专题 04 基本不等式及其应用

【考点预测】

1.基本不等式

如果 $a>0$，$b>0$，那么 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．其中，$\frac{a+b}{2}$ 叫作 a，b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 叫作 a，b 的几何平均数．即正数 a，b 的算术平均数不小于它们的几何平均数．

基本不等式 1： 若 a，$b\in R$，则 $a^2+b^2\ge 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时取等号；

基本不等式 2： 若 a，$b\in R^+$，则 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ （或 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$），当且仅当 $a=b$ 时取等号.

注意（1）基本不等式的前提是“一正”“二定”“三相等”；其中“一正”指正数，“二定”指求最值时和或积为定值，“三相等”指满足等号成立的条件.（2）连续使用不等式要注意取得一致.

【方法技巧与总结】

1.几个重要的不等式

（1）$a^2\ge 0\left(a\in R\right),\sqrt{a}\ge 0\left(a\ge 0\right),\left|a\right|\ge 0\left(a\in R\right).$

（2）基本不等式：如果 $a,b\in R^+$，则 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (当且仅当“$a=b$”时取“=”).

特例：$a>0,a+\frac{1}{a}\ge 2;\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$（$a,b$ 同号）.

（3）其他变形：

①$a^2+b^2\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{2}$ (沟通两和 $a+b$ 与两平方和 a^2+b^2 的不等关系式)

②$ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$ (沟通两积 ab 与两平方和 a^2+b^2 的不等关系式)

③$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (沟通两积 ab 与两和 $a+b$ 的不等关系式)

④重要不等式串：$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left(a,b\in R^+\right)$ 即

调和平均值≤几何平均值≤算数平均值≤平方平均值(注意等号成立的条件).

2.均值定理

已知 $x,y\in R^+$.

（1）如果 $x+y=S$ (定值)，则 $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{S^2}{4}$ (当且仅当“$x=y$

”时取“=”).即“和为定值，积有最大值”.

（2）如果 $xy=P$ (定值)，则 $x+y\geq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{P}$ (当且仅当“ $x=y$ ”时取“=”).即积为定值，和有最小值”.

3.常见求最值模型

模型一：$mx+\frac{n}{x}\geq 2\sqrt{mn}(m>0,n>0)$，当且仅当 $x=\sqrt{\frac{n}{m}}$ 时等号成立；

模型二：$mx+\frac{n}{x-a}=m(x-a)+\frac{n}{x-a}+ma\geq 2\sqrt{mn}+ma(m>0,n>0)$，当且仅当 $x-a=\sqrt{\frac{n}{m}}$ 时等号成立；

模型三：$\frac{x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{ax+b+\frac{c}{x}}\leq\frac{1}{2\sqrt{ac}+b}(a>0\,,c>0)$，当且仅当 $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$ 时等号成立；

模型四：$x(n-mx)=\frac{mx(n-mx)}{m}\leq\frac{1}{m}\cdot(\frac{mx+n-mx}{2})^2=\frac{n^2}{4m}(m>0,n>0,0<x<\frac{n}{m})$，当且仅当 $x=\frac{n}{2m}$ 时等号成立.

【题型归纳目录】

题型一：基本不等式及其应用

题型二：直接法求最值

题型三：常规凑配法求最值

题型四：消参法求最值

题型五：双换元求最值

题型六：“1”的代换求最值

题型七：齐次化求最值

题型八：利用基本不等式证明不等式

题型九：利用基本不等式解决实际问题

【典例例题】

题型一：基本不等式及其应用

例 1．（2023·宁夏·银川一中二模（理））下列不等式恒成立的是（　　）

A．$x+\frac{1}{x}\geq 2$　　B．$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

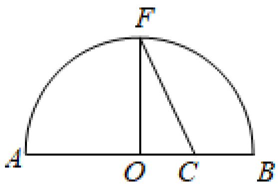
C．$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq\frac{a^2+b^2}{2}$　　D．$a^2+b^2\geq 2ab$

例 2．（2023·黑龙江·哈九中三模（理））已知 x，y 都是正数，且 $x\neq y$，则下列选项不恒成立的是（　　）

A．$\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$　　B．$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2$

C．$\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}$　　D．$xy+\frac{1}{xy}>2$

例 3．（2023·江苏·高三专题练习）《几何原本》卷 2 的几何代数法（以几何方法研究代数问题）成了后世西方数学家处理问题的重要依据，通过这一原理，很多的代数的公理或定理都能够通过图形实现证明，也称之为无字证明．现有如图所示图形，点 F 在半圆 O 上，点 C 在直径 AB 上，且 $OF\perp AB$，设 $AC=a$，$BC=b$，则该图形可以完成的无字证明为（　　）



A．$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}(a>0,b>0)$　　B．$a^2+b^2\geq 2\sqrt{ab}(a>0,b>0)$

C．$\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}(a>0,b>0)$　　D．$\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a>0,b>0)$

例 4．（2023·黑龙江·哈尔滨三中高三阶段练习（文））下列不等式中一定成立的是（　　）

A．$\frac{1}{x^2+1}>1\left(x\in\mathbf{R}\right)$　　B．$\sin x+\frac{1}{\sin x}>2\left(x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$

C．$\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)>\ln x(x>0)$　　D．$x^2+1\geq 2|x|\left(x\in\mathbf{R}\right)$

（多选题）例 5．（2023·全国·高三专题练习）下列函数中最小值为 6 的是（　　）

A．$y=\ln x+\frac{9}{\ln x}$　　B．$y=6|\sin x|+\frac{3}{2|\sin x|}$

C．$y=3^x+3^{2-x}$　　D．$y=\frac{x^2+25}{\sqrt{x^2+16}}$

（多选题）例 6．（2023·江苏·扬州中学高三开学考试）设 $a>0$，$b>0$，下列结论中正确的是（　　）

A．$(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\geq 9$　　B．$a^2+b^2\geq 2(a+b+1)$

C．$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geq a+b$　　D．$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\sqrt{ab}$

【方法技巧与总结】

熟记基本不等式成立的条件，合理选择基本不等式的形式解题，要注意对不等式等号是否成立进行验证.

题型二：直接法求最值

例 7．（2023·全国·模拟预测（文））若实数 a，b 满足 $a+b=1$，则 ab 的最大值为（　　）

A．2　　B．1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

例 8．（2023·甘肃酒泉·模拟预测（理））若 x，y 为实数，且 $x+2y=6$，则 3^x+9^y 的最小值为（　　）

A．18　　B．27　　C．54　　D．90

例 9．（2023·河南河南·三模（理））已知二次函数 $f(x)=ax^2+2x+c$（$x\in\mathbf{R}$）的值域为 $[0,+\infty)$，则 $\frac{1}{c}+\frac{4}{a}$ 的最小值为（　　）

A．-4　　B．4　　C．8　　D．-8

例 10．（2023·湖北十堰·三模）函数 $f(x)=16^x+\frac{1}{4^x}+\frac{1}{2^{x-1}}$ 的最小值为（　　）

A．4　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．$4\sqrt{2}$

（多选题）例 11．（2023·广东·汕头市潮阳区河溪中学高三阶段练习）已知 a，b 是两个正数，4 是 2^a 与 16^b 的等比中项，则下列说法正确的是（　　）

A．ab 的最小值是 1　　B．ab 的最大值是 1

C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值是 $\frac{9}{4}$　　D．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最大值是 $\frac{9}{2}$

例 12．（2023·四川·广安二中二模（文））若 $a,b\in\mathrm{R}^+$，且 $\frac{1}{a}+b=1$，则 $\frac{2b}{a}$ 的最大值是__________.

例 13．（2023·全国·高三专题练习）已知正数 x、y 满足 $x+\frac{1}{4y}=2$，则 $\frac{y}{x}$ 的最小值是__________.

【方法技巧与总结】

直接利用基本不等式求解，注意取等条件.

题型三：常规凑配法求最值

例 14．（2023·全国·高三专题练习（理））若 $-1<x<1$ ，则 $y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$ 有（　　）

A．最大值 -1　　B．最小值 -1　　C．最大值 1　　D．最小值 1

例 15．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=3x+\frac{1}{x-1}\ (x>1)$ 的最小值是（　　）

A． 4　　B． $2\sqrt{3}-3$

C． $2\sqrt{3}$　　D． $2\sqrt{3}+3$

例 16．（2023·全国·高三专题练习）若 $x>0$， $y>0$ 且 $x+y=xy$，则 $\frac{x}{x-1}+\frac{2y}{y-1}$ 的最小值为（　　）

A．3　　B． $\frac{5}{2}+\sqrt{6}$　　C． $3+\sqrt{6}$　　D． $3+2\sqrt{2}$

例 17．（2023·上海·高三专题练习）若 $x>1$，则函数 $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ 的最小值为___________.

例 18．（2023·江苏·常州市北郊高级中学高一阶段练习）已知 $xy=1$，且 $0<y<\frac{1}{2}$，则 $\frac{x-4y}{x^2+16y^2}$ 最大值为______.

例 19．（2023·全国·高三专题练习）（1）求函数 $y=x+\frac{4}{x-1}\left(x>1\right)$ 的最小值及此时 x 的值；

（2）已知函数 $y=\frac{x^2+5x+10}{x+2}$， $x\in\left(-2,+\infty\right)$，求此函数的最小值及此时 x 的值.

【方法技巧与总结】

1．通过添项、拆项、变系数等方法凑成和为定值或积为定值的形式.

2．注意验证取得条件.

题型四：消参法求最值

例 20．（2023·浙江绍兴·模拟预测）若直线 $ax-by-3=0(a>0,b>0)$ 过点 $(1,-1)$，则 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}$

的最大值为___________.

例 21．（2023·全国·高三专题练习）设正实数x，y，z满足$x^2-3xy+4y^2-z=0$，则当$\frac{xy}{z}$取得最大值时，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$的最大值为（　　）

A．0　　　　B．3　　　　C．$\frac{9}{4}$　　　　D．1

例 22．（2023·全国·高三专题练习（理））已知正实数a，b满足$ab+2a-2=0$，则$4a+b$的最小值是（　　）

A．2　　　　B．$4\sqrt{2}-2$　　　　C．$4\sqrt{3}-2$　　　　D．6

例 23．（2023·浙江·高三专题练习）若正实数a，b满足$b+3a=2ab$，则$\frac{a+b}{ab^2}$的最大值为______.

例 24．（2023·全国·高三专题练习）若$x,y\in R^+$，$(x-y)^2=(xy)^3$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为___________.

例 25．（2023·浙江绍兴·模拟预测）若$a>0,b>0,4a^2+b^2-2ab=2$，则$\frac{ab+1}{2a+b}$的取值范围是_________.

【方法技巧与总结】

消参法就是对应不等式中的两元问题，用一个参数表示另一个参数，再利用基本不等式进行求解.解题过程中要注意“一正，二定，三相等”这三个条件缺一不可！

题型五：双换元求最值

例 26．（2023·浙江省江山中学高三期中）设$a>0$，$b>0$，若$a^2+b^2-\sqrt{3}ab=1$，则$\sqrt{3}a^2-ab$的最大值为（　　）

A．$3+\sqrt{3}$　　　　B．$2\sqrt{3}$　　　　C．$1+\sqrt{3}$　　　　D．$2+\sqrt{3}$

例 27．（2023·天津南开·一模）若$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c=2$，则$\frac{4}{a+b}+\frac{a+b}{c}$的最小值为______.

例 28．（2023·天津市蓟州区第一中学一模）已知x＋y＝1，y＞0，x＞0，则$\frac{1}{2x}+\frac{x}{y+1}$的最小值为____________.

例 29．（2023·全国·高三专题练习）已知$a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，则$\frac{1}{3a+4b}+\frac{1}{a+3b}$取到最小值为 ________.

例 30．（2023·全国·高三专题练习）若$x,y\in R^+$，且$x+2y=1$，则$\frac{x^2}{x+1}+\frac{2y^2}{y+2}$的最小值为_________

例 31．（2023·全国·高三专题练习）若正实数x，y满足$2x+y=2$，则$\frac{4x^2}{y+1}+\frac{y^2}{2x+2}$的最小值是__________.

【方法技巧与总结】

若题目中含是求两个分式的最值问题，对于这类问题最常用的方法就是双换元，分布运用两个分式的分母为两个参数，转化为这两个参数的不等关系.

1．代换变量，统一变量再处理.

2．注意验证取得条件.

题型六："1"的代换求最值

例 32．（2023·辽宁·模拟预测）已知正实数 x，y 满足 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $4xy-3x-6y$ 的最小值为（　　）

A．2　　B．4　　C．8　　D．12

例 33．（2023·河南·鹤壁高中模拟预测（文））设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{2013}=2013$，则 $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{2012}}$ 的最小值为（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

例 34．（2023·安徽·南陵中学模拟预测（理））若实数 a，b 满足 $2a+b=3\left(a>\frac{1}{2},b>1\right)$，则 $\frac{2a}{2a-1}+\frac{b}{b-1}$ 的最小值为（　　）

A．6　　B．4　　C．3　　D．2

例 35．（2023·安徽·南陵中学模拟预测（文））已知 $a>0,b>0,6a+\frac{2}{b}=1$，则 $\frac{1}{2a}+6b$ 的最小值为（　　）

A．13　　B．19　　C．21　　D．27

例 36．（2023·四川·石室中学三模（文））已知 $a>0$，$b>0$ 且 $a+b=1$，则 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{8}{b}\right)$ 的最小值是(　　)

A．49　　B．50　　C．51　　D．52

例 37．（2023·河南·宝丰县第一高级中学模拟预测（文））已知正数 a，b 满足 $ab-a-b=0$，则 $4a+b$ 的最小值为__________.

例 38．（2023·天津·南开中学模拟预测）设 $x>0$，$y>0$，$x+y=1$，则 $\frac{x^2+1}{2xy}$ 的最小值为______.

例 39．（2023·新疆阿勒泰·三模（理））函数 $y=a^{x-1}+1$ 图象过定点 A，点 A 在直线 $mx+ny=3(m>1,n>0)$ 上，则 $\frac{1}{m-1}+\frac{2}{n}$ 最小值为__________.

【方法技巧与总结】

1 的代换就是指凑出 1，使不等式通过变形出来后达到运用基本不等式的条件，即积为定值，凑的过程中要特别注意等价变形.

1．根据条件，凑出"1"，利用乘"1"法.

2．注意验证取得条件.

题型七：齐次化求最值

例 40．（2023·全国·高三专题练习）已知 $a>0,b>0$，满足 $3a^2b^2-2a^2-3b^2+9=0,$ 则 $\frac{3b}{a}+\frac{2a}{b}$ 的最小值是（　　）

A．$2\sqrt{6}$　　　　B．$4\sqrt{3}$　　　　C．$4\sqrt{6}$　　　　D．$6\sqrt{3}$

例 41．（2023·浙江嘉兴·二模）已知函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}(a<b)$ 的定义域为 R，则 $\frac{b-a}{a+2b+4c}$ 的最大值是

__________.

例 42．（2023·全国·高三专题练习（理））若 a，b，c 均为正实数，则 $\frac{ab+bc}{a^2+2b^2+c^2}$ 的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{1}{4}$　　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 43．（2023·全国·高三专题练习）已知三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a<b)$ 在 R 上单调递增，则 $\frac{a+b+c}{b-a}$ 最小值为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{6}+5}{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{6}+5}{3}$　　　　C．$\frac{7+\sqrt{5}}{2}$　　　　D．$\frac{2\sqrt{7}+5}{3}$

例 44．（2023·天津·高三专题练习）已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=1$，则 $\frac{1}{b}+\frac{b}{2a+b}$ 的最小值为

___________.

例 45．（2023·浙江·高三专题练习）已知 x，y，z 为正实数，且 $x+2y-4z=0$，则 $\frac{xy}{z^2}$ 的最大值为______.

例 46．（2023·全国·高三专题练习）若 $x>0,y>0$ 且 $\log_2 3^x+\log_2 9^y=\log_4 81$，则 $\frac{4}{x}+\frac{x+3y}{3y}$ 的最小值为

__________.

【方法技巧与总结】

齐次化就是含有多元的问题，通过分子、分母同时除以得到一个整体，然后转化为运用基本不等式进行求解.

题型八：利用基本不等式证明不等式

例 47．（2023·安徽·马鞍山二中模拟预测（理））已知 $a>0$，$b>0$.

(1)若 $2a+b=1$，证明：$\frac{23}{48}\le a+3b^2<3$；

(2)若 $2a+b=ab$，证明：$4a+b+ab\ge 10+4\sqrt{6}$.

例 48．（2023·陕西渭南·二模（文））设函数 $f\left(x\right)=\left|x+1\right|-\left|2x-4\right|$．

(1)求不等式 $f\left(x\right)\geq 2x-3$ 的解集．

(2)若 $f\left(x\right)$ 的最大值为 $a^2+b^2+c^2$，证明：$ab+bc+ca\leq 3$．

例 49．（2023·全国·高三专题练习）已知正数 a，b，c 满足 $a+b+c=3$．

(1)求 abc 的最大值；

(2)证明：$a^3b+b^3c+c^3a\geq 3abc$．

例 50．（2023·安徽省芜湖市教育局高三期末（理））设 a，b，c 为正实数，且 $a+b+c=1$.证明：

(1) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\geq\dfrac{9}{2}$；

(2) $a^3+b^3+c^3\geq\dfrac{ab+bc+ca-3abc}{2}$．

例 51．（2023·河南洛阳·一模（文））已知 a，b，c 都是正数.

(1)证明：$a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$；

(2)若 $a+b+c=3$，证明：$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\geq\dfrac{3}{2}$.

【方法技巧与总结】

类似于基本不等式的结构的不等式的证明可以利用基本不等式去组合、分解、运算获得证明.

题型九：利用基本不等式解决实际问题

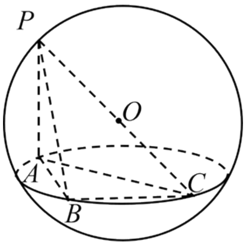
例 51．（2023·全国·高三专题练习（理））设计用 $32m^2$ 的材料制造某种长方体形状的无盖车厢，按交通部门的规定车厢宽度为 $2m$，则车厢的最大容积是（　　）

A．（$38-3\sqrt{73}$）m^3　B．$16\ m^3$　C．$4\sqrt{2}\ m^3$　D．$14\ m^3$

例 53．（2023·全国·高三专题练习）如图，将一矩形花坛 $ABCD$ 扩建成一个更大的矩形花坛 $AMPN$，要求点 B 在 AM 上，点 D 在 AN 上，且对角线 MN 过点 C，已知 $AB=4$，$AD=3$，那么当 $BM=$

_______时，矩形花坛的 $AMPN$ 面积最小，最小面积为______.

例 54．（2023·全国·高二课时练习）根据不同的程序，3D 打印既能打印实心的几何体模型，也能打印空心的几何体模型．如图所示的空心模型是体积为 $\frac{17\sqrt{17}}{6}\pi cm^3$ 的球挖去一个三棱锥 $P-ABC$ 后得到的几何体，其中 $PA \perp AB$， $BC \perp$ 平面 PAB， $BC = 1cm$．不考虑打印损耗，求当用料最省时，AC 的长．



例 55．（2023·全国·高三课时练习）为响应国家扩大内需的政策，某厂家拟在 2019 年举行促销活动，经调查测算，该产品的年销量(即该厂的年产量)x 万件与年促销费用 t(t≥0)万元满足 $x = 4 - \frac{k}{2t+1}$ (k 为常数)．如果不搞促销活动，则该产品的年销量只能是 1 万件．已知 2019 年生产该产品的固定投入为 6 万元，每生产 1 万件该产品需要再投入 12 万元，厂家将每件产品的销售价格定为每件产品平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分)．

(1)将该厂家 2019 年该产品的利润 y 万元表示为年促销费用 t 万元的函数；

(2)该厂家 2019 年的年促销费用投入多少万元时厂家利润最大？

【方法技巧与总结】

1．理解题意，设出变量，建立函数模型，把实际问题抽象为函数的最值问题．

2．注意定义域，验证取得条件．

3.注意实际问题隐藏的条件，比如整数，单位换算等．

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·甘肃省武威第一中学模拟预测（文））已知点 E 是 $\triangle ABC$ 的中线 BD 上的一点（不包括端点）．若 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为（　　）

A．4　　B．6　　C．8　　D．9

2．（2023·河南安阳·模拟预测（文））已知 a,b 为正实数，且 $a+b=6+\frac{1}{a}+\frac{9}{b}$，则 $a+b$ 的最小值为（　　）

A．6　　B．8　　C．9　　D．12

3．（2023·安徽马鞍山·三模（理））若 $a>0$，$b>0$，$\lg a+\lg b=\lg(a+3b)$，则 $a+b$ 的最小值为（　　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．$4+2\sqrt{3}$　　C．6　　D．$3+3\sqrt{3}$

4．（2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习）已知 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 为平面的单位向量，且其夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，若 $\left|2x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\right|=\sqrt{2}\left(x,y\in\mathbf{R}\right)$，则 $2x+y$ 的最大值为（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$-\sqrt{3}$　　D．$-2\sqrt{3}$

5．（2023·天津红桥·一模）设 $a>0$，$b>1$，若 $a+b=2$，则 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b-1}$ 的最小值为（　　）

A．6　　B．9　　C．$3\sqrt{2}$　　D．18

6．（2023·山西运城·模拟预测（理））已知等比数列$\{a_n\}$的公比为q，且$a_5=1$，则下列选项不正确的是（　　）

A．$a_3+a_7\geq 2$　　B．$a_4+a_6\geq 2$　　C．$a_7-2a_6+1\geq 0$　　D．$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_9}=a_1+a_9$

7．（2023·河南·鹤壁高中模拟预测（文））已知a，$b\in\mathrm{R}$，满足$\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b=1$，则下列错误的是（　　）

A．$a+b\leq -2\ln 2$　　B．$\mathrm{e}^a+b<0$

C．$ab\geq 1$　　D．$2\left(\mathrm{e}^{2a}+\mathrm{e}^{2b}\right)\geq 1$

8．（2023·河北保定·二模）已知a，$b\in(0,+\infty)$，且$a^2+3ab+4b^2=7$，则$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$的最大值为（　　）

A．2　　B．3　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

二、多选题

9．（2023·河北张家口·三模）已知$x,y\in\mathbf{R}_+$，$x+y=m$（m是常数），则下列结论正确的是（　　）

A．若$\frac{1}{x}+\frac{4}{y+1}$的最小值为$m+1$，则$m=3$

B．若$x(y+1)$的最大值为4，则$m=3$

C．若$\sqrt{x}+\sqrt{y}$的最大值为m，则$m=2$

D．若$m=4$，则$\frac{y^2+9}{x}$的最小值为2

10．（2023·河北·模拟预测）已知$a>0,b>0,a^2+b^2=2$，则以下不等式成立的是（　　）

A．$a+b>2$　　B．$a^3+b^3\geq 2$　　C．$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4$ D．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2$

11．（2023·山东菏泽·二模）设a，b为两个正数，定义a，b的算术平均数为$A(a,b)=\frac{a+b}{2}$，几何平均数为$G(a,b)=\sqrt{ab}$．上个世纪五十年代，美国数学家D．H. Lehmer提出了“Lehmer均值”，即$L_p(a,b)=\frac{a^p+b^p}{a^{p-1}+b^{p-1}}$，其中$p$为有理数．下列结论正确的是（　　）

A．$L_{0.5}(a,b)\leq L_1(a,b)$　　B．$L_0(a,b)\leq G(a,b)$

C．$L_2(a,b)\leq A(a,b)$　　D．$L_{n+1}(a,b)\leq L_n(a,b)$

12．（2023·湖北·荆门市龙泉中学二模）已知函数$f(x)=|\log_2 x|$，且正实数a，b满足$f(a)+f(b)=1$，则下列结论可能成立的是（　　）

A．$a=2b$　　B．$2^{1-a}+2^{1-b}$的最大值为$\frac{3}{2}$

C．$ab=2$　　D．$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$的最小值为$2\sqrt{2}$

三、填空题

13．（2023·黑龙江齐齐哈尔·三模（理））已知正实数 x，y 满足 $e^{1-2y}=(x+2y)e^{x}$，则 $y+\frac{2y^2}{x}+\frac{x}{y}$ 的最小值为__________.

14．（2023·吉林·模拟预测（理））已知 $x>2$，则 $\frac{4}{x-2}+x$ 的最小值是______.

15．（2023·重庆·三模）已知 $a>0$，$b>0$，且 $a^2b+3ab^2=3a+b$，则 $a+3b$ 的最小值为___________.

16．（2023·浙江·模拟预测）已知正实数 x，y 满足：$x^2+xy+\frac{2x}{y}=2$，则 $3x+2y+\frac{2}{y}$ 的最小值为_________.

四、解答题

17．（2023·江西·二模（理））已知函数 $f(x)=|2x+6|+|x-3|$.

(1)解不等式 $f(x)\geq 10$ 的解集；

(2)设 $g(x)=f(x)-|x+3|$ 到的最小值为 t，若正数 m，n 满足 $2m+n=t$，求 $\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{n+1}$ 的最小值.

18．（2023·江西南昌·三模（理））已知函数 $f(x)=|x-2|+|x-4|$，已知不等式 $f(x)\geq kx(k>0)$ 恒成立.

(1)求 k 的最大值 k_0；

(2)设 $a>0$，$b>0$，求证：$\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{2a+b}\geq\frac{1}{3k_0}$.

19．（2023·江西九江·三模（文））设函数 $f(x)=|x-a|(a\in\mathbf{R})$.

(1)若关于 x 的不等式 $f(x)+f(2-x)\geq 4$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(2)在平面直角坐标系 xOy 中，$f(x)+f(y)\leq 1$ 所围成的区域面积为 S，若正数 b，c，d 满足 $(b+d)(c+d)=S$，求 $b+2c+3d$ 的最小值.

20．（2023·陕西·模拟预测（理））设函数 $f(x)=\left|x-\frac{a}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{a}\right|-4x\ (a>0)$

(1)当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\leq\frac{5}{2}$ 的解集；

(2)已知不等式$f\left(x\right)\geq\left|x+\frac{1}{a}\right|$的解集为$\left\{x\mid x\leq1\right\}$，$m>0$，$n>0$，$m+n=a$，求$\frac{2}{m}+\frac{8}{n}$的最小值.

21．（2023·河南·模拟预测（文））设a，b为正数，且$a+b=1$．证明：

(1)$a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(2)$\left(a^2+b\right)\left(b^2+a\right)>a^2$．

22．（2023·云南昆明·模拟预测（理））设a，b，c均为正数，且$a+b+c=1$．

(1)求$\frac{1}{a}+\frac{4}{b+c}$的最小值；

(2)证明：$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}\leqslant\sqrt{6}$．

专题 04 基本不等式及其应用

【考点预测】

1.基本不等式

如果$a>0$，$b>0$，那么$\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$，当且仅当$a=b$时，等号成立．其中，$\dfrac{a+b}{2}$叫作$a$，$b$的算术平均数，$\sqrt{ab}$叫作$a$，$b$的几何平均数．即正数$a$，$b$的算术平均数不小于它们的几何平均数．

基本不等式 1：若a，$b\in R$，则$a^2+b^2\ge 2ab$，当且仅当$a=b$时取等号；

基本不等式 2：若a，$b\in R^+$，则$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$（或$a+b\ge 2\sqrt{ab}$），当且仅当$a=b$时取等号.

注意（1）基本不等式的前提是“一正”“二定”“三相等”；其中“一正”指正数，“二定”指求最值时和或积为定值，“三相等”指满足等号成立的条件.（2）连续使用不等式要注意取得一致.

【方法技巧与总结】

1.几个重要的不等式

（1）$a^2\ge 0\left(a\in R\right),\sqrt{a}\ge 0\left(a\ge 0\right),|a|\ge 0\left(a\in R\right)$.

（2）基本不等式：如果$a,b\in R^+$，则$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (当且仅当“$a=b$”时取“=”).

特例：$a>0,a+\dfrac{1}{a}\ge 2;\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$（$a,b$同号）.

（3）其他变形：

①$a^2+b^2\ge\dfrac{\left(a+b\right)^2}{2}$ (沟通两和$a+b$与两平方和a^2+b^2的不等关系式)

②$ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$ (沟通两积ab与两平方和a^2+b^2的不等关系式)

③$ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ (沟通两积ab与两和$a+b$的不等关系式)

④重要不等式串：$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\left(a,b\in R^+\right)$即

调和平均值≤几何平均值≤算数平均值≤平方平均值(注意等号成立的条件).

2.均值定理

已知$x,y\in R^+$.

（1）如果 $x+y=S$（定值），则 $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{S^2}{4}$（当且仅当“$x=y$”时取“=”）.即“和为定值，积有最大值”.

（2）如果 $xy=P$（定值），则 $x+y \ge 2\sqrt{xy}=2\sqrt{P}$（当且仅当“$x=y$”时取“=”）.即积为定值，和有最小值”.

3.常见求最值模型

模型一：$mx+\frac{n}{x}\ge 2\sqrt{mn}(m>0,n>0)$，当且仅当 $x=\sqrt{\frac{n}{m}}$ 时等号成立；

模型二：$mx+\frac{n}{x-a}=m(x-a)+\frac{n}{x-a}+ma\ge 2\sqrt{mn}+ma(m>0,n>0)$，当且仅当 $x-a=\sqrt{\frac{n}{m}}$ 时等号成立；

模型三：$\frac{x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{ax+b+\frac{c}{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{ac}+b}(a>0,c>0)$，当且仅当 $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$ 时等号成立；

模型四：$x(n-mx)=\frac{mx(n-mx)}{m}\le\frac{1}{m}\cdot(\frac{mx+n-mx}{2})^2=\frac{n^2}{4m}(m>0,n>0,0<x<\frac{n}{m})$，当且仅当 $x=\frac{n}{2m}$ 时等号成立.

【题型归纳目录】

题型一：基本不等式及其应用

题型二：直接法求最值

题型三：常规凑配法求最值

题型四：消参法求最值

题型五：双换元求最值

题型六：“1”的代换求最值

题型七：齐次化求最值

题型八：利用基本不等式证明不等式

题型九：利用基本不等式解决实际问题

【典例例题】

题型一：基本不等式及其应用

例 1.（2023·宁夏·银川一中二模（理））下列不等式恒成立的是（　　）

A. $x+\frac{1}{x}\geq 2$

B. $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

C. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq\frac{a^2+b^2}{2}$

D. $a^2+b^2\geq 2ab$

答案：D

【解析】

分析：

根据不等式成立的条件依次判断各选项即可得答案.

【详解】

解：对于 A 选项，当$x<0$时，不等式显然不成立，故错误；

对于 B 选项，$a+b\geq 2\sqrt{ab}$成立的条件为$a\geq 0,b\geq 0$，故错误；

对于 C 选项，当$a=-b\neq 0$时，不等式显然不成立，故错误；

对于 D 选项，由于$a^2+b^2-2ab=\left(a-b\right)^2\geq 0$，故$a^2+b^2\geq 2ab$，正确.

故选：D

例 2.（2023·黑龙江·哈九中三模（理））已知x，y都是正数，且$x\neq y$，则下列选项不恒成立的是（　　）

A. $\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$

B. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2$

C. $\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}$

D. $xy+\frac{1}{xy}>2$

答案：D

【解析】

分析：

根据基本不等式判断.

【详解】

x，y都是正数，

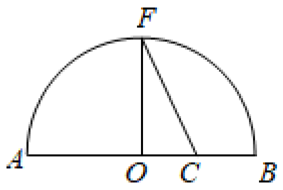
由基本不等式，$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$，$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2$，$\frac{2xy}{x+y}\leqslant\frac{2xy}{2\sqrt{xy}}=\sqrt{xy}$，这三个不等式都是当且仅当$x=y$时等号成立，而题中$x\neq y$，因此等号都取不到，所以 ABC 三个不等式恒成立；

$xy+\frac{1}{xy}\geq 2$中当且仅当$xy=1$时取等号，如$x=\frac{1}{2},y=2$即可取等号，D 中不等式不恒成立.

故选：D.

例 3.（2023·江苏·高三专题练习）《几何原本》卷 2 的几何代数法（以几何方法研究代数问题）成了后世西方数学家处理问题的重要依据，通过这一原理，很多的代数的公理或定理都能够通过图形实现证明，也称之为无字证明．现有如图所示图形，点F在半圆O上，点C

在直径 AB 上，且 $OF \perp AB$，设 $AC=a$， $BC=b$，则该图形可以完成的无字证明为（　　）



A. $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}(a>0,b>0)$　　B. $a^2+b^2 \geq 2\sqrt{ab}(a>0,b>0)$

C. $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}(a>0,b>0)$　　D. $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}(a>0,b>0)$

答案：D

【解析】

分析：

设 $AC=a,BC=b$，得到 $r=OF=\dfrac{a+b}{2}$， $OC=\dfrac{a-b}{2}$，在直角 $\triangle OCF$ 中，利用勾股定理，求得 $FC^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$，结合 $FO \leq FC$，即可求解.

【详解】

设 $AC=a,BC=b$，可得圆 O 的半径为 $r=OF=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a+b}{2}$，

又由 $OC=OB-BC=\dfrac{a+b}{2}-b=\dfrac{a-b}{2}$，

在直角 $\triangle OCF$ 中，可得 $FC^2=OC^2+OF^2=(\dfrac{a-b}{2})^2+(\dfrac{a+b}{2})^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$，

因为 $FO \leq FC$，所以 $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

故选：D.

例 4.（2023·黑龙江·哈尔滨三中高三阶段练习（文））下列不等式中一定成立的是（　　）

A. $\dfrac{1}{x^2+1}>1\left(x \in \mathbf{R}\right)$　　B. $\sin x+\dfrac{1}{\sin x}>2\left(x \neq k\pi,k \in \mathbf{Z}\right)$

C. $\ln\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)>\ln x(x>0)$　　D. $x^2+1 \geq 2|x|\left(x \in \mathbf{R}\right)$

答案：D

【解析】

分析：

由 $x^2+1 \geq 1$ 得 $\dfrac{1}{x^2+1}$

的范围可判断 A；利用基本不等式求最值注意满足一正二定三相等可判断 B；作差比较 $x^2+\frac{1}{4}$ 与 x 的大小可判断 C；作差比较 x^2+1 与 $2|x|$ 的大小可判断 D.

【详解】

因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $x^2+1\geq 1$，所以 $0<\frac{1}{x^2+1}\leq 1$，故 A 错误；

$\sin x+\frac{1}{\sin x}\geq 2$ 只有在 $\sin x>0$ 时才成立，故 B 错误；

因为 $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$，所以 $x^2+\frac{1}{4}\geq x$，所以 $\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\geq \ln x$，故 C 错误；

因为 $x^2+1-2|x|=(|x|-1)^2\geq 0$，所以 $x^2+1\geq 2|x|$，故 D 正确.

故选：D.

（多选题）例 5．（2023·全国·高三专题练习）下列函数中最小值为 6 的是（　　）

A．$y=\ln x+\frac{9}{\ln x}$　　　　B．$y=6|\sin x|+\frac{3}{2|\sin x|}$

C．$y=3^x+3^{2-x}$　　　　D．$y=\frac{x^2+25}{\sqrt{x^2+16}}$

答案：BC

【解析】

分析：

根据基本不等式成立的条件“一正二定三相等”，逐一验证可得选项.

【详解】

解：对于 A 选项，当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x<0$，此时 $\ln x+\frac{9}{\ln x}<0$，故 A 不正确.

对于 B 选项，$y=6|\sin x|+\frac{3}{2|\sin x|}\geq 2\sqrt{9}=6$，当且仅当 $6|\sin x|=\frac{3}{2|\sin x|}$，即 $|\sin x|=\frac{1}{2}$ 时取“=”，故 B 正确.

对于 C 选项，$y=3^x+3^{2-x}\geq 2\sqrt{3^2}=6$，当且仅当 $3^x=3^{2-x}$，即 $x=1$ 时取“=”，故 C 正确.

对于 D 选项，$y=\frac{x^2+16+9}{\sqrt{x^2+16}}=\sqrt{x^2+16}+\frac{9}{\sqrt{x^2+16}}\geq 2\sqrt{9}=6$，

当且仅当 $\sqrt{x^2+16}=\frac{9}{\sqrt{x^2+16}}$，即 $x^2=-7$ 无解，故 D 不正确.

故选：BC.

（多选题）例 6．（2023·江苏·扬州中学高三开学考试）设 $a>0$，$b>0$，下列结论中正确的是（　　）

A. $(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\geq 9$

B. $a^2+b^2\geq 2(a+b+1)$

C. $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}\geq a+b$　　D. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\geq\sqrt{ab}$

答案：ACD

【解析】

分析：

利用基本不等式可判断 ACD 选项的正误，利用特殊值法可判断 B 选项的正误.

【详解】

对于 A 选项，$(a+2b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)=5+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{2a}{b}\geq 5+2\sqrt{\dfrac{2b}{a}\cdot\dfrac{2a}{b}}=9$，

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，A 对；

对于 B 选项，取 $a=b=1$，则 $a^2+b^2<2(a+b+1)$，B 错；

对于 C 选项，$\because \dfrac{b^2}{a}+a\geq 2\sqrt{\dfrac{b^2}{a}\cdot a}=2b$，$\dfrac{a^2}{b}+b\geq 2\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\cdot b}=2a$，

所以，$\dfrac{b^2}{a}+a+\dfrac{a^2}{b}+b\geq 2a+2b$，即 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}\geq a+b$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，C 对；

对于 D 选项，因为 $a^2+b^2\geq 2ab$，则 $2\left(a^2+b^2\right)\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$，

所以，$\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\geq\dfrac{(a+b)^2}{2(a+b)}=\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时，两个等号同时成立，D 对.

故选：ACD.

【方法技巧与总结】

熟记基本不等式成立的条件，合理选择基本不等式的形式解题，要注意对不等式等号是否成立进行验证.

题型二：直接法求最值

例 7.（2023·全国·模拟预测（文））若实数 a，b 满足 $a+b=1$，则 ab 的最大值为（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

答案：D

【解析】

分析：

利用基本不等式求解积的最大值.

【详解】

$\because ab\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，$a+b=1$，

∴ $ab \le \left(\frac{1}{2}\right)^2$，即 $ab \le \frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，

∴ $(ab)_{\max}=\frac{1}{4}$.

故选：D.

例 8.（2023·甘肃酒泉·模拟预测（理））若 x，y 为实数，且 $x+2y=6$，则 3^x+9^y 的最小值为（　　）

A．18　　B．27　　C．54　　D．90

答案：C

【解析】

分析：

利用基本不等式可得答案.

【详解】

由题意可得 $3^x+9^y=3^x+3^{2y}\ge 2\sqrt{3^{x+2y}}=2\times 27=54$，

当且仅当 $3^x=3^{2y}$ 时，即 $x=2y$ 等号成立.

故选：C.

例 9.（2023·河南河南·三模（理））已知二次函数 $f(x)=ax^2+2x+c$（$x\in\mathbf{R}$）的值域为 $[0,+\infty)$，则 $\frac{1}{c}+\frac{4}{a}$ 的最小值为（　　）

A．-4　　B．4　　C．8　　D．-8

答案：B

【解析】

分析：

根据 $f(x)$ 的值域求得 $ac=1$，结合基本不等式求得 $\frac{1}{c}+\frac{4}{a}$ 的最小值.

【详解】

由于二次函数 $f(x)=ax^2+2x+c$（$x\in\mathbf{R}$）的值域为 $[0,+\infty)$，

所以 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=4-4ac=0\end{cases}$，所以 $ac=1,c>0$，

所以 $\frac{1}{c}+\frac{4}{a}\ge 2\sqrt{\frac{1}{c}\cdot\frac{4}{a}}=4$，

当且仅当 $\frac{1}{c}=\frac{4}{a}$ 即 $a=2,c=\frac{1}{2}$ 时等号成立.

故选：B

例 10．（2023·湖北十堰·三模）函数 $f\left(x\right)=16^{x}+\dfrac{1}{4^{x}}+\dfrac{1}{2^{x-1}}$ 的最小值为（　　）

A．4　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．3　　　　D．$4\sqrt{2}$

答案：A

【解析】

分析：

利用不等式性质以及基本不等式求解.

【详解】

因为 $16^{x}+\dfrac{1}{4^{x}}\geq 2\sqrt{\dfrac{16^{x}}{4^{x}}}=2\times 2^{x}$，当且仅当 $16^{x}=\dfrac{1}{4^{x}}$，即 $x=0$ 时等号成立，

$2\times 2^{x}+\dfrac{1}{2^{x-1}}=2\times 2^{x}+\dfrac{2}{2^{x}}\geq 2\sqrt{4}=4$，当且仅当 $2\times 2^{x}=\dfrac{2}{2^{x}}$，即 $x=0$ 时等号成立，

所以 $f\left(x\right)$ 的最小值为 4.

故选：A

（多选题）例 11．（2023·广东·汕头市潮阳区河溪中学高三阶段练习）已知 a，b 是两个正数，4 是 2^{a} 与 16^{b} 的等比中项，则下列说法正确的是（　　）

A．ab 的最小值是 1　　　　B．ab 的最大值是 1

C．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值是 $\dfrac{9}{4}$　　　　D．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最大值是 $\dfrac{9}{2}$

答案：BC

【解析】

分析：

根据等比中项整理得 $a+4b=4$，直接由基本不等式可得 ab 的最大值，可判断 AB；由 $(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})\cdot(a+4b)\cdot\dfrac{1}{4}$ 展开后使用基本不等式可判断 CD.

【详解】

因为 $2^{a}\cdot 16^{b}=4^{2}$，所以 $2^{a+4b}=2^{4}$，

所以 $a+4b=4\geqslant 2\sqrt{4ab}$，可得 $ab\leqslant 1$，当且仅当 $a=4b$ 时等号成立，

所以 ab 的最大值为 1，故 A 错误，B 正确.

因为 $(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})\cdot(a+4b)\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}(1+4+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b})\geqslant\dfrac{1}{4}(5+2\sqrt{4})=\dfrac{9}{4}$，

故 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 $\dfrac{9}{4}$，无最大值，故 C 正确，D 错误.

故选：BC

例 12．（2023·四川·广安二中二模（文））若 $a,b\in\mathrm{R}^{+}$，且 $\dfrac{1}{a}+b=1$，则 $\dfrac{2b}{a}$

的最大值是________________.

答案：$\frac{1}{2}$##0.5.

【解析】

分析：

利用基本不等式可直接求得结果.

【详解】

$\because a,b\in R^{+}$，$\therefore \frac{1}{a}>0$，$b>0$，$\therefore \frac{1}{a}+b=1\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}$，

即$\frac{b}{a}\leq \frac{1}{4}$（当且仅当$\frac{1}{a}=b$，即$a=2$，$b=\frac{1}{2}$时取等号），

$\therefore \frac{2b}{a}\leq \frac{1}{2}$，即$\frac{2b}{a}$的最大值为$\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

例 13．（2023·全国·高三专题练习）已知正数x、y满足$x+\frac{1}{4y}=2$，则$\frac{y}{x}$的最小值是

____________.

答案：$\frac{1}{4}$

【解析】

分析：

利用基本不等式可求得$\frac{y}{x}$的最小值.

【详解】

因为x、y为正数，由基本不等式可得$2=x+\frac{1}{4y}\geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}$，所以，$\frac{y}{x}\geq \frac{1}{4}$，

当且仅当$\begin{cases}4xy=1\\ x+\frac{1}{4y}=2\end{cases}$时，即当$x=4y=1$时，等号成立，故$\frac{y}{x}$的最小值为$\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

【方法技巧与总结】

直接利用基本不等式求解，注意取等条件.

题型三：常规凑配法求最值

例 14．（2023·全国·高三专题练习（理））若$-1<x<1$，则$y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$有（　　）

A．最大值 -1　　B．最小值 -1　　C．最大值1　　D．最小值1

答案：A

【解析】

分析：

将给定函数化简变形，再利用均值不等式求解即得.

【详解】

因 $-1<x<1$，则 $0<1-x<2$，

于是得 $y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)^2+1}{1-x}=-\frac{1}{2}[(1-x)+\frac{1}{1-x}]\le-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}}=-1$，当且仅当 $1-x=\frac{1}{1-x}$，

即 $x=0$ 时取“=”，

所以当 $x=0$ 时，$y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$ 有最大值 -1.

故选：A

例 15．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=3x+\frac{1}{x-1}\ (x>1)$ 的最小值是（　　）

A．4　　B．$2\sqrt{3}-3$

C．$2\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}+3$

答案：D

【解析】

由 $y=3(x-1)+\frac{1}{x-1}+3$，利用基本不等式求最小值即可.

【详解】

因为 $x>1$，所以 $y=3(x-1)+\frac{1}{x-1}+3\ge2\sqrt{3(x-1)\times\frac{1}{x-1}}+3=2\sqrt{3}+3$，当且仅当

$3(x-1)=\frac{1}{x-1}$，即 $x=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立.

所以函数 $y=3x+\frac{1}{x-1}\ (x>1)$ 的最小值是 $2\sqrt{3}+3$.

故选：D.

【点睛】

本题考查利用基本不等式求最值，考查学生的计算求解能力，属于基础题.

例 16．（2023·全国·高三专题练习）若 $x>0$，$y>0$ 且 $x+y=xy$，则 $\frac{x}{x-1}+\frac{2y}{y-1}$ 的最小值为（　　）

A．3　　B．$\frac{5}{2}+\sqrt{6}$　　C．$3+\sqrt{6}$　　D．$3+2\sqrt{2}$

答案：D

【解析】

分析：

利用给定条件确定 $x>1, y>1$，变形 $\frac{x}{x-1}+\frac{2y}{y-1}$ 并借助均值不等式求解即得.

【详解】

因 $x>0$， $y>0$ 且 $x+y=xy$，则 $xy=x+y>y$，即有 $x>1$，同理 $y>1$，

由 $x+y=xy$ 得：$(x-1)(y-1)=1$，

于是得 $\frac{x}{x-1}+\frac{2y}{y-1}=1+\frac{1}{x-1}+2+\frac{2}{y-1}=3+(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{y-1})\geq 3+2\sqrt{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{2}{y-1}}=3+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{y-1}$，即 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}, y=1+\sqrt{2}$ 时取“=”，

所以 $\frac{x}{x-1}+\frac{2y}{y-1}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

故选：D

例 17．（2023·上海·高三专题练习）若 $x>1$，则函数 $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ 的最小值为___________.

答案：3

【解析】

分析：

由 $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1$，及 $x>1$，利用基本不等式可求出最小值.

【详解】

由题意，$y=\frac{x^2-x+1}{x-1}=\frac{\left(x^2-2x+1\right)+\left(x-1\right)+1}{x-1}=\frac{\left(x-1\right)^2+\left(x-1\right)+1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1$，

因为 $x>1$，所以 $y=x-1+\frac{1}{x-1}+1\geq 2\sqrt{\left(x-1\right)\cdot\frac{1}{x-1}}+1=3$，当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$，即 $x=2$ 时等号成立.

所以函数 $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ 的最小值为 3.

故答案为：3.

例 18．（2023·江苏·常州市北郊高级中学高一阶段练习）已知 $xy=1$，且 $0<y<\frac{1}{2}$，则 $\frac{x-4y}{x^2+16y^2}$ 最大值为______.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{8}$

【解析】

分析：

由 $xy=1$ 且 $0<y<\frac{1}{2}$，可得 $y=\frac{1}{x}(x>2)$，可得 $x-4y>0$，再将 $\frac{x-4y}{x^2+16y^2}$ 化为 $\frac{1}{(x-4y)+\frac{8}{x-4y}}$ 后利用基本不等式求解即可.

【详解】

解：由 $xy=1$ 且 $0<y<\frac{1}{2}$，可得 $y=\frac{1}{x}(x>2)$，代入 $x-4y=x-\frac{4}{x}>0$，

又 $\frac{x-4y}{x^2+16y^2}=\frac{x-4y}{(x-4y)^2+8xy}=\frac{1}{(x-4y)+\frac{8}{x-4y}}\leq\frac{1}{2\sqrt{(x-4y)\cdot\frac{8}{x-4y}}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$，

当且仅当 $x-4y=\frac{8}{x-4y}$，即 $x-4y=2\sqrt{2}$，

又 $xy=1$，可得 $x=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 时，不等式取等，

即 $\frac{x-4y}{x^2+16y^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{8}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{8}$.

例 19.（2023·全国·高三专题练习）（1）求函数 $y=x+\frac{4}{x-1}\left(x>1\right)$ 的最小值及此时 x 的值；

（2）已知函数 $y=\frac{x^2+5x+10}{x+2}$，$x\in\left(-2,+\infty\right)$，求此函数的最小值及此时 x 的值.

答案：（1）函数 y 的最小值为 5，此时 $x=3$；（2）函数 y 的最小值为 5，此时 $x=0$.

【解析】

（1）整理 $y=x+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+1$，利用基本不等式求解即可；（2）令 $t=x+2\left(t>0\right)$，将 $x=t-2$ 代入整理得 $y=t+\frac{4}{t}+1$，利用基本不等式求解即可；

【详解】

（1）∵ $x>1$，

∴ $y=x+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+1\geq2\sqrt{\left(x-1\right)\cdot\frac{4}{x-1}}+1=4+1=5$，

当且仅当 $x-1=\frac{4}{x-1}$ 即 $x=3$ 时，等号成立.

故函数 y 的最小值为 5，此时 $x=3$；

（2）令 $t=x+2\left(t>0\right)$，

将 $x=t-2$ 代入得：

$$y=\frac{(t-2)^2+5(t-2)+10}{t}=t+\frac{4}{t}+1,$$

$\because t>0$，

$$\therefore y=t+\frac{4}{t}+1\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}+1=4+1=5,$$

当且仅当 $t=\frac{4}{t}$，

即 $x+2=\frac{4}{x+2}$，

即 $x=0$ 时，等号成立.

故函数 y 的最小值为 5，此时 $x=0$.

【点睛】

本题主要考查了利用基本不等式求最值的问题.属于中档题.

【方法技巧与总结】

1．通过添项、拆项、变系数等方法凑成和为定值或积为定值的形式．

2．注意验证取得条件．

题型四：消参法求最值

例 20．（2023·浙江绍兴·模拟预测）若直线 $ax-by-3=0(a>0,b>0)$ 过点 $(1,-1)$，则 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}$ 的最大值为____________.

答案：$2\sqrt{3}$

【解析】

分析：

将点 $(1,-1)$ 代入直线方程可得 $a+b=3$，将 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}$ 平方，结合均值不等式可得答案.

【详解】

直线 $ax-by-3=0$ 过点 $(1,-1)$，则 $a+b=3$

又 $a>0,b>0$，设 $t=\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}$，则 $t>0$

$$t^2=a+1+b+2+2\sqrt{(a+1)(b+2)}=6+2\sqrt{(a+1)(b+2)}$$

由 $(a+1)(b+2)\leq\left(\frac{a+1+b+2}{2}\right)^2=9$，当且仅当 $a+1=b+2$，即 $a=2,b=1$ 时等号成立.

所以 $t^2=6+2\sqrt{(a+1)(b+2)}\leq 12$，即 $t\leq 2\sqrt{3}$

所以 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$，当且仅当 $a=2,b=1$ 时等号成立.

故答案为：$2\sqrt{3}$

例 21．（2023·全国·高三专题练习）设正实数x，y，z满足$x^2-3xy+4y^2-z=0$，则当$\frac{xy}{z}$取得最大值时，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$的最大值为（　　）

A．0　　　　B．3　　　　C．$\frac{9}{4}$　　　　D．1

答案：D

【解析】

分析：

利用$x^2-3xy+4y^2-z=0$可得$\frac{xy}{z}=\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}-3}$，根据基本不等式最值成立的条件可得$x=2y,z=2y^2$，代入$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}$可得关于$y$的二次函数，利用单调性求最值即可.

【详解】

由正实数x，y，z满足$x^2-3xy+4y^2-z=0$，

$\therefore z=x^2-3xy+4y^2$．

$\therefore \frac{xy}{z}=\frac{xy}{x^2-3xy+4y^2}=\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}-3},, \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}-3}=1$，

当且仅当$x=2y>0$时取等号，此时$z=2y^2$．

$\therefore \frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\frac{2}{2y}+\frac{1}{y}-\frac{2}{2y^2}=-(\frac{1}{y}-1)^2+1,, 1$，当且仅当$y=1$时取等号，

即$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$的最大值是 1．

故选：D

【点睛】

本题主要考查了基本不等式的性质和二次函数的单调性，考查了最值取得时等号成立的条件，属于中档题.

例 22．（2023·全国·高三专题练习（理））已知正实数a，b满足$ab+2a-2=0$，则$4a+b$的最小值是（　　）

A．2　　　　B．$4\sqrt{2}-2$　　　　C．$4\sqrt{3}-2$　　　　D．6

答案：B

【解析】

分析：

根据 $ab+2a-2=0$ 变形得 $a=\frac{2}{b+2}$，进而转化为 $4a+b=\frac{8}{b+2}+b$，

用凑配方式得出 $\frac{8}{b+2}+(b+2)-2$，再利用基本不等式即可求解.

【详解】

由 $ab+2a-2=0$，得 $a=\frac{2}{b+2}$，

所以 $4a+b=\frac{8}{b+2}+b=\frac{8}{b+2}+(b+2)-2\geq 2\sqrt{\frac{8}{b+2}\cdot(b+2)}-2=4\sqrt{2}-2$，

当且仅当 $a=\frac{2}{b+2},\frac{8}{b+2}=b+2$，即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2},b=2\sqrt{2}-2$ 取等号.

故选：B.

例 23．（2023·浙江·高三专题练习）若正实数 a，b 满足 $b+3a=2ab$，则 $\frac{a+b}{ab^2}$ 的最大值为

______.

答案：$\frac{1}{2}$

【解析】

分析：

由已知得 $a=\frac{b}{2b-3}$，代入 $\frac{a+b}{ab^2}=\frac{b+\frac{b}{2b-3}}{\frac{b^3}{2b-3}}=-\frac{2}{b^2}+\frac{2}{b}=-2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，然后结合二次函数的性质可求.

【详解】

因为正实数 a，b 满足 $b+3a=2ab$，

所以 $a=\frac{b}{2b-3}$，

则 $\frac{a+b}{ab^2}=\frac{b+\frac{b}{2b-3}}{\frac{b^3}{2b-3}}=-\frac{2}{b^2}+\frac{2}{b}=-2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，

当 $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$，即 $b=2$ 时取得最大值 $\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

【点睛】

思路点睛：$b+3a=2ab$，可解出 a，采用二元化一元的方法减少变量，转化为 $\frac{1}{b}$ 的一元二次函数，利用一元二次函数的性质求最值.

例 24．（2023·全国·高三专题练习）若$x,y\in R^{+}$，$(x-y)^{2}=(xy)^{3}$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为

__________.

答案：2

【解析】

分析：

根据题中所给等式可化为$(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})^{2}=xy$，再通过平方关系将其与$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$联系起来，运用基本不等式求解最小值即可.

【详解】

因为$(x-y)^{2}=(xy)^{3}$且$x,y\in R^{+}$，则两边同除以$(xy)^{2}$，得$(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})^{2}=xy$，

又因为$(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^{2}=(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})^{2}+4\frac{1}{xy}=xy+4\frac{1}{xy}\geq 2\sqrt{xy\cdot 4\frac{1}{xy}}=4$，当且仅当$xy=4\frac{1}{xy}$，即$x=2+\sqrt{2},y=2-\sqrt{2}$时等号成立，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\sqrt{4}=2$.

故答案为:2

例 25．（2023·浙江绍兴·模拟预测）若$a>0,b>0,4a^{2}+b^{2}-2ab=2$，则$\frac{ab+1}{2a+b}$的取值范围是

________.

答案：$\left[\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【解析】

分析：

根据已知可得$ab=\frac{(2a+b)^{2}-2}{6}>0$，求得$2a+b>\sqrt{2}$，再将条件变形$(2a+b)^{2}=2+6ab$结合基本不等式可求得$0<2a+b\leq 2\sqrt{2}$，由此将$\frac{ab+1}{2a+b}$变形为$\frac{1}{6}\left(2a+b+\frac{4}{2a+b}\right)$，采用换元法，利用导数求得结果.

【详解】

由题意$a>0,b>0,4a^{2}+b^{2}-2ab=2$得：$ab=\frac{(2a+b)^{2}-2}{6}>0$，则$2a+b>\sqrt{2}$，

又$(2a+b)^{2}=2+6ab\leq 2+3\times\left(\frac{2a+b}{2}\right)^{2}$，当且仅当$b=2a=\sqrt{2}$时取等号，

故$0<2a+b\leq 2\sqrt{2}$，故$\sqrt{2}<2a+b\leq 2\sqrt{2}$，