微考点 7-2 递推方法计算概率与一维马尔科夫过程（数列与概率结合）

考点解密

【考点分析】

①转移概率：对于有限状态集合 S，定义：$P_{i,j}=P(X_{n+1=j}\mid X_{n=i})$ 为从状态 i 到状态 j 的转移概率.

②马尔可夫链：若 $P(X_{n+1=j}\mid X_{n=i},X_{n-1=i_{n-1}},\cdots,X_{0=i_0})=P(X_{n+1=j}\mid X_{n=i})=P_{ij}$，即未来状态 X_{n+1} 只受当前状态 X_n 的影响，与之前的 $X_{n-1},X_{n-2},\cdots,X_0$ 无关.

③完备事件组：如果样本空间 Ω 中一组事件组 $\{A_1,A_2,\cdots A_n\}$ 符合下列两个条件：

（1）$A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots n$；（2）$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\Omega$.

则称 $\{A_1,A_2,\cdots A_n\}$ 是 Ω 的一个完备事件组，也称是 Ω 的一个分割.

④全概率公式： 设 $\{A_1,A_2,\cdots A_n\}$ 是一个完备事件组，则有 $P(B)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k)$

⑤一维随机游走模型，即：设数轴上一个点，它的位置只能位于整点处，在时刻 $t=0$ 时，位于点 $x=i(i\in N^+)$，下一个时刻，它将以概率 α 或者 β

（$\alpha\in(0,1),\alpha+\beta=1$）向左或者向右平移一个单位. 若记状态 $X_{t=i}$ 表示：在时刻 t 该点位于位置 $x=i(i\in N^+)$，那么由全概率公式可得：

$$P(X_{t+1=i})=P(X_{t=i-1})\cdot P(X_{t+1=i}\mid X_{t=i-1})+P(X_{t=i+1})\cdot P(X_{t+1=i}\mid X_{t=i+1})$$

另一方面，由于 $P(X_{t+1=i}\mid X_{t=i-1})=\beta,P(X_{t+1=i}\mid X_{t=i+1})=\alpha$，代入上式可得：

$$P_i=\alpha\cdot P_{i+1}+\beta\cdot P_{i-1}.$$

进一步，我们假设在 $x=0$ 与 $x=m(m>0,m\in N^+)$ 处各有一个吸收壁，当点到达吸收壁时被吸收，不再游走.于是，$P_0=0,P_m=1$.随机游走模型是一个典型的马尔科夫过程.

进一步，若点在某个位置后有三种情况：向左平移一个单位，其概率为 a，原地不动，其概率为 b，向右平移一个单位，其概率为 c，那么根据全概率公式可得：

$$P_i=aP_{i-1}+bP_i+cP_{i+1}$$

题型解密

【精选例题】

【例 1】（2023·新高考 1 卷）甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8．由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5．

（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i, i=1,2,\cdots,n$，则 $E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}q_i$．记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$．

解析：（1）记“第 i 次投篮的人是甲”为事件 A_i，“第 i 次投篮的人是乙”为事件 B_i，所以，

$P(B_2)=P(A_1B_2)+P(B_1B_2)=P(A_1)P(B_2\mid A_1)+P(B_1)P(B_2\mid B_1)=0.5\times(1-0.6)+0.5\times0.8=0.6$．

（2）设 $P(A_i)=p_i$，依题可知，$P(B_i)=1-p_i$，则

$P(A_{i+1})=P(A_iA_{i+1})+P(B_iA_{i+1})=P(A_i)P(A_{i+1}\mid A_i)+P(B_i)P(A_{i+1}\mid B_i)$，即

$p_{i+1}=0.6p_i+(1-0.8)\times(1-p_i)=0.4p_i+0.2$，构造等比数列 $\{p_i+\lambda\}$，设 $p_{i+1}+\lambda=\frac{2}{5}(p_i+\lambda)$，解得 $\lambda=-\frac{1}{3}$，则 $p_{i+1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_i-\frac{1}{3}\right)$，又 $p_1=\frac{1}{2}, p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，所以 $\left\{p_i-\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$，公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比数列，即

$p_i-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}, p_i=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$．

（3）因为 $p_i=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$，$i=1,2,\cdots,n$，所以当 $n\in\mathrm{N}^*$ 时，

$E(Y)=p_1+p_2+\cdots+p_n=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}+\frac{n}{3}=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\frac{n}{3}$，故 $E(Y)=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\frac{n}{3}$．

【例 2】某公司为激励员工，在年会活动中，该公司的 $n(n\geq3)$ 位员工通过摸球游戏抽奖，其游戏规则为：每位员工前面都有 1 个暗盒，第 1 个暗盒里有 3 个红球与 1 个白球.其余暗盒里都恰有 2 个红球与 1 个白球，这些球的形状大小都完全相同.第 1 位员工从第 1 个暗盒里取出 1 个球，并将这个球放入第 2 个暗盒里，第 2 位员工再从第 2 个暗盒里面取出 1 个球并放入第 3 个暗盒里，依次类推，第 n−1 位员工再从第 n−1 个暗盒

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/595243304112011111