关于无穷小的比较
无穷小的阶

一、无穷小的比较

例如, 当 $x\to 0$ 时, $x, x^2, \sin x, x^2\sin\frac{1}{x}$ 都是无穷小.

观察下列极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0$, x^2比$3x$要快得多;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\sin x$与x大致相同;

$\frac{0}{0}$ 型 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不 存 在 , 不可比.

极限不同, 反映了无穷小趋向于零的速度的“快慢”程度不同.

定义:设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$

(1)如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小.

记作 $\beta = o(\alpha)$

(2)如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ 则称β是比α低阶的无穷小;

(3)如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小;

特殊地,如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小;

记作 $\alpha \sim \beta$;

(4)如果$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$,则称$\beta$是$\alpha$的$k$阶的无穷小;

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}=0$，

即 $x^2=o(3x),\quad (x\to 0).$

所以当 $x\to 0$ 时，x^2是比 $3x$ 高阶的无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，即$\sin x\sim x,\quad (x\to 0).$

所以当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(3x)^2}=\dfrac{1}{9}$，

所以当$x\to 0$时，x^2是$3x$ 二阶无穷小.

例1 证明：当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

证明 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

所以 $\tan x-\sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

二、等价无穷小代换

定理(等价无穷小代换定理)

(1)$\alpha(x)$、$\beta(x)$、$\alpha'(x)$、$\beta'(x)$是同一极限过程的无穷小;

(2)$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$

(3)$\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在.

则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$

证

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

几个常见的等价无穷小:

当$x \to 0$时,

$$\sin x \sim x; \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2;$$

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x)$$

$$x \sim e^x - 1, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax, \quad (a \neq 0)$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a$$

上述等价无穷小中的 x 可以是函数形式,但在所考虑的极限过程中,此函数的极限应为零.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$， $\sin 2x\sim 2x$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=8.$

例3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

解 因为 $x\to 0$ 有 $\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\dfrac{1}{2}x\sin x$, $e^{x^2}-1\sim x^2$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

例4 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)\sin x}{e^x - 1}$.

解 当 $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$.

原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)x}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(x+1) = 1$.

若未定式的分子或分母为若干个因子的乘积, 则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换, 而不会改变原式的极限.

注意: 不能滥用等价无穷小代换.

切记: 只可对函数的乘积因子作无穷小等价代换, 对于代数和中各无穷小不能分别代换.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x, \sin x\sim x.$

原式 $\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{(2x)^3}=0.$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{(2x)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{(2x)^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$ $(\dfrac{0}{0}$型$)$

解

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{-x}\sin^2 x+1)}{\ln(x^2e^{-2x}+1)}$$

因为 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)\sim x$,所以

$\ln(1+e^{-x}\sin^2 x)\sim e^{-x}\sin^2 x$, $\ln(1+e^{-2x}x^2)\sim e^{-2x}x^2$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sin^2 x}{x^2e^{-2x}}=1$$

例7 (0702) 当 $x \to 0$ 时， $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $k =$ ___

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + x\arcsin x - \cos x}{kx^2(\sqrt{1 + x\arcsin x} + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{\arcsin x}{x}\right) = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

例8 (040210) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}[(\frac{2+\cos x}{3})^x-1]$

解 由 $\ln(1+t)$ 与 t 等价 $(t\to 0)$ 得：　$x\to 0$

$$(\frac{2+\cos x}{3})^x-1=e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\sim x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)$$

$$\sim\ x\cdot\frac{\cos x-1}{3}$$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x-1}{3}}{x^2}=-\frac{1}{6}$