福建省福州市长乐区长乐高级中学2023-2024学年高三（最后冲刺）数学试卷

考生请注意：

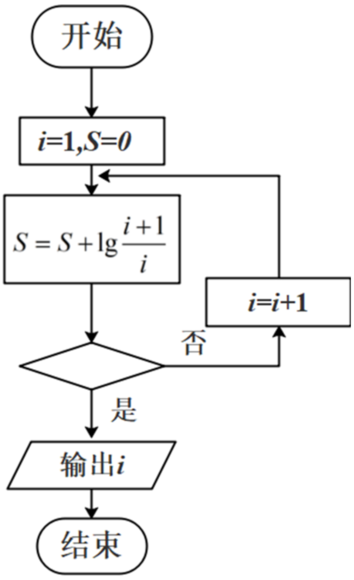
1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

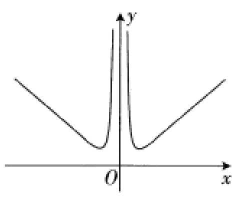
一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

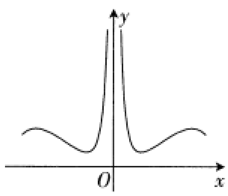
1．运行如图所示的程序框图，若输出的i的值为**99**，则判断框中可以填（　　）

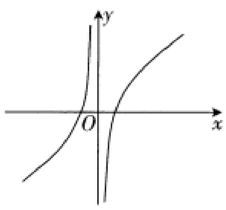


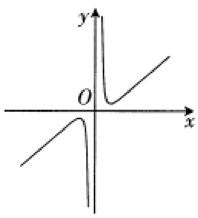
A． $S\geq 1$　　**B．** $S>2$　　**C．** $S>\lg 99$　　**D．** $S\geq \lg 98$

2．函数 $f\left(x\right)=\left|x\right|-\frac{\ln\left|x\right|}{x^{2}}$ 的图象大致为（　　）

A．


B．


C．


D．


3．P 是正四面体 $ABCD$ 的面 ABC 内一动点，E 为棱 AD 中点，记 DP 与平面 BCE 成角为定值 θ，若点 P 的轨迹为一段抛物线，则 $\tan\theta=$（　　）

A． $\sqrt{2}$　　**B．** $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　**C．** $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　**D．** $2\sqrt{2}$

4．2020 年是脱贫攻坚决战决胜之年，某市为早日实现目标，现将甲、乙、丙、丁 4 名干部派遣到 A、B、C 三个贫困县扶贫，要求每个贫困县至少分到一人，则甲被派遣到 A 县的分法有（　　）

A．6 种　　　　B．12 种　　　　C．24 种　　　　D．36 种

5．已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1<0$；命题 q：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2>2^x$，则下列命题中为真命题的是（　　）

A．$p\wedge q$　　　　B．$\neg p\wedge q$　　　　C．$p\wedge\neg q$　　　　D．$\neg p\wedge\neg q$

6．已知直线 l：$\sqrt{3}x+y+2=0$ 与圆 O：$x^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，与 l 平行的直线 l_1 与圆 O 交于 M，N 两点，且 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OMN$ 的面积相等，给出下列直线 l_1：①$\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$，②$\sqrt{3}x+y-2=0$，③$x-\sqrt{3}y+2=0$，④$\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}=0$.其中满足条件的所有直线 l_1 的编号有（　　）

A．①②　　　　B．①④　　　　C．②③　　　　D．①②④

7．数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=1$，公差 $d\in[1，2]$，且 $a_4+\lambda a_{10}+a_{16}=15$，则实数 λ 的最大值为（　　）

A．$\frac{7}{2}$　　　　B．$\frac{53}{19}$　　　　C．$-\frac{23}{19}$　　　　D．$-\frac{1}{2}$

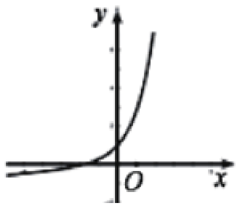
8．设 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，给出下列四个命题 ①若 $m//n$，$m\perp\beta$，则 $n\perp\beta$；②若 $m//\alpha$，$m//\beta$，则 $\alpha//\beta$；③若 $m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则 $m\perp n$；④若 $m//\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$；其中真命题的个数为（　　）

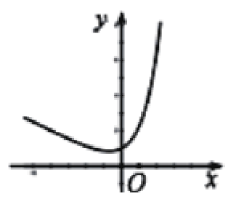
A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

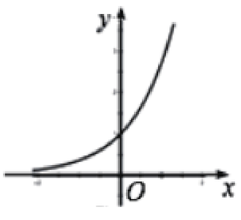
9．已知三棱锥 $D-ABC$ 的外接球半径为 2，且球心为线段 BC 的中点，则三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为（　　）

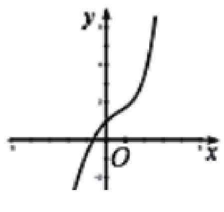
A．$\frac{2}{3}$　　　　B．$\frac{4}{3}$　　　　C．$\frac{8}{3}$　　　　D．$\frac{16}{3}$

10．函数 $f(x)=e^x+ax$（$a<0$）的图像可以是（　　）

A．

B．

C．

D．

11．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=-2,a_8=10$，则 $S_9=$（　　）

A．45　　　　B．42　　　　C．25　　　　D．36

12．某校 **8** 位学生的本次月考成绩恰好都比上一次的月考成绩高出 **50** 分，则以该 **8** 位学生这两次的月考成绩各自组成样本，则这两个样本不变的数字特征是（　　）

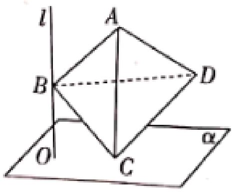
A．方差　　　　　　**B**．中位数　　　　　　**C**．众数　　　　　　**D**．平均数

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$PA=PB=AB=2\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{2}$，且二面角 $P-AB-C$ 的大小为 $135°$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为__________．

14．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 AA_1 的中点，F 是棱 A_1B_1 上的点，且 $A_1F=\frac{1}{3}FB_1$，则异面直线 EF 与 BC_1 所成角的余弦值为__________．

15．如图，直线 $l\perp$ 平面 α，垂足为 O，三棱锥 $A-BCD$ 的底面边长和侧棱长都为 **4**，C 在平面 α 内，B 是直线 l 上的动点，则点 B 到平面 ACD 的距离为_______，点 O 到直线 AD 的距离的最大值为_______．



16．五声音阶是中国古乐基本音阶，故有成语“五音不全”.中国古乐中的五声音阶依次为：宫、商、角、徵、羽，如果把这五个音阶全用上，排成一个五个音阶的音序，且要求宫、羽两音阶不相邻且在角音阶的同侧，可排成______种不同的音序.

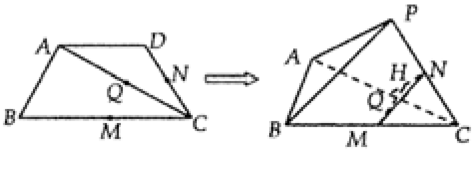
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(12 分) 在 ΔABC 中，角 $A,\ B,\ C$ 所对的边分别为 $a,\ b,\ c$，若 $\vec{m}=(a,b-c)$，$\vec{n}=(\sin A-\sin B,\sin B+\sin C)$，$\vec{p}=(1,2)$，且 $\vec{m}\perp\vec{n}$.

（1）求角 C 的值；

（2）求 $\vec{n}\cdot\vec{p}$ 的最大值.

18．(12 分) 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AD=AB=CD=2$，$BC=4$，M，N，Q 分别为 BC，CD，AC 的中点，以 AC 为折痕将 $\triangle ACD$ 折起，使点 D 到达点 P 位置（$P\notin$ 平面 ABC）.



（1）若 H 为直线 QN 上任意一点，证明：$MH/\!/$平面 ABP；

（2）若直线 AB 与直线 MN 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.

19.（12分）已知中心在原点O的椭圆C的左焦点为$F_1\left(-1,0\right)$，C与y轴正半轴交点为A，且$\angle AF_1O=\dfrac{\pi}{3}$.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）过点A作斜率为k_1、$k_2\left(k_1k_2\neq 0\right)$的两条直线分别交$C$于异于点$A$的两点$M$、$N$.证明：当$k_2=\dfrac{k_1}{k_1-1}$时，直线$MN$过定点.

20.（12分）已知$\vee ABC$中，$BC=2$，$B=45^\circ$，D是AB上一点.

（1）若$S_{\triangle BCD}=1$，求CD的长；

（2）若$A=30^\circ$，$BD=3AD$，求$\dfrac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DCB}$的值.

21.（12分）在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$为参数）.点$p\left(x_0,y_0\right)$在曲线$C$上，点$Q(m,n)$满足$\begin{cases} m=2x_0 \\ n=\sqrt{3}y_0 \end{cases}$.

（1）以坐标原点O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，求动点Q的轨迹C_1的极坐标方程；

（2）点A，B分别是曲线C_1上第一象限，第二象限上两点，且满足$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$，求$\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$的值.

22.（10分）已知函数$f\left(x\right)=a\ln x-\dfrac{be^x}{x}$，曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为$2x-y-2-e=0$.

（1）求a，b的值；

（2）证明函数$f\left(x\right)$存在唯一的极大值点x_0，且$f\left(x_0\right)<2\ln 2-2$.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

【解析】

模拟执行程序框图，即可容易求得结果.

【详解】

运行该程序：

第一次，$i=1$，$S=\lg 2$；

第二次，$i=2$，$S=\lg 2+\lg\frac{3}{2}=\lg 3$；

第三次，$i=3$，$S=\lg 3+\lg\frac{4}{3}=\lg 4$，

…；

第九十八次，$i=98$，$S=\lg 98+\lg\frac{99}{98}=\lg 99$；

第九十九次，$i=99$，$S=\lg 99+\lg\frac{100}{99}=\lg 100=2$，

此时要输出 i 的值为 99.

此时 $S=2>lg99$.

故选：C.

【点睛】

本题考查算法与程序框图，考查推理论证能力以及化归转化思想，涉及判断条件的选择，属基础题.

2、A

【解析】

根据函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性和单调性，排除错误选项，从而得出正确选项.

【详解】

因为 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 是偶函数，排除 C 和 D.

当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=x-\frac{\ln x}{x^2}$，$f'\left(x\right)=\frac{x^3+2\ln x-1}{x^3}$，

令 $f'\left(x\right)<0$，得 $0<x<1$，即 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上递减；令 $f'\left(x\right)>0$，得 $x>1$，即 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上递增.所以 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，排除 B.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查函数图像的识别，考查利用导数研究函数的单调区间和极值，属于中档题.

3、B

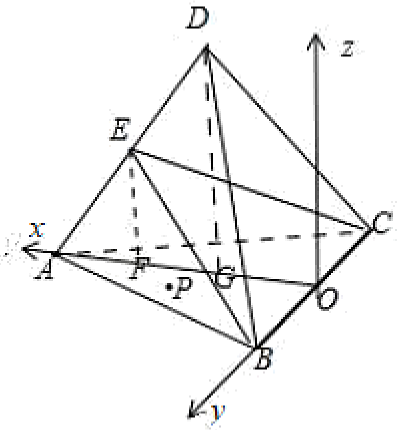
【解析】

设正四面体的棱长为2，建立空间直角坐标系，求出各点的坐标，求出面BCE的法向量，设P的坐标，求出向量$\overrightarrow{DP}$，求出线面所成角的正弦值，再由角θ的范围$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，结合$\theta$为定值，得出$\sin\theta$为定值，且$P$的轨迹为一段抛物线，所以求出坐标的关系，进而求出正切值.

【详解】

由题意设四面体$ABCD$的棱长为2，设O为BC的中点，

以O为坐标原点，以OA为x轴，以OB为y轴，过O垂直于面ABC的直线为z轴，建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，



则可得$OB=OC=1$，$OA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$，取$OA$的三等分点$G$、$F$如图，

则$OG=\frac{1}{3}OA=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AG=OF=\frac{2}{3}OA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$DG=\sqrt{AD^2-AG^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$EF=\frac{1}{2}DG=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$B(0,1,0)$、$C(0,-1,0)$、$A(\sqrt{3},0,0)$、$D\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$、$E\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

由题意设$P(x,y,0)$，$\overrightarrow{DP}=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3},y,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

$\because\triangle ABD$和$\triangle ACD$都是等边三角形，E为AD的中点，$\therefore BE\perp AD$，$CE\perp AD$，

$\because BE\cap CE=E$，$\therefore AD\perp$平面BCE，$\therefore\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$为平面$BCE$的一个法向量，

因为DP与平面BCE所成角为定值θ，则$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

由题意可得

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DP}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DP}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DP}\right|}=\frac{\left|-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2\right|}{2\times\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+y^2+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}}$$

$$=\frac{\left|x+\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}x-1\right)^2+3y^2+8}}=\sqrt{\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)^2}{3x^2+3y^2-2\sqrt{3}x+9}}=\sqrt{\frac{x^2+2\sqrt{3}x+3}{3x^2+3y^2-2\sqrt{3}x+9}},$$

因为 P 的轨迹为一段抛物线且 $\tan\theta$ 为定值，则 $\sin\theta$ 也为定值，

$\therefore\frac{2\sqrt{3}x}{3y^2-2\sqrt{3}x}=\frac{x^2}{3x^2}=\frac{3}{9}$，可得 $3y^2=8\sqrt{3}x$，此时 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：**B.**

【点睛】

考查线面所成的角的求法，及正切值为定值时的情况，属于中等题.

4、**B**

【解析】

分成甲单独到 A 县和甲与另一人一同到 A 县两种情况进行分类讨论，由此求得甲被派遣到 A 县的分法数.

【详解】

如果甲单独到 A 县，则方法数有 $C_3^2\times A_2^2=6$ 种.

如果甲与另一人一同到 A 县，则方法数有 $C_3^1\times A_2^2=6$ 种.

故总的方法数有 $6+6=12$ 种.

故选：**B**

【点睛】

本小题主要考查简答排列组合的计算，属于基础题.

5、**B**

【解析】

根据 $\varDelta<0$，可知命题 p 的真假，然后对 x 取值，可得命题 q 的真假，最后根据真值表，可得结果.

【详解】

对命题 p：

可知 $\Delta=(-1)^2-4<0$，

所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1>0$

故命题 p 为假命题

命题 q：

取 $x=3$，可知 $3^2>2^3$

所以 $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2>2^x$

故命题 q 为真命题

所以 $\neg p\wedge q$ 为真命题

故选：B

【点睛】

本题主要考查对命题真假的判断以及真值表的应用，识记真值表，属基础题.

6、D

【解析】

求出圆心 O 到直线 l 的距离为：$d=1=\frac{1}{2}r$，得出 $\angle AOB=120°$，根据条件得出 O 到直线 l_1 的距离 $d'=1$ 或 $\sqrt{3}$ 时满足条件，即可得出答案.

【详解】

解：由已知可得：圆 O：$x^2+y^2=4$ 的圆心为（0,0），半径为 2，

则圆心 O 到直线 l 的距离为：$d=1=\frac{1}{2}r$，

$\therefore\angle AOB=120°$，

而 $l//l_1$，$\triangle OAB$ 与 $\triangle OMN$ 的面积相等，

$\therefore\angle MON=120°$ 或 $60°$，

即 O 到直线 l_1 的距离 $d'=1$ 或 $\sqrt{3}$ 时满足条件，

根据点到直线距离可知，①②④满足条件.

故选：D.

【点睛】

本题考查直线与圆的位置关系的应用，涉及点到直线的距离公式.

7、D

【解析】

利用等差数列通项公式推导出 $\lambda=\frac{13-18d}{1+9d}$，由 $d\in[1，2]$，能求出实数 λ 取最大值.

【详解】

∵数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=1$，公差 d∈[1，2]，且 $a_4+\lambda a_{10}+a_{16}=15$，

∴1+3d+λ（1+9d）+1+15d＝15，解得 $\lambda=\dfrac{13-18d}{1+9d}$，

∵d∈[1，2]，$\lambda=\dfrac{13-18d}{1+9d}=-2+\dfrac{15}{1+9d}$ 是减函数，

∴d＝1 时，实数 λ 取最大值为 $\lambda=\dfrac{13-18}{1+9}=-\dfrac{1}{2}$.

故选 D.

【点睛】

本题考查实数值的最大值的求法，考查等差数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

8、C

【解析】

利用线线、线面、面面相应的判定与性质来解决.

【详解】

如果两条平行线中一条垂直于这个平面，那么另一条也垂直于这个平面知①正确；当直线 m 平行于平面 α 与平面 β 的交线时也有 $m//\alpha$，$m//\beta$，故②错误；若 $m\perp\alpha$，则 m 垂直平面 α 内以及与平面 α 平行的所有直线，故③正确；若 $m//\alpha$，则存在直线 $l\subset\alpha$ 且 $m//l$，因为 $m\perp\beta$，所以 $l\perp\beta$，从而 $\alpha\perp\beta$，故④正确.

故选：C.

【点睛】

本题考查空间中线线、线面、面面的位置关系，里面涉及到了相应的判定定理以及性质定理，是一道基础题.

9、C

【解析】

由题可推断出$\vee ABC$ 和$\vee BCD$ 都是直角三角形，设球心为 O，要使三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大，则需满足 $h=OD$，结合几何关系和图形即可求解

【详解】

先画出图形，由球心到各点距离相等可得，$OA=OB=OC$，故$\vee ABC$ 是直角三角形，设 $AB=x,AC=y$，则有 $x^2+y^2=4^2\geq 2xy$，又 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}xy$，所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}xy\leq 4$，当且仅当 $x=y=2\sqrt{2}$ 时，$S_{\Delta ABC}$ 取最大值 4，要使三棱锥体积最大，则需使高 $h=OD=2$，此时 $V_{ABC-D}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times 4\times 2=\dfrac{8}{3}$，