

山东省滕州实验中学 2023-2024 学年高三一诊考试数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知正四面体 $A-BCD$ 外接球的体积为 $8\sqrt{6}\pi$ ，则这个四面体的表面积为（ ）

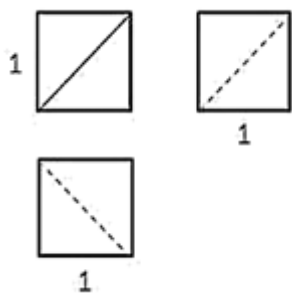
- A. $18\sqrt{3}$ B. $16\sqrt{3}$ C. $14\sqrt{3}$ D. $12\sqrt{3}$

2. 音乐，是用声音来展现美，给人以听觉上的享受，熔铸人们的美学趣味。著名数学家傅立叶研究了乐声的本质，他证明了所有的乐声都能用数学表达式来描述，它们是一些形如 $a \sin bx$ 的简单正弦函数的和，其中频率最低的一项是基本音，其余的为泛音。由乐声的数学表达式可知，所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍，称为基本音的谐波。下列函数中不能与函数 $y = 0.06 \sin 180000t$ 构成乐音的是（ ）

- A. $y = 0.02 \sin 360000t$ B. $y = 0.03 \sin 180000t$ C. $y = 0.02 \sin 181800t$

- D. $y = 0.05 \sin 540000t$

3. 如图是正方体截去一个四棱锥后得到的几何体的三视图，则该几何体的体积是（ ）



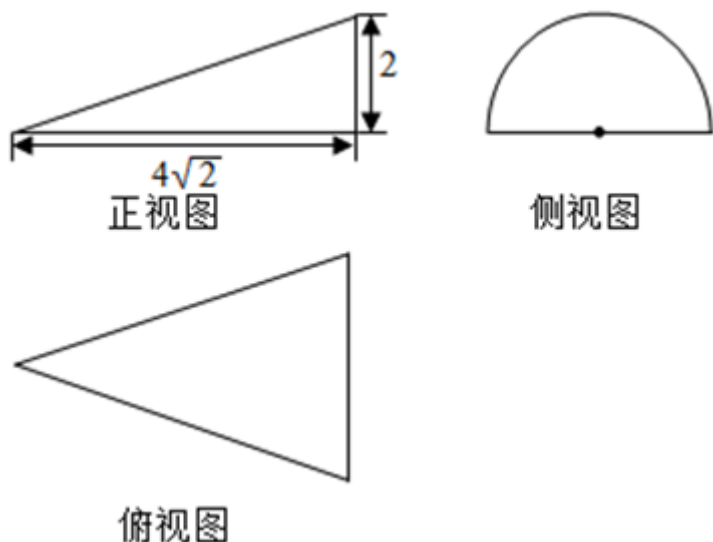
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

4. 如果 $b < a < 0$ ，那么下列不等式成立的是（ ）

- A. $\log_2 |b| < \log_2 |a|$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^b < \left(\frac{1}{2}\right)^a$

- C. $b^3 > a^3$ D. $ab < b^2$

5. 一个几何体的三视图及尺寸如下图所示，其中正视图是直角三角形，侧视图是半圆，俯视图是等腰三角形，该几何体的表面积是（ ）



A. $16\sqrt{2} + 16\pi$

B. $16\sqrt{2} + 8\pi$

C. $8\sqrt{2} + 16\pi$

D. $8\sqrt{2} + 8\pi$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, $\vec{AE} = 2\vec{EB}$, $|\vec{AB}| = \lambda |\vec{AC}|$, 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9\vec{AO} \cdot \vec{EC}$, 则实数 $\lambda =$ ()

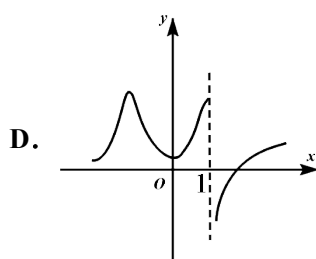
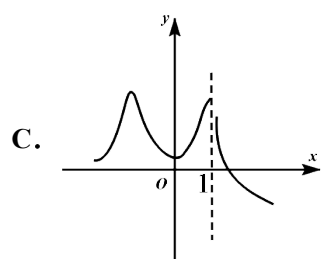
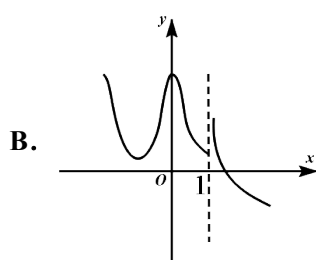
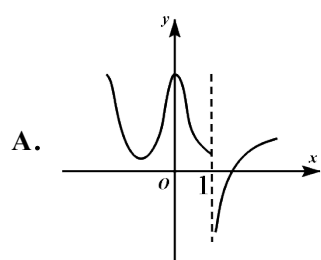
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

7. 函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(x - \frac{1}{x}), & x > 1, \\ e^{\cos \pi x}, & x \leq 1 \end{cases}$ 的图象大致是 ()



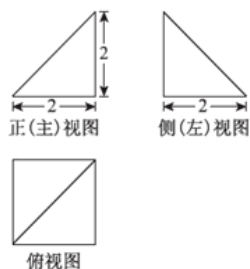
8. 设直线 l 过点 $A(0, -1)$, 且与圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 相切于点 B , 那么 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$ ()

- A. ± 3 B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. 1

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($\omega > 0$), $f(\frac{\pi}{8} + x) = f(\frac{\pi}{8} - x)$, 且 $f(\frac{\pi}{8}) = 5$, 则 $b =$ ()

- A. 3 B. 3 或 7 C. 5 D. 5 或 8

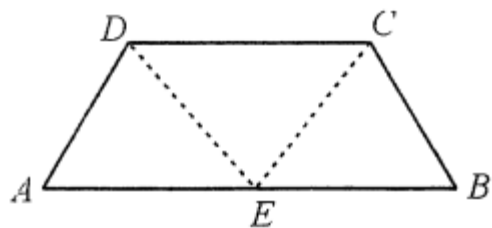
10. 某四棱锥的三视图如图所示, 记 S 为此棱锥所有棱的长度的集合, 则 ().



- A. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$ B. $2\sqrt{2} \notin S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

- C. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \notin S$ D. $2\sqrt{2} \in S$, 且 $2\sqrt{3} \in S$

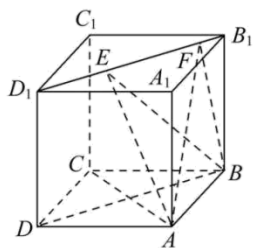
11. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 2DC = 2AD = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$, E 为 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED 、 EC 向上折起, 使 A 、 B 重合为点 F , 则三棱锥 $F-DCE$ 的外接球的体积是 ()



- A. $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4}\pi$

- C. $\frac{3}{2}\pi$ D. $\frac{2}{3}\pi$

12. 如图所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 线段 B_1D_1 上有两个动点 E 、 F 且 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则下列结论中错误的是 ()



- A. $AC \perp BE$ B. $EF \parallel$ 平面 $ABCD$

C. 三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值 D. 异面直线 AE, BF 所成的角为定值

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

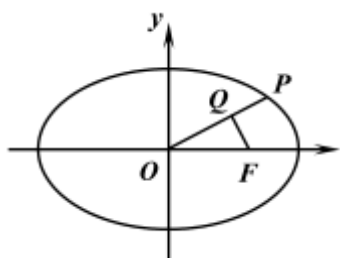
13. 在一次医疗救助活动中，需要从 A 医院某科室的 6 名男医生、4 名女医生中分别抽调 3 名男医生、2 名女医生，且男医生中唯一的主任医师必须参加，则不同的选派案共有_____种.(用数字作答)

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $C: xy = \sqrt{3}$ 上任意一点 P 到直线 $l: x + \sqrt{3}y = 0$ 的距离的最小值为_____.

15. 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{4}{5}$ ，则 $\sin 2\alpha =$ _____.

16. 如图，椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 e ， F 是 Γ 的右焦点，点 P 是 Γ 上第一象限内任意一点，

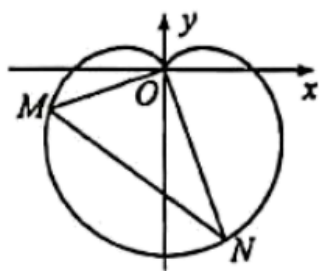
$\vec{OQ} = \lambda \vec{OP} (\lambda > 0)$ ， $\vec{FQ} \cdot \vec{OP} = 0$ ，若 $\lambda < e$ ，则 e 的取值范围是_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在新中国成立 70 周年国庆阅兵庆典中，众多群众在脸上贴着一颗红心，以此表达对祖国的热爱之情，在数学中，有多种方程都可以表示心型曲线，其中有著名的笛卡尔心型曲线，如图，在直角坐标系中，以原点 O 为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 图中的曲线就是笛卡尔心型曲线，其极坐标方程为 $\rho = 1 - \sin \theta$

($0 \leq \theta < 2\pi, \rho > 0$)， M 为该曲线上的任意一点.



(1) 当 $|\vec{OM}| = \frac{3}{2}$ 时，求 M 点的极坐标；

(2) 将射线 OM 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 与该曲线相交于点 N ，求 $|\vec{MN}|$ 的最大值.

18. (12 分) 已知圆 $M: (x + 2\sqrt{3})^2 + y^2 = 64$ 及定点 $N(2\sqrt{3}, 0)$ ，点 A 是圆 M 上的动点，点 B 在 NA 上，点 G 在 MA 上，且满足 $\vec{NA} = 2\vec{NB}$ ， $\vec{GB} \cdot \vec{NA} = 0$ ，点 G 的轨迹为曲线 C .

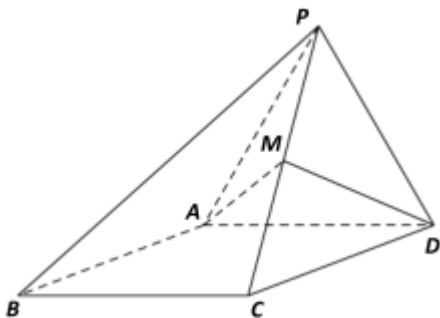
(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 设斜率为 k 的动直线 l 与曲线 C 有且只有一个公共点, 与直线 $y = \frac{1}{2}x$ 和 $y = -\frac{1}{2}x$ 分别交于 P, Q 两点. 当 $|k| > \frac{1}{2}$ 时, 求 $\triangle OPQ$ (O 为坐标原点) 面积的取值范围.

19. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$, 侧面 PAD 是边长为 2 的正三角形, 且与底面垂直, 底面 $ABCD$ 是 $\angle ABC = 60^\circ$ 的菱形, M 为棱 PC 上的动点, 且 $\frac{PM}{PC} = \lambda (\lambda \in [0, 1])$.

(I) 求证: $\triangle PBC$ 为直角三角形;

(II) 试确定 λ 的值, 使得二面角 $P-AD-M$ 的平面角余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



20. (12 分) 已知 $p: \forall x \in R, m(4x^2 + 1) > x$; $q: \exists x \in [2, 8], m \log_2 x + 1 \leq 0$.

(1) 若 p 为真命题, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $\neg p \vee q$ 为真命题且 $\neg p \wedge q$ 为假命题, 求实数 m 的取值范围.

21. (12 分) 语音交互是人工智能的方向之一, 现在市场上流行多种可实现语音交互的智能音箱. 主要代表有小米公司的“小爱同学”智能音箱和阿里巴巴的“天猫精灵”智能音箱, 它们可以通过语音交互满足人们的部分需求. 某经销商为了了解不同智能音箱与其购买者性别之间的关联程度, 从某地区随机抽取了 100 名购买“小爱同学”和 100 名购买“天猫精灵”的人, 具体数据如下:

	“小爱同学”智能音箱	“天猫精灵”智能音箱	合计
男	45	60	105
女	55	40	95
合计	100	100	200

(1) 若该地区共有 13000 人购买了“小爱同学”, 有 12000 人购买了“天猫精灵”, 试估计该地区购买“小爱同学”的女性比购买“天猫精灵”的女性多多少人?

(2) 根据列联表, 能否有 95% 的把握认为购买“小爱同学”、“天猫精灵”与性别有关?

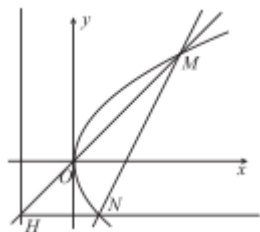
$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

22. (10 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 8$.

(1) 求 p 的值;

(2) 如图, 过原点 O 的直线 l 与抛物线 C 交于点 M , 与直线 $x = -1$ 交于点 H , 过点 H 作 y 轴的垂线交抛物线 C 于点 N , 证明: 直线 MN 过定点.



参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

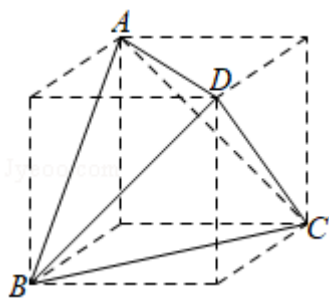
1、B

【解析】

设正四面体 $ABCD$ 的外接球的半径 R , 将该正四面体放入一个正方体内, 使得每条棱恰好为正方体的面对角线, 根据正方体和正四面体的外接球为同一个球计算出正方体的棱长, 从而得出正四面体的棱长, 最后可求出正四面体的表面积。

【详解】

将正四面体 $ABCD$ 放在一个正方体内, 设正方体的棱长为 a , 如图所示,



设正四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为 R ，则 $\frac{4\pi R^3}{3} = 8\sqrt{6}\pi$ ，得 $R = \sqrt{6}$ ．因为正四面体 $ABCD$ 的外接球和正方体的外接球是同一个球，则有 $\sqrt{3}a = 2R = 2\sqrt{6}$ ， $\therefore a = 2\sqrt{2}$ ．而正四面体 $ABCD$ 的每条棱长均为正方体的面对角线长，所以，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $\sqrt{2}a = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$ ，因此，这个正四面体的表面积为 $4 \times \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 16\sqrt{3}$ ．

故选：B．

【点睛】

本题考查球的内接多面体，解决这类问题就是找出合适的模型将球体的半径与几何体的一些几何量联系起来，考查计算能力，属于中档题．

2、C

【解析】

由基本音的谐波的定义可得 $f_1 = nf_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，利用 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 可得 $\omega_1 = n\omega_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，即可判断选项．

【详解】

由题，所有泛音的频率都是基本音频率的整数倍，称为基本音的谐波，

由 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ，可知若 $f_1 = nf_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，则必有 $\omega_1 = n\omega_2$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，

故选：C

【点睛】

本题考查三角函数的周期与频率，考查理解分析能力．

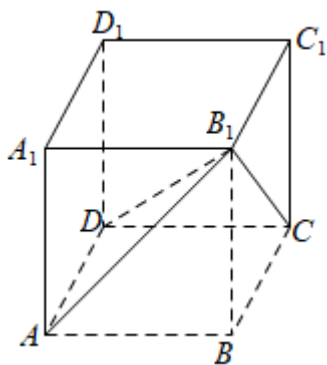
3、C

【解析】

根据三视图作出几何体的直观图，结合三视图的数据可求得几何体的体积．

【详解】

根据三视图还原几何体的直观图如下图所示：



由图可知，该几何体是在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中截去四棱锥 B_1-ABCD 所形成的几何体，

该几何体的体积为 $V = 1^3 - \frac{1}{3} \times 1^2 \times 1 = \frac{2}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查利用三视图计算几何体的体积，考查空间想象能力与计算能力，属于基础题.

4、D

【解析】

利用函数的单调性、不等式的基本性质即可得出.

【详解】

$$\because b < a < 0, \therefore \log_2 |b| > \log_2 |a|, \left(\frac{1}{2}\right)^b > \left(\frac{1}{2}\right)^a, b^3 < a^3, ab < b^2.$$

故选：D.

【点睛】

本小题主要考查利用函数的单调性比较大小，考查不等式的性质，属于基础题.

5、D

【解析】

由三视图可知该几何体的直观图是轴截面在水平面上的半个圆锥，表面积为

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} + \frac{1}{2} \pi 2^2 + \frac{1}{2} \pi \cdot 2 \cdot 6 = 8\sqrt{2} + 8\pi, \text{ 故选 D.}$$

6、D

【解析】

将 $\overrightarrow{AO}$ 、 $\overrightarrow{EC}$ 用 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 表示，再代入 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$ 中计算即可.

【详解】

由 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，知 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，

所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 又 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$,

所以 $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$, $9\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}^2 + 3\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, 所以 $2\overrightarrow{AB}^2 = 3\overrightarrow{AC}^2$, $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

故选: D

【点睛】

本题考查平面向量基本定理的应用, 涉及到向量的线性运算, 是一道中档题.

7、A

【解析】

根据复合函数的单调性, 同增异减以及采用排除法, 可得结果.

【详解】

当 $x > 1$ 时, $f(x) = \ln(x - \frac{1}{x})$,

由 $y = -\frac{1}{x}$, $y = x$ 在 $(1, +\infty)$ 递增,

所以 $t = x - \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 递增

又 $y = \ln t$ 是增函数,

所以 $f(x) = \ln(x - \frac{1}{x})$ 在 $(1, +\infty)$ 递增, 故排除 B、C

当 $x \leq 1$ 时 $f(x) = e^{\cos \pi x}$, 若 $x \in (0, 1)$, 则 $\pi x \in (0, \pi)$

所以 $t = \cos \pi x$ 在 $(0, 1)$ 递减, 而 $y = e^t$ 是增函数

所以 $f(x) = e^{\cos \pi x}$ 在 $(0, 1)$ 递减, 所以 A 正确, D 错误

故选: A

【点睛】

本题考查具体函数的大致图象的判断, 关键在于对复合函数单调性的理解, 记住常用的结论: 增+增=增, 增-减=增, 减+减=减, 复合函数单调性同增异减, 属中档题.

8、B

【解析】

过点 $A(0, -1)$ 的直线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 相切于点 B , 可得 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. 因此

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - r^2$, 即可得出.

【详解】

由圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 配方为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$,

$C(0,1)$, 半径 $r=1$.

$\because$ 过点 $A(0,-1)$ 的直线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 相切于点 B ,

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0;$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - r^2 = 3;$$

故选: B.

【点睛】

本小题主要考查向量数量积的计算, 考查圆的方程, 属于基础题.

9、B

【解析】

根据函数的对称轴 $x = \frac{\pi}{8}$ 以及函数值, 可得结果.

【详解】

函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + b (\omega > 0)$,

若 $f(\frac{\pi}{8} + x) = f(\frac{\pi}{8} - x)$, 则 $f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{8}$ 对称,

又 $f(\frac{\pi}{8}) = 5$, 所以 $2 + b = 5$ 或 $-2 + b = 5$,

所以 b 的值是 7 或 3.

故选: B.

【点睛】

本题考查的是三角函数的概念及性质和函数的对称性问题, 属基础题

10、D

【解析】

首先把三视图转换为几何体, 根据三视图的长度, 进一步求出个各棱长.

【详解】

根据几何体的三视图转换为几何体为: 该几何体为四棱锥体,

如图所示:

所以: $AB = BC = CD = AD = DE = 2$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/595333024320012101>