

专题 14 导数的概念与运算

【考点预测】

知识点一：导数的概念和几何性质

1.概念 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处瞬时变化率是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 我们称它为函数 $y = f(x)$ 在

$x = x_0$ 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$.

知识点诠释:

① 增量 Δx 可以是正数, 也可以是负, 但是不可以等于 0. $\Delta x \rightarrow 0$ 的意义: Δx 与 0 之间距离要多近有多近, 即 $|\Delta x - 0|$ 可以小于给定的任意小的正数;

② 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, Δy 在变化中都趋于 0, 但它们的比值却趋于一个确定的常数, 即存在一个常数与

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 无限接近;

③ 导数的本质就是函数的平均变化率在某点处的极限, 即瞬时变化率. 如瞬时速度即是位移在这一时

刻的瞬间变化率, 即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

2.几何意义 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义即为函数 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率.

3.物理意义 函数 $s = s(t)$ 在点 t_0 处的导数 $s'(t_0)$ 是物体在 t_0 时刻的瞬时速度 v , 即 $v = s'(t_0)$; $v = v(t)$ 在点 t_0 的导数 $v'(t_0)$ 是物体在 t_0 时刻的瞬时加速度 a , 即 $a = v'(t_0)$.

知识点二：导数的运算

1.求导的基本公式

基本初等函数	导函数
$f(x) = c$ (c 为常数)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^a$ ($a \in \mathbb{Q}$)	$f'(x) = ax^{a-1}$
$f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

--	--

$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
-----------------	-------------------

2. 导数的四则运算法则

- (1) 函数和差求导法则: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;
- (2) 函数积的求导法则: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- (3) 函数商的求导法则: $g(x) \neq 0$, 则 $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

3. 复合函数求导数

复合函数 $y = f[g(x)]$ 的导数和函数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 的导数间关系为 $y'_x = y'_u u'_x$:

【方法技巧与总结】

1. 在点的切线方程

切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 的计算: 函数 $y = f(x)$ 在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \text{ 抓住关键 } \begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ k = f'(x_0) \end{cases}.$$

2. 过点的切线方程

设切点为 $P(x_0, y_0)$, 则斜率 $k = f'(x_0)$, 过切点的切线方程为: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$,

又因为切线方程过点 $A(m, n)$, 所以 $n - y_0 = f'(x_0)(m - x_0)$ 然后解出 x_0 的值. (x_0 有几个值, 就有几条切线)

注意: 在做此类题目时要分清题目提供的点在曲线上还是在曲线外.

【题型归纳目录】

题型一: 导数的定义

题型二: 求函数的导数

题型三: 导数的几何意义

1. 在点 P 处切线

2. 过点 P 的切线

3. 公切线

4. 已知切线求参数问题

5. 切线的条数问题

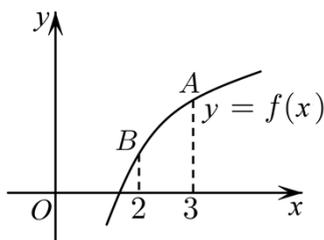
6. 切线平行、垂直、重合问题

7. 最值问题

【典例例题】

题型一：导数的定义

例 1. (2023·全国·高三专题练习 (文)) 函数 $y = f(x)$ 的图像如图所示, 下列不等关系正确的是 ()



- A. $0 < f'(2) < f'(3) < f(3) - f(2)$
 B. $0 < f'(2) < f(3) - f(2) < f'(3)$
 C. $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$
 D. $0 < f(3) - f(2) < f'(2) < f'(3)$

例 2. (2023·河南·南阳中学高三阶段练习 (理)) 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2$, 则 $f'(x_0) =$ ()

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

例 3. (2023·新疆昌吉·二模 (理)) 若存在 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$, 则称 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

为二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记为 $f'_x(x_0, y_0)$; 若存在 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$,

则称 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ 为二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数, 记为 $f'_y(x_0, y_0)$, 已

知二元函数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3 (x > 0, y > 0)$, 则下列选项中错误的是 ()

- A. $f'_x(1, 3) = -4$ B. $f'_y(1, 3) = 10$
 C. $f'_x(m, n) + f'_y(m, n)$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$ D. $f(x, y)$ 的最小值为 $-\frac{4}{27}$

例 4. (2023·贵州黔东南·一模 (文)) 一个质点作直线运动, 其位移 s (单位: 米) 与时间 t (单位: 秒) 满足关系式, $s = t^5 + (t-2)^2 - 4$, 则当 $t=1$ 时, 该质点的瞬时速度为 ()

- A. -2 米/秒 B. 3 米/秒 C. 4 米/秒 D. 5 米/秒

例 5. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 2 \ln x + 8x$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ 的值为 ()

- A. -20 B. -10 C. 10 D. 20

例 6. (2023·浙江·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 2f'(3)x - \frac{2}{9}x^2 + \ln x$ ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数), 则 $f(1) =$

()

- A. $-\frac{20}{9}$ B. $-\frac{11}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{16}{9}$

例 7. (2023·浙江·高三专题练习) 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = x^3 + x^2 f'(1) + 2x - 1$, 则 $f'(2) = (\quad)$

- A. 1 B. -9 C. -6 D. 4

【方法技巧与总结】

对所给函数式经过添项、拆项等恒等变形与导数定义结构相同, 然后根据导数定义直接写出.

题型二: 求函数的导数

例 8. (2023·天津·耀华中学高二期中) 求下列各函数的导数:

(1) $y = \ln(3x - 2)$;

(2) $y = \frac{x}{e^x}$;

(3) $f(x) = x + 2 \cos x$

例 9. (2023·新疆·莎车县第一中学高二期中(理)) 求下列函数的导数:

(1) $y = 2x^2 + \ln x + \cos x$;

(2) $y = x^3 e^x$

(3) $y = \ln(3x - 1)$

例 10. (2023·广东·北京师范大学珠海分校附属外国语学校高二期中) 求下列函数的导数:

(1) $y = x^5$;

(2) $y = x^2 + 2 \sin x$;

(3) $y = \frac{\ln x}{x}$;

(4) $y = e^{2x-1} + \frac{1}{2} \ln(2x)$.

【方法技巧与总结】

对所给函数求导, 其方法是利用和、差、积、商及复合函数求导法则, 直接转化为基本函数求导问题.

题型三：导数的几何意义

1. 在点 P 处切线

例 11. (2023·河北·模拟预测) 曲线 $y = e^x \sin x$ 在 $x = 0$ 处的切线斜率为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. -2

例 12. (2023·安徽·巢湖市第一中学模拟预测 (文)) 曲线 $y = \frac{2x+a}{x+2}$ 在点 $(1, b)$ 处的切线方程为

$kx - y + 6 = 0$, 则 k 的值为 ()

- A. -1 B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

例 13. (2023·海南·文昌中学高三阶段练习) 曲线 $y = e^x - 2x$ 在 $x = 0$ 处的切线的倾斜角为 α , 则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$

()

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. -1

例 14. (2023·安徽·巢湖市第一中学高三期中 (理)) 已知 $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f'(0)\cos x$, 则曲线 $y = f(x)$

在点 $\left(\frac{3\pi}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线的斜率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $-2\sqrt{2}$

例 15. (2023·全国·高三专题练习 (文)) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且

$f(x) = -2x^3 + 3ax^2 - f'(1)x$, 则函数 $f(x)$ 的图象在点 $(-2, f(-2))$ 处的切线的斜率为 ()

- A. -21 B. -27 C. -24 D. -25

例 16. (2023·广西·广西·模拟预测 (理)) 曲线 $y = x^3 + 1$ 在点 $(-1, a)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = 3x + 3$ B. $y = 3x + 1$ C. $y = -3x - 1$ D. $y = -3x - 3$

例 17. (2023·河南省浚县第一中学模拟预测 (理)) 曲线 $y = x \ln(2x + 5)$ 在 $x = -2$ 处的切线方程为 ()

- A. $4x - y + 8 = 0$ B. $4x + y + 8 = 0$
C. $3x - y + 6 = 0$ D. $3x + y + 6 = 0$

2. 过点 P 的切线

例 18. (2023·四川·广安二中二模 (文)) 函数 $f(x) = x^2 e^x$ 过点 $(0, 0)$ 的切线方程为 ()

- A. $y = 0$ B. $ex + y = 0$ C. $y = 0$ 或 $x + ey = 0$ D. $y = 0$ 或 $ex + y = 0$

例 19. (2023·四川省成都市郫都区第一中学高三阶段练习 (文)) 若过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 的直线与函数 $f(x) = xe^x$ 的图

象相切, 则所有可能的切点横坐标之和为 ()

- A. $e + 1$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

- A. 0 B. 1 C. e D. $-e$

例 29. (2023·全国·高三专题练习) 若两曲线 $y = \ln x - 1$ 与 $y = ax^2$ 存在公切线, 则正实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 2e]$ B. $[\frac{1}{2}e^{-3}, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{2}e^{-3}]$ D. $[2e, +\infty)$

例 30. (2023·全国·高三专题练习) 若仅存在一条直线与函数 $f(x) = a \ln x$ ($a > 0$) 和 $g(x) = x^2$ 的图象均相切, 则实数 $a =$ ()

- A. e B. \sqrt{e} C. $2e$ D. $2\sqrt{e}$

4. 已知切线求参数问题

例 31. (2023·湖南·模拟预测) 已知 P 是曲线 $C: y = \ln x + x^2 + (\sqrt{3} - a)x$ 上的一动点, 曲线 C 在 P 点处的切线的倾斜角为 θ , 若 $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[2\sqrt{3}, 0)$ B. $[2\sqrt{2}, 0)$ C. $(-\infty, 2\sqrt{3}]$ D. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$

例 32. (2023·广西·贵港市高级中学三模(理)) 已知曲线 $y = axe^x + \ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y = 3x + b$, 则 ()

- A. $a = e, b = -2$ B. $a = e, b = 2$
C. $a = e^{-1}, b = -2$ D. $a = e^{-1}, b = 2$

例 33. (2023·江苏苏州·模拟预测) 已知奇函数 $f(x) = (x^2 - 2x)(ax + b)$ ($a \neq 0$) 在点 $(a, f(a))$ 处的切线方程为 $y = f(a)$, 则 $b =$ ()

- A. -1 或 1 B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. -2 或 2 D. $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

例 34. (2023·云南昆明·模拟预测(文)) 若函数 $f(x) = a\sqrt{x} + \ln x$ 的图象在 $x = 4$ 处的切线方程为 $y = x + b$, 则 ()

- A. $a = 3, b = 2 + \ln 4$ B. $a = 3, b = -2 + \ln 4$
C. $a = \frac{3}{2}, b = -1 + \ln 4$ D. $a = \frac{3}{2}, b = 1 + \ln 4$

例 35. (2023·河南·方城第一高级中学模拟预测(理)) 已知直线 l 的斜率为 2, l 与曲线 $C_1: y = x(1 + \ln x)$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x + n = 0$ 均相切, 则 $n =$ ()

- A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

5. 切线的条数问题

例 36. (2023·全国·高三专题练习) 若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = \ln x$ 的两条切线, 则 ()

- A. $a < \ln b$ B. $b < \ln a$ C. $\ln b < a$ D. $\ln a < b$

例 37. (2023·河南洛阳·三模(理)) 若过点 $P(1,t)$ 可作出曲线 $y=x^3$ 的三条切线, 则实数 t 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $\{0, 1\}$

例 38. (2023·河南洛阳·三模(文)) 若过点 $P(1,0)$ 作曲线 $y=x^3$ 的切线, 则这样的切线共有 ()

- A. 0 条 B. 1 条 C. 2 条 D. 3 条

例 39. (2023·河北·高三阶段练习) 若过点 $P(1,m)$ 可以作三条直线与曲线 $C: y = \frac{x}{e^x}$ 相切, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, \frac{3}{e^2})$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(\frac{1}{e}, \frac{3}{e^2})$

例 40. (2023·内蒙古呼和浩特·二模(理)) 若过点 $P(-1,m)$ 可以作三条直线与曲线 $C: y = xe^x$ 相切, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{3}{e^2}, +\infty)$ B. $(-\frac{1}{e}, 0)$ C. $(-\frac{1}{e}, -\frac{1}{e^2})$ D. $(-\frac{3}{e^2}, -\frac{1}{e})$

例 41. (2023·广东深圳·二模) 已知 $a > 0$, 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=x^3$ 的三条切线, 则 ()

- A. $b < 0$ B. $0 < b < a^3$ C. $b > a^3$ D. $b(b-a^3) = 0$

6. 切线平行、垂直、重合问题

例 42. (2023·安徽·合肥一中模拟预测(文)) 对于三次函数 $f(x)$, 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线与曲线 $y=xf(x)$ 在点 $(1,2)$ 处点的切线重合, 则 $f'(2) = ()$

- A. -34 B. -14 C. -4 D. 14

例 43. (2023·山西太原·二模(理)) 已知函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x + cx$ 图象上存在两条互相垂直的切线, 且 $a^2 + b^2 = 1$, 则 $a+b+c$ 的最大值为 ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

例 44. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 与点 $B(x_2, f(x_2)) (x_1 < x_2 < 0)$ 处的切线互相垂直, 则 $x_2 - x_1$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1
C. $\frac{3}{2}$ D. 2

例 45. (2023·全国·高三专题练习) 若直线 $x=a$ 与两曲线 $y=e^x, y=\ln x$ 分别交于 A, B 两点, 且曲线 $y=e^x$ 在点 A 处的切线为 m , 曲线 $y=\ln x$ 在点 B 处的切线为 n , 则下列结论:

① $\exists a \in (0, +\infty)$, 使得 $m \parallel n$; ② 当 $m \parallel n$ 时, $|AB|$ 取得最小值;

③ $|AB|$ 的最小值为 2; ④ $|AB|$ 最小值小于 $\frac{5}{2}$.

其中正确的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

例 46. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2a (x < 0) \\ -\frac{1}{x} (x > 0) \end{cases}$ 的图象上存在不同的两点 A, B , 使得

曲线 $y = f(x)$ 在这两点处的切线重合, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -\frac{1}{8})$ B. $(-1, \frac{1}{8})$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1) \cup (\frac{1}{8}, +\infty)$

例 47. (2023·全国·高三专题练习(文)) 若曲线 $y = e^x + x$ 的一条切线 l 与直线 $x + 2y - 2021 = 0$ 垂直, 则切线 l 的方程为 ()

- A. $2x - y + 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y - 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

7. 最值问题

例 48. (2023·全国·高三专题练习) 若点 P 是曲线 $y = \frac{3}{2}x^2 - 2\ln x$ 上任意一点, 则点 P 到直线 $y = x - 3$ 的距离的最小值为 ()

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{5}$

例 49. (2023·山东省淄博第一中学高三开学考试) 动直线 l 分别与直线 $y = 2x - 1$, 曲线 $y = \frac{3}{2}x^2 - \ln x$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. 1 D. $\sqrt{5}$

例 50. (2023·江苏·高三专题练习) 已知 a, b 为正实数, 直线 $y = x - a$ 与曲线 $y = \ln(x + b)$ 相切, 则 $\frac{a^2}{2-b}$ 的取值范围是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $[1, +\infty)$

例 51. (2023·全国·高三专题练习) 曲线 $y = e^{2x}$ 上的点到直线 $2x - y - 4 = 0$ 的最短距离是 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

例 52. (2023·河北衡水·高三阶段练习) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - 2x^2$ 在 $x = 1$ 处的切线为 l , 第一象限内的点

$P(a, b)$ 在切线 l 上, 则 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{2+3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3+4\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{4+2\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{3+\sqrt{2}}{4}$

例 53. (2023·山东聊城·二模) 实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足: $x_1^2 - \ln x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 - 4 = 0$, 则

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 的最小值为 ()

- A. 0 B. $2\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. 8

例 54. (2023·河南·许昌高中高三开学考试(理)) 已知函数 $y = e^{2x+1}$ 的图象与函数 $y = \frac{\ln(x+1)+1}{2}$ 的图象关于某一条直线 l 对称, 若 P, Q 分别为它们图象上的两个动点, 则这两点之间距离的最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}\ln 2}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}(4+\ln 2)}{2}$ D. $\sqrt{2}(4+\ln 2)$

例 55. (2023·河南·灵宝市第一高级中学模拟预测(文)) 已知直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = \sqrt{x} + 1$ 的切线, 则 $k^2 + b^2 - 2b$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. $\frac{5}{4}$ D. 3

【方法技巧与总结】

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 这里要注意曲线在某点处的切线与曲线经过某点的切线的区别. (1) 已知 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. (2) 若求曲线 $y = f(x)$ 过点 (a, b) 的切线方程, 应先设切点坐标为 $(x_0, f(x_0))$, 由 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ 过点 (a, b) , 求得 x_0 的值, 从而求得切线方程. 另外, 要注意切点既在曲线上又在切线上.

【过关测试】

一、单选题

1. (2023·河南·高三阶段练习(理)) 若曲线 $f(x) = \frac{a \ln x}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$, 则 $a =$ ()

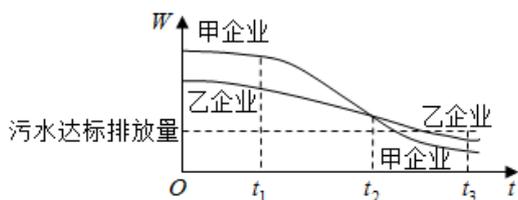
- A. 1 B. $\frac{e}{2}$ C. 2 D. e

2. (2023·云南曲靖·二模(文)) 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, $f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导函数, 若对任意 $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ 恒成立, 则下列选项正确的是 ()

- A. $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$ B. $0 < f(3) - f(2) < f'(2) < f'(3)$
C. $0 < f'(3) < f'(2) < f(3) - f(2)$ D. $0 < f'(2) < f'(3) < f(3) - f(2)$

3. (2023·全国·高三专题练习) 设 $f(x)$ 为可导函数, 且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1 - 2\Delta x)}{\Delta x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 ()

- A. 2 B. -1 C. 1 D. $-\frac{1}{2}$



- A. 在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强
- B. 在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强
- C. 在 t_3 时刻，甲、乙两企业的污水排放都已达标
- D. 甲企业在 $[0, t_1]$ ， $[t_1, t_2]$ ， $[t_2, t_3]$ 这三段时间中，在 $[0, t_1]$ 的污水治理能力最强

11. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = e^x$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. 曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率可以是 1
- B. 曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率可以是 -1
- C. 过点 $(0, 1)$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线有且只有 1 条
- D. 过点 $(0, 0)$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线有且只有 2 条

12. (2023·全国·高三专题练习) 过平面内一点 P 作曲线 $y = |\ln x|$ 两条互相垂直的切线 l_1, l_2 ，切点为 P_1, P_2 (P_1, P_2 不重合)，设直线 l_1, l_2 分别与 y 轴交于点 A, B ，则下列结论正确的是 ()

- A. P_1, P_2 两点的横坐标之积为定值
- B. 直线 P_1P_2 的斜率为定值；
- C. 线段 AB 的长度为定值
- D. 三角形 ABP 面积的取值范围为 $(0, 1]$

三、填空题

13. (2023·山东·肥城市教学研究中心模拟预测) 已知函数 $f(x) = 3x - x \ln x$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为_____.

14. (2023·全国·模拟预测 (文)) 若直线 l 与曲线 $y = x^2$ 和 $x^2 + y^2 = \frac{4}{9}$ 都相切，则 l 的斜率为_____.

15. (2023·湖北武汉·模拟预测) 已知函数 $f(x) = f'(0)e^{2x} - e^{-x}$ ，则 $f(0) =$ _____.

16. (2023·全国·赣州市第三中学模拟预测 (理)) 已知 $2f(x) + xf'(x) = 2x \cos 2x + 2(\cos x + \sin x)^2$ ，且 $x > 0$ ， $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$ ，那么 $f(\pi) =$ _____.

四、解答题

17. (2023·全国·高三专题练习 (文)) 下列函数的导函数

(1) $y = x^4 - 3x^2 - 5x + 6$;

(2) $y = 2^x + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$;

(3) $y = x - \log_2 x$;

(4) $y = \frac{\cos x}{x}$.

18. (2023·辽宁·沈阳二中二模) 用数学的眼光看世界就能发现很多数学之“美”. 现代建筑讲究线条感, 曲线之美让人称奇. 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率, 曲线的曲率定义如下: 若 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,

$f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的曲率 $K = \frac{|f''(x)|}{(1+[f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}}$.



(1) 若曲线 $f(x) = \ln x + x$ 与 $g(x) = \sqrt{x}$ 在 $(1, 1)$ 处的曲率分别为 K_1, K_2 , 比较 K_1, K_2 大小;

(2) 求正弦曲线 $h(x) = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 曲率的平方 K^2 的最大值.

19. (2023·全国·高三专题练习) 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线为 $x - ey + b = 0$, 求 a, b 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

20. (2023·浙江·高三专题练习) 函数 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, 直线 l 是 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线.

(1) 确定 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求直线 l 的方程及直线 l 与 $y = f(x)$ 的图象的交点.

21. (2023·北京东城·三模) 已知函数 $f(x) = e^x$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $y = kx + b$.

(1) 求 k, b 的值;

(2) 设函数 $g(x) = \begin{cases} kx + b, & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$, 若 $g(x) = t$ 有两个实数根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 将 $x_2 - x_1$ 表示为 t 的函数, 并求

$x_2 - x_1$ 的最小值.

22. (2023·贵州贵阳·模拟预测 (理)) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \ln x + a(1-x)$, $g(x) = e^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 过原点分别作曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的切线 l_1 和 l_2 , 求证: 存在 $a > 0$, 使得切线 l_1 和 l_2 的斜率互为倒数.

专题 14 导数的概念与运算

【考点预测】

知识点一：导数的概念和几何性质

1.概念 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处瞬时变化率是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ，我们称它为

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$ 。

知识点诠释：

① 增量 Δx 可以是正数，也可以是负，但是不可以等于 0。 $\Delta x \rightarrow 0$ 的意义： Δx 与 0 之间距离要多近有

多近，即 $|\Delta x - 0|$ 可以小于给定的任意小的正数；

② 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， Δy 在变化中都趋于 0，但它们的比值却趋于一个确定的常数，即存在一个常数与

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 无限接近；

③ 导数的本质就是函数的平均变化率在某点处的极限，即瞬时变化率。如瞬时速度即是位移在这一时

刻的瞬间变化率，即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 。

2.几何意义 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义即为函数 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率。

3.物理意义 函数 $s = s(t)$ 在点 t_0 处的导数 $s'(t_0)$ 是物体在 t_0 时刻的瞬时速度 v ，即 $v = s'(t_0)$ ； $v = v(t)$ 在点 t_0 的导数 $v'(t_0)$ 是物体在 t_0 时刻的瞬时加速度 a ，即 $a = v'(t_0)$ 。

知识点二：导数的运算

1.求导的基本公式

基本初等函数	导函数
$f(x) = c$ (c 为常数)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^a$ ($a \in \mathbb{Q}$)	$f'(x) = ax^{a-1}$
$f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

2. 导数的四则运算法则

- (1) 函数和差求导法则: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;
- (2) 函数积的求导法则: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- (3) 函数商的求导法则: $g(x) \neq 0$, 则 $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

3. 复合函数求导数

复合函数 $y = f[g(x)]$ 的导数和函数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 的导数间关系为 $y'_x = y'_u u'_x$:

【方法技巧与总结】

1. 在点的切线方程

切线方程 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 的计算: 函数 $y = f(x)$ 在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 抓住关键 $\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ k = f'(x_0) \end{cases}$.

2. 过点的切线方程

设切点为 $P(x_0, y_0)$, 则斜率 $k = f'(x_0)$, 过切点的切线方程为: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, 又因为切线方程过点 $A(m, n)$, 所以 $n - y_0 = f'(x_0)(m - x_0)$ 然后解出 x_0 的值. (x_0 有几个值, 就有几条切线)

注意: 在做此类题目时要分清题目提供的点在曲线上还是在曲线外.

【题型归纳目录】

题型一: 导数的定义

题型二: 求函数的导数

题型三: 导数的几何意义

1. 在点 P 处切线

2. 过点 P 的切线

3. 公切线

4. 已知切线求参数问题

5. 切线的条数问题

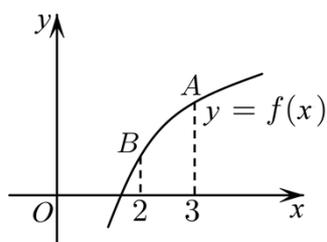
6.切线平行、垂直、重合问题

7.最值问题

【典例例题】

题型一：导数的定义

例 1. (2023·全国·高三专题练习(文)) 函数 $y = f(x)$ 的图像如图所示, 下列不等关系正确的是 ()



- A. $0 < f'(2) < f'(3) < f(3) - f(2)$
- B. $0 < f'(2) < f(3) - f(2) < f'(3)$
- C. $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$
- D. $0 < f(3) - f(2) < f'(2) < f'(3)$

答案: C

【解析】

分析:

根据导数的几何意义和函数平均变化率的定义, 结合图象, 即可求解.

【详解】

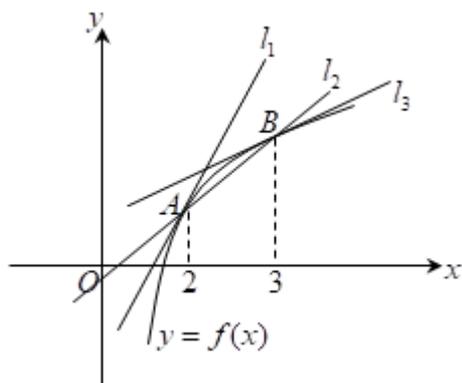
如图所示, 根据导数的几何意义, 可得 $f'(2)$ 表示切线 l_1 斜率 $k_1 > 0$,

$f'(3)$ 表示切线 l_3 斜率 $k_3 > 0$,

又由平均变化率的定义, 可得 $\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$, 表示割线 l_2 的斜率 k_2 ,

结合图象, 可得 $0 < k_3 < k_2 < k_1$, 即 $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$.

故选: C.



例 2. (2023·河南·南阳中学高三阶段练习 (理)) 设函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2, \text{ 则 } f'(x_0) = (\quad)$$

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

答案: A

【解析】

分析:

利用函数的导数的定义求解.

【详解】

$$\begin{aligned} \text{解: 因为 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \\ = -2 \lim_{-2\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{-2\Delta x}, \\ = -2f'(x_0) = 2, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f'(x_0) = -1,$$

故选: A

例 3. (2023·新疆昌吉·二模 (理)) 若存在 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$, 则称

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 为二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记为

$f'_x(x_0, y_0)$; 若存在 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$, 则称 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ 为二元

函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数, 记为 $f'_y(x_0, y_0)$, 已知二元函数

$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3 (x > 0, y > 0)$, 则下列选项中错误的是 ()

- A. $f'_x(1, 3) = -4$ B. $f'_y(1, 3) = 10$
C. $f'_x(m, n) + f'_y(m, n)$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$ D. $f(x, y)$ 的最小值为 $-\frac{4}{27}$

答案: B

【解析】

分析:

根据条件求出 $f'_x(x_0, y_0)$ 、 $f'_y(x_0, y_0)$, 然后可逐一判断 ABC,

$f(x, y) = (x - y)^2 + y^3 - y^2 \geq y^3 - y^2$, 然后利用导数求出右边的最小值即可.

【详解】

因为 $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3 (x > 0, y > 0)$,

所以 $f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = 2x_0 - 2y_0$ ，则 $f'_x(1, 3) = -4$ ，

又 $f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = -2x_0 + 3y_0^2$ ，所以 $f'_y(1, 3) = 25$ ，

因为 $f'_x(m, n) + f'_y(m, n) = 2m - 2n - 2m + 3n^2 = 3n^2 - 2n = 3\left(n - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$ ，

所以当 $n = \frac{1}{3}$ 时， $f'_x(m, n) + f'_y(m, n)$ 取得最小值，且最小值为 $-\frac{1}{3}$ ，

$$f(x, y) = (x - y)^2 + y^3 - y^2 \geq y^3 - y^2,$$

$$\text{令 } g(x) = x^3 - x^2 \quad (x > 0), \quad g'(x) = 3x^2 - 2x,$$

当 $0 < x < \frac{2}{3}$ 时， $g'(x) < 0$ ，当 $x > \frac{2}{3}$ 时， $g'(x) > 0$ ，

$$\text{故 } g(x)_{\min} = g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27},$$

从而当 $x = y = \frac{2}{3}$ 时， $f(x, y)$ 取得最小值，且最小值为 $-\frac{4}{27}$ 。

故选：B。

例 4. (2023·贵州黔东南·一模(文)) 一个质点作直线运动，其位移 s (单位：米) 与时间 t (单位：秒) 满足关系式， $s = t^5 + (t - 2)^2 - 4$ ，则当 $t = 1$ 时，该质点的瞬时速度为 ()

- A. -2 米/秒 B. 3 米/秒 C. 4 米/秒 D. 5 米/秒

答案：B

【解析】

分析：

先求出导数，再代入 $t = 1$ 计算即可。

【详解】

$s' = 5t^4 + 2t - 4$ ，当 $t = 1$ 时， $s' = 3$ ，故当 $t = 1$ 时，该质点的瞬时速度为 3 米/秒。

故选：B。

例 5. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 2 \ln x + 8x$ ，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ 的值为 ()

- A. -20 B. -10 C. 10 D. 20

答案：D

【解析】

分析：

根据导数的定义可得 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2f'(1)$ ，再用求导公式可得 $f'(x) = \frac{2}{x} + 8$ ，代入 $x=1$ 即可得解。

【详解】

因为 $f(x) = 2\ln x + 8x$ ，所以 $f'(x) = \frac{2}{x} + 8$ ，

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2 \lim_{2\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} = 2f'(1) = 20$ 。

故选：D

例 6. (2023·浙江·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 2f'(3)x - \frac{2}{9}x^2 + \ln x$ ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数)，则 $f(1) =$ ()

- A. $-\frac{20}{9}$ B. $-\frac{11}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{16}{9}$

答案：D

【解析】

分析：

对函数进行求导，求出 $f'(3) = 2$ ，再令 $x=1$ 代入解析式，即可得到答案；

【详解】

$$\therefore f'(x) = 2f'(3) - \frac{4}{9}x + \frac{1}{x}, \therefore f'(3) = 2f'(3) - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow f'(3) = 1,$$

$$\therefore f(x) = 2x - \frac{2}{9}x^2 + \ln x, \therefore f(1) = 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9},$$

故选：D.

例 7. (2023·浙江·高三专题练习) 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且满足

$$f(x) = x^3 + x^2 f'(1) + 2x - 1, \text{ 则 } f'(2) = (\quad)$$

- A. 1 B. -9 C. -6 D. 4

答案：C

【解析】

分析：

先对 $f(x)$ 进行求导，然后把 $x=1$ 代入 $f'(x)$ ，可列出关于 $f'(1)$ 的等式，即可解出 $f'(1)$ ，从而得出 $f'(x)$ 的解析式，即可求出 $f'(2)$ 。

【详解】

解：因为 $f(x) = x^3 + x^2 f'(1) + 2x - 1$ ，

所以 $f'(x) = 3x^2 + 2x f'(1) + 2$ ，

把 $x=1$ 代入 $f'(x)$,

得 $f'(1)=3 \times 1^2+2f'(1)+2$, 解得: $f'(1)=-5$,

所以 $f'(x)=3x^2-10x+2$, 所以 $f'(2)=-6$.

故选: C.

【方法技巧与总结】

对所给函数式经过添项、拆项等恒等变形与导数定义结构相同, 然后根据导数定义直接写出.

题型二: 求函数的导数

例 8. (2023·天津·耀华中学高二期中) 求下列各函数的导数:

(1) $y = \ln(3x-2)$;

(2) $y = \frac{x}{e^x}$;

(3) $f(x) = x + 2 \cos x$

答案: (1) $y' = \frac{3}{3x-2}$

(2) $y' = \frac{1-x}{e^x}$

(3) $f'(x) = 1 - 2 \sin x$

【解析】

分析:

根据导数求导法则及基本初等函数的导数求解即可.

(1)

Q $y = \ln(3x-2)$,

$$\therefore y' = \frac{1}{3x-2} \times (3x-2)' = \frac{3}{3x-2}.$$

(2)

Q $y = \frac{x}{e^x}$,

$$y' = \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}.$$

(3)

Q $f(x) = x + 2 \cos x$,

$$\therefore f'(x) = 1 - 2 \sin x.$$

例 9. (2023·新疆·莎车县第一中学高二期中(理)) 求下列函数的导数:

(1) $y = 2x^2 + \ln x + \cos x$;

$$(2) y = x^3 e^x$$

$$(3) y = \ln(3x-1)$$

答案: (1) $y' = 4x + \frac{1}{x} - \sin x$

$$(2) y' = (x^3 + 3x^2) e^x$$

$$(3) y' = \frac{3}{3x-1}$$

【解析】

分析:

利用导数四则运算法则和复合函数求导法则计算即可得到结果.

(1)

$$y' = (2x^2)' + (\ln x)' + (\cos x)' = 4x + \frac{1}{x} - \sin x$$

(2)

$$y' = (x^3)' e^x + x^3 (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (x^3 + 3x^2) e^x$$

(3)

$$y' = \frac{1}{3x-1} \cdot (3x-1)' = \frac{3}{3x-1}$$

例 10. (2023·广东·北京师范大学珠海分校附属外国语学校高二期中) 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^5;$$

$$(2) y = x^2 + 2 \sin x;$$

$$(3) y = \frac{\ln x}{x};$$

$$(4) y = e^{2x-1} + \frac{1}{2} \ln(2x).$$

答案: (1) $y' = 5x^4$

$$(2) y' = 2x + 2 \cos x$$

$$(3) y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$(4) y' = 2e^{2x-1} + \frac{1}{2x}$$

【解析】

分析:

利用导数公式和运算法则求解.

(1)

因为 $y = x^5$,

所以 $y' = 5x^4$;

(2)

因为 $y = x^2 + 2 \sin x$,

所以 $y' = 2x + 2 \cos x$;

(3)

因为 $y = \frac{\ln x}{x}$,

所以 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$;

(4)

因为 $y = e^{2x-1} + \frac{1}{2} \ln(2x)$,

所以 $y' = 2e^{2x-1} + \frac{1}{2x}$

【方法技巧与总结】

对所给函数求导,其方法是利用和、差、积、商及复合函数求导法则,直接转化为基本函数求导问题.

题型三: 导数的几何意义

1. 在点 P 处切线

例 11. (2023·河北·模拟预测) 曲线 $y = e^x \sin x$ 在 $x = 0$ 处的切线斜率为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. -2

答案: B

【解析】

分析:

即求曲线在 $(0, f(0))$ 处的导数.

【详解】

$$y' = e^x \sin x + e^x \cos x, \quad k = y'|_{x=0} = 1.$$

故选: B.

例 12. (2023·安徽·巢湖市第一中学模拟预测(文)) 曲线 $y = \frac{2x+a}{x+2}$ 在点 $(1, b)$ 处的切线方程

为 $kx - y + 6 = 0$, 则 k 的值为 ()

- A. -1 B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

答案: A

【解析】

分析:

依据题意列出关于 a 、 b 、 k 的方程组，即可求得 k 的值

【详解】

由切点 $(1, b)$ 在曲线上，得 $b = \frac{2+a}{3}$ ①；

由切点 $(1, b)$ 在切线上，得 $k - b + 6 = 0$ ②；

对曲线求导得 $y' = \frac{4-a}{(x+2)^2}$ ， $\therefore y'|_{x=1} = \frac{4-a}{3^2} = k$ ，即 $4-a = 9k$ ③，

$$\text{联立①②③} \begin{cases} b = \frac{2+a}{3} \\ k - b + 6 = 0 \\ 4 - a = 9k \end{cases}, \text{解之得} \begin{cases} a = 13 \\ b = 5 \\ k = -1 \end{cases}$$

故选：A.

例 13. (2023·海南·文昌中学高三阶段练习) 曲线 $y = e^x - 2x$ 在 $x = 0$ 处的切线的倾斜角为 α ，

则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = (\quad)$

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 1

D. -1

答案：A

【解析】

分析：

利用导数的几何意义求得切线的斜率，求得其倾斜角 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ，即可求解.

【详解】

由题意，函数 $y = e^x - 2x$ ，可得 $y' = e^x - 2$ ，

则 $y'|_{x=0} = -1$ ，即曲线在 $x = 0$ 处的切线的斜率为 -1 ，即 $\tan \alpha = -1$ ，

因为 $0 \leq \alpha < \pi$ ，所以 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ，所以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：A.

例 14. (2023·安徽·巢湖市第一中学高三期中(理)) 已知 $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f'(0)\cos x$ ，

则曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{3\pi}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线的斜率为 (\quad)

A. $\sqrt{2}$

B. $-\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $-2\sqrt{2}$

答案：D

【解析】

分析:

根据导数的几何意义, 写出切线方程的公式, 直接计算求解即可

【详解】

$$\text{对 } f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f'(0)\cos x = 2\sin x + f'(0)\cos x,$$

求导可得, $f'(x) = 2\cos x - f'(0)\sin x$, 得到 $f'(0) = 2$, 所以,

$$f(x) = 2\sin x + 2\cos x, \text{ 所以, } f'(x) = 2\cos x - 2\sin x,$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{3\pi}{4} - 2\sin\frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

故选 D

例 15. (2023·全国·高三专题练习(文)) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $f(x) = -2x^3 + 3ax^2 - f'(1)x$, 则函数 $f(x)$ 的图象在点 $(-2, f(-2))$ 处的切线的斜率为 ()

- A. -21 B. -27 C. -24 D. -25

答案: A

【解析】

分析:

求导数得出 $f'(1)$, 结合奇函数定义得函数解析式, 然后计算 $f'(-2)$ 即可.

【详解】

$f(x)$ 是奇函数,

$$f(-x) = 2x^3 + 3ax^2 + f'(1)x = -f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + f'(1)x \text{ 恒成立, 所以 } a = 0,$$

$$f(x) = -2x^3 - f'(1)x, \quad f'(x) = -6x^2 - f'(1),$$

$$\text{所以 } f'(1) = -6 - f'(1), \quad f'(1) = -3, \text{ 即 } f'(x) = -6x^2 + 3,$$

$$f'(-2) = -6 \times (-2)^2 + 3 = -21.$$

故选: A.

例 16. (2023·广西广西·模拟预测(理)) 曲线 $y = x^3 + 1$ 在点 $(-1, a)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = 3x + 3$ B. $y = 3x + 1$ C. $y = -3x - 1$ D. $y = -3x - 3$

答案: A

【解析】

分析:

利用导数的几何意义得到切线的斜率, 利用点斜式求出切线方程.

【详解】

$$\because y = f(x) = x^3 + 1$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2, \text{ 所以 } f'(-1) = 3,$$

又当 $x = -1$ 时, $a = x^3 + 1 = -1 + 1 = 0$,

所以 $y = x^3 + 1$ 在点 $(-1, a)$ 处的切线方程为: $y = 3(x + 1)$, 即 $y = 3x + 3$.

故选: A.

例 17. (2023·河南省浚县第一中学模拟预测 (理)) 曲线 $y = x \ln(2x + 5)$ 在 $x = -2$ 处的切线方程为 ()

A. $4x - y + 8 = 0$

B. $4x + y + 8 = 0$

C. $3x - y + 6 = 0$

D. $3x + y + 6 = 0$

答案: B

【解析】

分析:

将 $x = -2$ 代入曲线方程求得切点坐标, 利用导数的几何意义求解切线斜率, 利用直线方程点斜式求解即可.

【详解】

解: 因为 $y = x \ln(2x + 5)$, 所以 $y' = [x \ln(2x + 5)]' = \ln(2x + 5) + \frac{2x}{2x + 5}$, 所以 $y'|_{x=-2} = -4$.

又当 $x = -2$ 时, $y = x \ln 1 = 0$, 故切点坐标为 $(-2, 0)$, 所以切线方程为 $4x + y + 8 = 0$.

故选: B.

2. 过点 P 的切线

例 18. (2023·四川·广安二中二模 (文)) 函数 $f(x) = x^2 e^x$ 过点 $(0, 0)$ 的切线方程为 ()

A. $y = 0$

B. $ex + y = 0$

C. $y = 0$ 或 $x + ey = 0$

D. $y = 0$ 或 $ex + y = 0$

答案: C

【解析】

分析:

设切点 $(m, m^2 e^m)$, 利用导数的几何意义求该切点上的切线方程, 再由切线过 $(0, 0)$ 代入求参数 m , 即可得切线方程.

【详解】

由题设 $f'(x) = (2x + x^2)e^x$, 若切点为 $(m, m^2 e^m)$, 则 $f'(m) = (2m + m^2)e^m$,

所以切线方程为 $y - m^2 e^m = (2m + m^2)e^m(x - m)$, 又切线过 $(0, 0)$,

则 $m^2 e^m = (2 + m)m^2 e^m$, 可得 $m = 0$ 或 $m = -1$,

当 $m = 0$ 时, 切线为 $y = 0$; 当 $m = -1$ 时, 切线为 $ey - 1 = -(x + 1)$, 整理得 $x + ey = 0$.

故选: C

例 19. (2023·四川省成都市郫都区第一中学高三阶段练习 (文)) 若过点 $(\frac{1}{2}, 0)$

的直线与函数 $f(x) = xe^x$ 的图象相切，则所有可能的切点横坐标之和为 ()

- A. $e+1$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

答案：D

【解析】

分析：

由已知，设出切点，写出切线方程，然后把点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 代入方程，解出切点坐标即可完成求解.

【详解】

因为函数 $f(x) = xe^x$ ，所以 $f'(x) = (x+1)e^x$ ，

设切点为 $(x_0, x_0e^{x_0})$ ，则切线方程为： $y - x_0e^{x_0} = (x_0+1)e^{x_0}(x - x_0)$ ，

将点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 代入得 $-x_0e^{x_0} = (x_0+1)e^{x_0}(\frac{1}{2} - x_0)$ ，

即 $-x_0 = (x_0+1)(\frac{1}{2} - x_0)$ ，解得 $x_0 = -\frac{1}{2}$ 或 $x_0 = 1$ ，

所以切点横坐标之和为 $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

故选：D.

例 20. (2023·陕西安康·高三期末(文)) 曲线 $y = 2x \ln x + 3$ 过点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 的切线方程是

()

- A. $2x + y + 1 = 0$ B. $2x - y + 1 = 0$
C. $2x + 4y + 1 = 0$ D. $2x - 4y + 1 = 0$

答案：B

【解析】

分析：

设出切点，结合导数列方程，由此求出切点坐标并求出切线的斜率，进而可得切线方程.

【详解】

由题意可得点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 不在曲线 $y = 2x \ln x + 3$ 上，

设切点为 (x_0, y_0) ，因为 $y' = 2 \ln x + 2$ ，

所以所求切线的斜率 $k = 2 \ln x_0 + 2 = \frac{y_0}{x_0 + \frac{1}{2}} = \frac{2y_0}{2x_0 + 1}$ ，

所以 $y_0 = 2x_0 \ln x_0 + 2x_0 + \ln x_0 + 1$.

因为点 (x_0, y_0) 是切点，所以 $y_0 = 2x_0 \ln x_0 + 3$ ，

所以 $2x_0 \ln x_0 + 2x_0 + \ln x_0 + 1 = 2x_0 \ln x_0 + 3$ ，即 $2x_0 + \ln x_0 - 2 = 0$ 。

设 $f(x) = 2x + \ln x - 2$ ，明显 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，且 $f(1) = 0$ ，

所以 $2x_0 + \ln x_0 - 2 = 0$ 有唯一解 $x_0 = 1$ ，则所求切线的斜率 $k = 2$ ，

故所求切线方程为 $y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x + 1$ 。

故选：B。

例 21. (2023·广东茂名·二模) 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线，则切点的纵坐标为 ()

- A. e B. 1 C. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ D. $\frac{1}{e}$

答案：B

【解析】

分析：

设出切点 $P(x_0, \ln x_0)$ ($x_0 > 0$)，利用导数得到切线的斜率，写出切线方程，将原点坐标代入切线方程，解出即可。

【详解】

解：设切点 $P(x_0, \ln x_0)$ ($x_0 > 0$)，

由 $y = \ln x$ ，得 $y' = \frac{1}{x}$ ，所以 $y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$ ，

\therefore 曲线在点 P 处的切线 l 方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ ，

又 l 过 $(0, 0)$ ， $\therefore -\ln x_0 = \frac{1}{x_0}(-x_0)$ ，解得 $x_0 = e$ ，

\therefore 切点 $P(e, 1)$ ，纵坐标为 1。

故选：B。

例 22. (2023·山东潍坊·三模) 过点 $P(1, m)$ ($m \in \mathbf{R}$) 有 n 条直线与函数 $f(x) = xe^x$ 的图像相切，

当 n 取最大值时， m 的取值范围为 ()

- A. $-\frac{5}{e^2} < m < e$ B. $-\frac{5}{e^2} < m < 0$ C. $-\frac{1}{e} < m < 0$ D. $m < e$

答案：B

【解析】

分析：

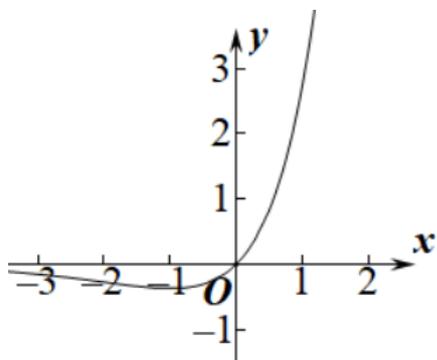
求导分析 $f(x) = xe^x$ 的图象可得 $n = 3$ ，再设切点坐标为 (x_0, y_0) ，由题可得

$m = (-x_0^2 + x_0 + 1) \cdot e^{x_0}$ 有三根，再构造函数 $g(x) = (-x^2 + x + 1) \cdot e^x$ 求导分析图象单调性与最值

即可

【详解】

由 $f(x) = xe^x$, $f'(x) = (x+1)e^x$, 故当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x) < 0$; 当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 结合图象易得, 过点 $P(1, m)$ ($m \in \mathbf{R}$) 至多有 3 条直线与函数 $f(x) = xe^x$ 的图像相切, 故 $n = 3$.



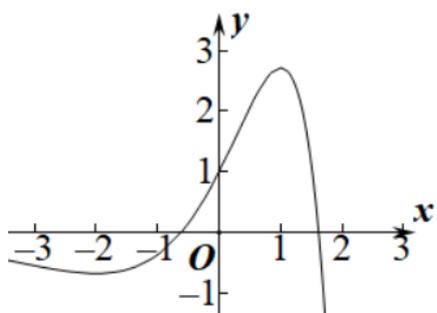
此时, 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则切线斜率 $k = (x_0 + 1) \cdot e^{x_0}$, 所以切线方程为

$y - x_0 e^{x_0} = (x_0 + 1) \cdot e^{x_0} (x - x_0)$, 将 $P(1, m)$ 代入得 $m = (-x_0^2 + x_0 + 1) \cdot e^{x_0}$, 存在三条切线即函数

$m = (-x^2 + x + 1) \cdot e^x$ 有三个不同的根, 又 $g'(x) = -(x-1)(x+2) \cdot e^x$, 易得在 $(-2, 1)$ 上,

$g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 在 $(-\infty, -2)$ 和 $(1, +\infty)$ 上, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 画出图象

可得当 $g(-2) < m < 0$, 即 $-\frac{5}{e^2} < m < 0$ 时符合题意



故选: B

【点睛】

本题主要考查了利用导数解决切线的问题, 同时也考查了构造函数, 求导分析单调性, 进而确定根的个数与参数取值范围的问题, 属于难题

3.公切线

例 23. (2023·全国·高三专题练习) 若函数 $f(x) = \ln x$ 与函数 $g(x) = x^2 + x + a$ ($x < 0$) 有公切线, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left(\ln \frac{1}{2e}, +\infty\right)$

B. $(-1, +\infty)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(\ln 2, +\infty)$

答案: B

【解析】

分析:

分别求出导数, 设出各自曲线上的切点, 得出两个切线方程, 由两个切线方程可整理成 a 关于一个变量 x_1 的函数, 利用导数求出函数的取值范围即可求解.

【详解】

设公切线与函数 $f(x) = \ln x$ 切于点 $A(x_1, \ln x_1)(x_1 > 0)$,

$f'(x) = \frac{1}{x}$, 切线的斜率为 $\frac{1}{x_1}$,

则切线方程为 $y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{1}{x_1}x + \ln x_1 - 1$

设公切线与函数 $g(x) = x^2 + x + a$ 切于点 $B(x_2, x_2^2 + x_2 + a)(x_2 < 0)$,

$g'(x) = 2x + 1$, 切线的斜率为 $2x_2 + 1$,

则切线方程为 $y - (x_2^2 + x_2 + a) = (2x_2 + 1)(x - x_2)$, 即 $y = (2x_2 + 1)x - x_2^2 + a$

$$\text{所以有} \begin{cases} \frac{1}{x_1} = 2x_2 + 1 \\ \ln x_1 - 1 = -x_2^2 + a \end{cases}$$

因为 $x_1 > 0$, 所以 $2x_2 + 1 > 0$, 可得 $-\frac{1}{2} < x_2 < 0$, $0 < 2x_2 + 1 < 1$, 即 $0 < \frac{1}{x_1} < 1$,

由 $\frac{1}{x_1} = 2x_2 + 1$ 可得: $x_2 = \frac{1}{2x_1} - \frac{1}{2}$,

所以 $a = \ln x_1 + x_2^2 - 1 = \ln x_1 + \left(\frac{1}{2x_1} - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\ln \frac{1}{x_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_1} - 1\right)^2 - 1$,

令 $t = \frac{1}{x_1}$, 则 $t \in (0, 1)$, $a = \frac{1}{4}(t-1)^2 - 1 - \ln t = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t - \ln t - \frac{3}{4}$,

设 $h(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t - \ln t - \frac{3}{4} (0 < t < 1)$, 则 $h'(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - t - 2}{2t} = \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}{2t} < 0$,

所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数,

则 $h(t) > h(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -1$, 所以 $a > -1$,

所以实数 a 的取值范围是 $(-1, +\infty)$,

故选: B.

【点睛】

方法点睛：求曲线过点 $A(a,b)$ 的切线的方程的一般步骤是：

- (1) 设切点 $P(x_0, f(x_0))$
- (2) 求出 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ ，即 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率；
- (3) 构建关系 $f'(x_0) = \frac{f(x_0)-b}{x_0-a}$ 解得 x_0 ；
- (4) 由点斜式求得切线方程 $y-b=f'(x_0) \cdot (x-a)$ 。

例 24. (2023·全国·高三专题练习) 已知曲线 $C_1: f(x)=e^x+a$ 和曲线

$C_2: g(x)=\ln(x+b)+a^2 (a, b \in \mathbf{R})$ ，若存在斜率为 1 的直线与 C_1, C_2 同时相切，则 b 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$

答案：D

【解析】

分析：

分别求出两函数的导函数，再分别设直线与两曲线的切点的横坐标，由于斜率为 1 即导数值为 1 分别求出切点横坐标，可得切线方程，再根据切线方程系数相等得 b 与 a 的关系式，再根据二次函数性质可求出 b 的取值范围。

【详解】

$f'(x)=e^x$ ， $g'(x)=\frac{1}{x+b}$ ，设斜率为 1 的切线在 C_1, C_2 上的切点横坐标分别为 x_1, x_2 ，

由题知 $e^{x_1} = \frac{1}{x_2+b} = 1$ ， $\therefore x_1 = 0, x_2 = 1-b$ ，

两点处的切线方程分别为 $y-(1+a)=x$ 和 $y-a^2=x-(1-b)$ ，

故 $a+1=a^2-1+b$ ，即 $b=2+a-a^2=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$ 。

故选：D。

例 25. (2023·江苏·南京外国语学校模拟预测) 若两曲线 $y=x^2-1$ 与 $y=a\ln x-1$ 存在公切线，则正实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(0, 2e]$ B. $(0, e]$ C. $[2e, +\infty)$ D. $(e, 2e]$

答案：A

【解析】

分析：

分别求出导数，设出切点，得到切线方程，再由两点的斜率公式，结合切点满足曲线方程，运用导数求的单调区间、极值、最值即可得出 a 的取值范围。

【详解】

设 $A(x_1, x_1^2 - 1), B(x_2, a \ln x_2 - 1), y_1' = 2x, y_2' = \frac{a}{x}, k_1 = 2x_1, k_2 = \frac{a}{x_2}$

切线: $y - (x_1^2 - 1) = 2x_1(x - x_1)$, 即 $y = 2x_1x - x_1^2 - 1$

切线: $y - (a \ln x_2 - 1) = \frac{a}{x_2}(x - x_2)$, 即 $y = \frac{a}{x_2}x - a + a \ln x_2 - 1$,

$$\therefore \begin{cases} 2x_1 = \frac{a}{x_2} \\ -x_1^2 - 1 = -a + a \ln x_2 - 1 \end{cases}, \therefore a = 4x_2^2(1 - \ln x_2)$$

令 $f(x) = 4x^2(1 - \ln x), f'(x) = 8x(1 - \ln x) + 4x^2\left(-\frac{1}{x}\right)$

$$= 8x - 8x \ln x - 4x = 4x - 8x \ln x = 4x(1 - 2 \ln x) = 0, x = \sqrt{e}$$

$f(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增, 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f(\sqrt{e}) = 2e, \therefore a \in (0, 2e]$.

故选: A.

例 26. (2023·河南·南阳中学高三阶段练习(理)) 若直线 $y = k_1(x+1) - 1$ 与曲线 $y = e^x$ 相切,

直线 $y = k_2(x+1) - 1$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切, 则 $k_1 k_2$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. e D. e^2

答案: B

【解析】

分析:

设出切点, 求出 $k_1 = e^{x_1}, k_2 = \frac{1}{x_2}$, 根据斜率列出方程, 得到 $x_1 e^{x_1} = 1, x_2 \ln x_2 = 1$, 构造

$f(x) = x \ln x$, 利用函数单调性和图象特征, 求出 $x_2 = e^{x_1}$, 从而求出答案.

【详解】

设直线 $f = k_1(x+1) - 1$ 与曲线 $y = e^x$ 相切于点 (x_1, e^{x_1}) ,

直线 $y = k_2(x+1) - 1$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切于点 $(x_2, \ln x_2)$,

则 $k_1 = e^{x_1}$, 且 $k_1 = \frac{e^{x_1} + 1}{x_1 + 1}$, 所以 $x_1 e^{x_1} = 1$,

$k_2 = \frac{1}{x_2}$, 且 $k_2 = \frac{\ln x_2 + 1}{x_2 + 1}$, 所以 $x_2 \ln x_2 = 1$,

令 $f(x) = x \ln x, f'(x) = 1 + \ln x$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/596040243100010135>