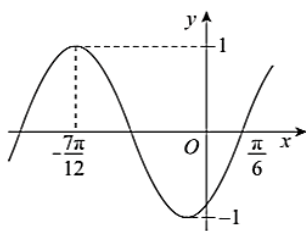
- A. 6 种 B. 12 种 C. 24 种 D. 36 种

7. 已知集合 $A = \{x \in N \mid y = \sqrt{4-x}\}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in Z\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $[0, 4]$ B. $\{0, 2, 4\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $[2, 4]$

8. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$)，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度，得到

函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x) = \frac{1}{3}$ 是 $g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的 ()



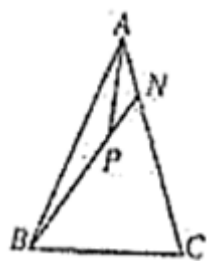
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 如图，这是某校高三年级甲、乙两班在上学期的 5 次数学测试的班级平均分的茎叶图，则下列说法不正确的是（ ）

甲班				乙班	
	7		9	5	8
7	3	1	10	1	3
	2		11	3	

- A. 甲班的数学成绩平均分的平均水平高于乙班
B. 甲班的数学成绩的平均分比乙班稳定
C. 甲班的数学成绩平均分的中位数高于乙班
D. 甲、乙两班这 5 次数学测试的总平均分是 103

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$ ， P 是 BN 上一点，若 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，则实数 t 的值为（ ）



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{3}{4}$

11. 盒中装有形状、大小完全相同的 5 张“刮刮卡”，其中只有 2 张“刮刮卡”有奖，现甲从盒中随机取出 2 张，则至少有一张有奖的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{4}{5}$

12. 二项式 $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)^7$ 展开式中， $\frac{1}{x}$ 项的系数为（ ）

- A. $-\frac{945}{16}$ B. $-\frac{189}{32}$ C. $-\frac{21}{64}$ D. $\frac{2835}{8}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线与双曲线左支交于 A, B 两点，

$\angle AF_2B = 90^\circ$ ， $\triangle AF_2B$ 的内切圆的圆心的纵坐标为 $\frac{\sqrt{7}}{2}a$ ，则双曲线的离心率为_____.

14. 设第一象限内的点 (x, y) 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y - 6 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$ ，若目标函数 $z = ax + by (a > 0, b > 0)$ 的最大值为 40，则 $\frac{5}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，满足 $\{a_1, a_2, a_3\} = \{b_1, b_2, b_3\} = \{a, b, -2\}$ ，其中 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 $a + b$ 的值为_____.

16. 某高校开展安全教育活动，安排 6 名老师到 4 个班进行讲解，要求 1 班和 2 班各安排一名老师，其余两个班各安排两名老师，其中刘老师和王老师不在一起，则不同的安排方案有_____种.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{\ln x}{a}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数，求实数 a 的最大值；

(2) 若 $0 < a < 1$ ，求证： $f(x) \geq \frac{2 + \ln a}{a}$.

18. (12 分) 已知曲线 M 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \alpha \\ y = \frac{1}{2} \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 N 的极坐标方程为 $\rho = \frac{2}{2 - \sin 2\theta}$.

(1) 写出曲线 M 的极坐标方程；

(2) 点 A 是曲线 N 上的一点，试判断点 A 与曲线 M 的位置关系.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$ ，记 $f(x)$ 的最小值为 m .

(I) 解不等式 $f(x) \leq 5$ ；

(II) 若正实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{5}$ ，求证： $\frac{2}{a^2} + \frac{3}{b^2} \geq 2m$.

20. (12 分) 已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ， $MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求矩阵 N ；

(2) 求矩阵 N 的特征值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax - \ln x - 1 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性并指出相应单调区间;

(2) 若 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1 - f(x)$, 设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点, 若 $a \geq \frac{3}{2}$, 且 $g(x_1) - g(x_2) \geq k$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x + a\sqrt{x} + \ln x$ (a 为常数)

(I) 当 $a = -5$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $f(x)$ 为增函数, 求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

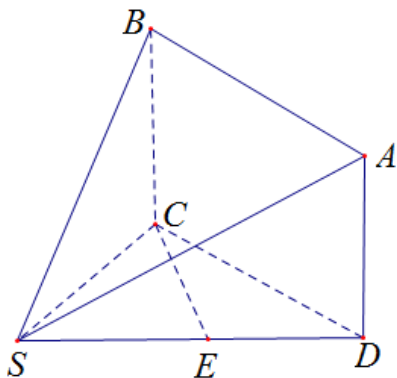
1、D

【解析】

先根据三视图还原几何体是一个四棱锥, 根据三视图的数据, 计算各棱的长度.

【详解】

根据三视图可知, 几何体是一个四棱锥, 如图所示:



由三视图知: $|AD| = 2$, $|AE| = \sqrt{3}$, $|SD| = 2$,

所以 $|SC| = |DC| = 2$,

$$\text{所以 } |SA| = \sqrt{|SD|^2 + |AD|^2} = 2\sqrt{2}, |SB| = \sqrt{|SC|^2 + |BC|^2} = 2\sqrt{2},$$

所以该几何体的最长棱的长为 $2\sqrt{2}$

故选：D

【点睛】

本题主要考查三视图的应用，还考查了空间想象和运算求解的能力，属于中档题.

2、C

【解析】

首先明确这是一个几何概型面积类型，然后求得总事件的面积和所研究事件的面积，代入概率公式求解.

【详解】

因为正方形 $ABCD$ 为朱方，其面积为 9，

$$\text{五边形 } AGFID \text{ 的面积为 } S_{ABCD} + S_{BGFE} + S_{\triangle DCI} + S_{\triangle IEF} = 37,$$

所以此点取自朱方的概率为 $\frac{9}{37}$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查了几何概型的概率求法，还考查了数形结合思想和运算求解的能力，属于基础题.

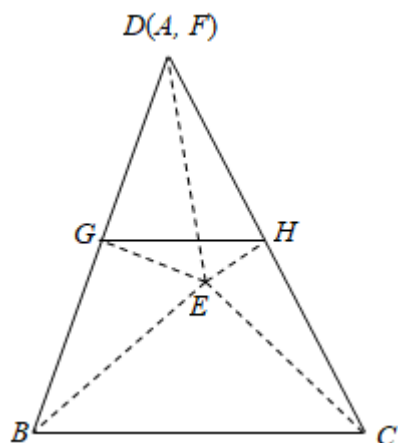
3、C

【解析】

将正四面体的展开图还原为空间几何体， A, D, F 三点重合，记作 D ，取 DC 中点 H ，连接 EG, EH, GH ， $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，表示出三角形 EGH 的三条边长，用余弦定理即可求得 $\cos \angle EGH$.

【详解】

将展开的正四面体折叠，可得原正四面体如下图所示，其中 A, D, F 三点重合，记作 D ：



则 G 为 BD 中点，取 DC 中点 H ，连接 EG, EH, GH ，设正四面体的棱长均为 a ，

由中位线定理可得 $GH \parallel BC$ 且 $GH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ ，

所以 $\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，

$$EG = EH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\text{由余弦定理可得 } \cos \angle EGH = \frac{EG^2 + GH^2 - EH^2}{2EG \cdot GH}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ，

故选：C.

【点睛】

本题考查了空间几何体中异面直线的夹角，将展开图折叠成空间几何体，余弦定理解三角形的应用，属于中档题.

4、C

【解析】

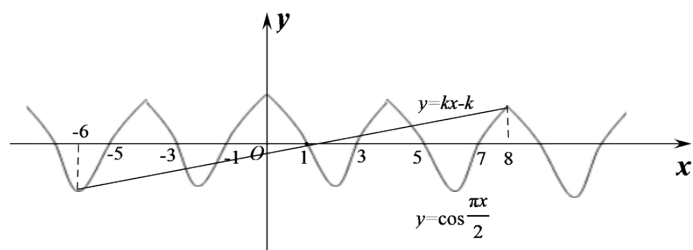
根据直线 $g(x)$ 过定点 $(1,0)$ ，采用数形结合，可得最多交点个数，然后利用对称性，可得结果.

【详解】

由题可知：直线 $g(x) = kx - k$ 过定点 $(1,0)$

且 $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ 在 $[-6,8]$ 是关于 $(1,0)$ 对称

如图



通过图像可知：直线 $g(x)$ 与 $f(x)$ 最多有 9 个交点

同时点 $(1,0)$ 左、右边各四个交点关于 $(1,0)$ 对称

所以 $\sum_{i=1}^9 (x_i + y_i) = 2 \times 4 + 1 = 9$

故选：C

【点睛】

本题考查函数对称性的应用，数形结合，难点在于正确画出图像，同时掌握基础函数 $y = \cos x$ 的性质，属难题.

5、A

【解析】

根据符号函数的解析式，结合 $f(x)$ 的单调性分析即可得解.

【详解】

根据题意， $g(x) = f(x) - f(ax)$ ，而 $f(x)$ 是 R 上的减函数，

当 $x > 0$ 时， $x < ax$ ，则有 $f(x) > f(ax)$ ，则 $g(x) = f(x) - f(ax) > 0$ ，此时 $\text{sgn}[g(x)] = 1$ ，

当 $x = 0$ 时， $x = ax$ ，则有 $f(x) = f(ax)$ ，则 $g(x) = f(x) - f(ax) = 0$ ，此时 $\text{sgn}[g(x)] = 0$ ，

当 $x < 0$ 时， $x > ax$ ，则有 $f(x) < f(ax)$ ，则 $g(x) = f(x) - f(ax) < 0$ ，此时 $\text{sgn}[g(x)] = -1$ ，

综合有： $\text{sgn}[g(x)] = \text{sgn}(x)$ ；

故选：A.

【点睛】

此题考查函数新定义问题，涉及函数单调性辨析，关键在于读懂定义，根据自变量的取值范围分类讨论.

6、B

【解析】

分成甲单独到 A 县和甲与另一人一同到 A 县两种情况进行分类讨论，由此求得甲被派遣到 A 县的分法数.

【详解】

如果甲单独到 A 县，则方法数有 $C_3^2 \times A_2^2 = 6$ 种.

如果甲与另一人一同到 A 县，则方法数有 $C_3^1 \times A_2^2 = 6$ 种.

故总的方法数有 $6 + 6 = 12$ 种.

故选：B

【点睛】

本小题主要考查简答排列组合的计算，属于基础题.

7、B

【解析】

计算 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，再计算交集得到答案

【详解】

$A = \{x \in N \mid y = \sqrt{4-x}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in Z\}$ 表示偶数,

故 $A \cap B = \{0, 2, 4\}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查了集合的交集, 意在考查学生的计算能力.

8、B

【解析】

先根据图象求出函数 $g(x)$ 的解析式, 再由平移知识得到 $f(x)$ 的解析式, 然后分别找出

$f(x) = \frac{1}{3}$ 和 $g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的等价条件, 即可根据充分条件, 必要条件的定义求出.

【详解】

设 $g(x) = A \sin(\omega x + \mu)$, 根据图象可知,

$$A = 1, \frac{3}{4}T = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{7\pi}{12}\right) \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \omega = 2,$$

$$\text{再由 } g\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left[2 \times \left(-\frac{7\pi}{12}\right) + \mu\right] = 1, \text{ 取 } \mu = -\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

将函数 $g(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $f(x)$ 的图象,

$$\therefore f(x) = g\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}, g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{令 } \theta = x - \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1}{3}, \text{ 显然, } \cos 2\theta = \frac{1}{3} \not\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3} \text{ 是 } g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 的必要不充分条件.}$$

故选: B.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/595222200100012112>