

湖北省咸宁市五校 2023 届高三数学试题第一次适应性测试试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知三棱锥 $P-ABC$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $AC \perp BC$ 且 $PA = 2PB$, $PB \perp$ 平面 ABC , 其外接球体积为 ()

- A. $\frac{4\pi}{3}$ B. 4π C. $\frac{32\pi}{3}$ D. $4\sqrt{3}\pi$

2. 下列函数中，在定义域上单调递增，且值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = |\lg(x+1)|$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = 2^x$ D. $y = \ln|x|$

3. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x < 2\}$, $B = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()

- A. $(0, 3)$ B. $[2, 3)$ C. $(0, 2)$ D. $(0, +\infty)$

4. 费马素数是法国大数学家费马命名的,形如 $2^{2^n} + 1 (n \in \mathbf{N})$ 的素数(如: $2^{2^0} + 1 = 3$)为费马素数,在不超过 30 的正偶数中随机选取一数,则它能表示为两个不同费马素数的和的概率是()

- A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{1}{3}$

5. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 15 > 0\}$, $B = \{x | 0 < x < 7\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B$ 等于()

- A. $[-5, 7)$ B. $[-3, 7)$ C. $(-3, 7)$ D. $(-5, 7)$

6. 已知斜率为 k 的直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 $M(1, m) (m > 0)$, 则斜率 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

7. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8.

中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初行健步不为难，次后脚痛递减半，六朝才得到其关，要见每朝行里数，请公仔细算相还。”其意思为：“有一个人走了 378 里路，第一天健步走行，从第二天起脚痛每天走的路程是前一天的一半，走了 6 天后到达目的地，求该人每天走的路程。”由这个描述请算出这人第四天走的路程为（ ）

- A. 6 里 B. 12 里 C. 24 里 D. 48 里

9. 已知 $p: \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$, $q: x = y$ 则 p 是 q 的（ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 若集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 0\}$, $B = \left\{x \left| \frac{x}{x-1} < 0 \right.\right\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $[-1, 1)$ B. $(-1, 1]$ C. $(-1, 1)$ D. $[-1, 1]$

11. 点 O 为 $\triangle ABC$ 的三条中线的交点，且 $OA \perp OB$, $AB = 2$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为()

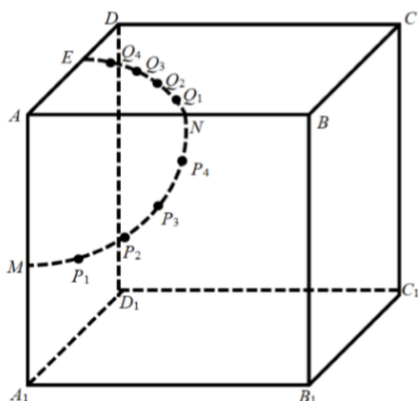
- A. 4 B. 8 C. 6 D. 12

12. 甲乙两人有三个不同的学习小组 A , B , C 可以参加，若每人必须参加并且仅能参加一个学习小组，则两人参加同一个小组的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M, N, E 分别为棱 AA_1, AB, AD 的中点，以 A 为圆心，1 为半径，分别在面 ABB_1A_1 和面 $ABCD$ 内作弧 MN 和 NE ，并将两弧各五等分，分点依次为 M, P_1, P_2, P_3, P_4, N 以及 N, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, E 。一只蚂蚁欲从点 P_1 出发，沿正方体的表面爬行至 Q_4 ，则其爬行的最短距离为 _____。参考数据： $\cos 9^\circ = 0.9877$ ； $\cos 18^\circ = 0.9511$ ； $\cos 27^\circ = 0.8910$ ）



14. 某公司生产甲、乙两种桶装产品.已知生产甲产品 1 桶需耗 A 原料 1 千克、 B 原料 2 千克; 生产乙产品 1 桶需耗 A 原料 2 千克, B 原料 1 千克.每桶甲产品的利润是 300 元,每桶乙产品的利润是 400 元.公司在生产这两种产品的计划中,要求每天消耗 A, B

原料都不超过 12 千克.通过合理安排生产计划,从每天生产的甲、乙两种产品中,公司共可获得的最大利润是_____元.

15. 在 $(1+ax)^2(1-x)^5$ 的展开式中,所有 x 的奇数次幂项的系数和为 -64, 则实数 a 的值为_____.

16. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $AD=1$, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ 的值为_____.



三、解答题: 共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$

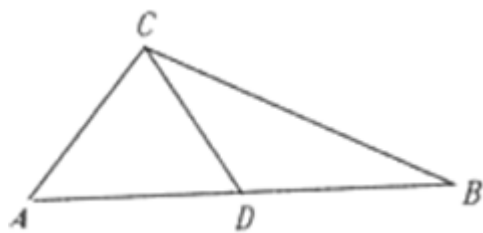
(1) 若 $a_n = n$, $b_n = 2^n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} ;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} > c_n$ 恒成立.

①当数列 $\{b_n\}$ 为等差数列时, 求证: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的公差相等;

②数列 $\{b_n\}$ 能否为等比数列? 若能, 请写出所有满足条件的数列 $\{b_n\}$; 若不能, 请说明理由.

18. (12 分) 如图: 在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{10}$, $c = 4$, $\cos C = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$



(1) 求角 A ;

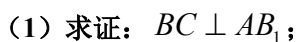
(2) 设 D 为 AB 的中点, 求中线 CD 的长.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - ax + 1 - a (a \in \mathbb{R}).$

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 对任意 $x > -1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 求证: $-\ln(x+1) + xe^{x-1} - x + 1 \geq 0$

20. (12 分) 如图, 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是全等的等边三角形.



(2) 若 $\cos \angle B_1BA = \frac{1}{4}$, 求二面角 $B-B_1C-A$ 的余弦值.

21. (12 分) 某工厂 A , B 两条相互独立的生产线生产同款产品, 在产量一样的情况下通过日常监控得知 A , B 生产线生产的产品为合格品的概率分别为 p 和 $2p-1(0.5 \leq p < 1)$.



(2) 假设不合格的产品均可进行返工修复为合格品, 以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的值.

①已知 A , B 生产线的不合格产品返工后每件产品可分别挽回损失 5 元和 3 元. 若从两条生产线上各随机抽检 1000 件产品, 以挽回损失的平均数为判断依据, 估计哪条生产线挽回的损失较多?

②若最终的合格品（包括返工修复后的合格品）按照一、二、三等级分类后，每件分别获利10元、8元、6元，现从A、B生产线的最终合格品中各随机抽取100件进行检测，结果统计如下图；用样本的频率分布估计总体分布，记该工厂生产一件产品的利润为 X ，求 X 的分布列并估算该厂产量2000件时利润的期望值.

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, α 为实数). 以坐标原点 O 为

极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 8 \sin \theta$, 曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A, B

，两点，线段 AB 的中点为 M .

(1) 求线段 AB 长的最小值；

(2) 求点 M 的轨迹方程.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

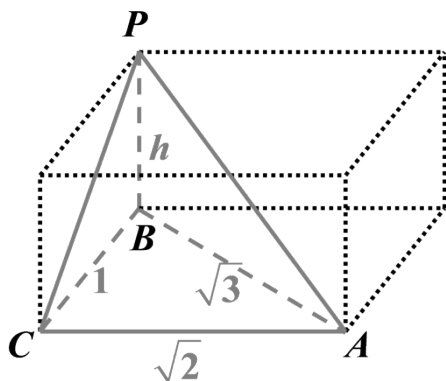
由 $AC \perp BC$, $PB \perp$ 平面 ABC , 可将三棱锥 $P-ABC$ 还原成长方体, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即为长方体的外接球, 进而求解.

【详解】

由题, 因为 $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $AC \perp BC$, 所以 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3}$,

设 $PB = h$, 则由 $PA = 2PB$, 可得 $\sqrt{3+h^2} = 2h$, 解得 $h = 1$,

可将三棱锥 $P-ABC$ 还原成如图所示的长方体,



则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即为长方体的外接球, 设外接球的半径为 R , 则 $2R = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$, 所以 $R = 1$,

所以外接球的体积 $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3}$.

故选: A

【点睛】

本题考查三棱锥的外接球体积, 考查空间想象能力.

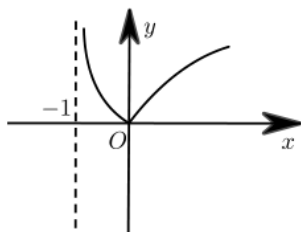
2. B

【解析】

分别作出各个选项中的函数的图象，根据图象观察可得结果.

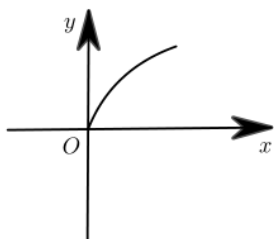
【详解】

对于 A ， $y = |\lg(x+1)|$ 图象如下图所示：



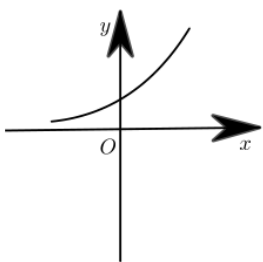
则函数 $y = |\lg(x+1)|$ 在定义域上不单调， A 错误；

对于 B ， $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ 的图象如下图所示：



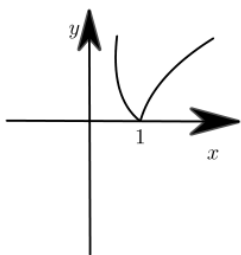
则 $y = \sqrt{x}$ 在定义域上单调递增，且值域为 $[0, +\infty)$ ， B 正确；

对于 C ， $y = 2^x$ 的图象如下图所示：



则函数 $y = 2^x$ 单调递增，但值域为 $(0, +\infty)$ ， C 错误；

对于 D ， $y = \ln|x|$ 的图象如下图所示：



则函数 $y = \ln|x|$ 在定义域上不单调， D 错误.

故选：B.

【点睛】

本题考查函数单调性和值域的判断问题，属于基础题.

3. B

【解析】

可解出集合 B ，然后进行补集、交集的运算即可.

【详解】

$$\complement_U B = \{x \mid x^2 - 3x < 0\} = (0, 3), \quad A = \{x \mid x < 2\}, \quad \text{则 } \complement_U A = [2, +\infty), \quad \text{因此, } (\complement_U A) \cap B = [2, 3).$$

故选：B.

【点睛】

本题考查补集和交集的运算，涉及一元二次不等式的求解，考查运算求解能力，属于基础题.

4. B

【解析】

基本事件总数 $n = 15$ ，能表示为两个不同费马素数的和只有 $8 = 3 + 5$ ， $20 = 3 + 17$ ， $22 = 5 + 17$ ，共有 3 个，根据古典概型求出概率.

【详解】

在不超过 30 的正偶数中随机选取一数，基本事件总数 $n = 15$

能表示为两个不同费马素数的和的只有 $8 = 3 + 5$ ， $20 = 3 + 17$ ， $22 = 5 + 17$ ，共有 3 个

$$\text{则它能表示为两个不同费马素数的和的概率是 } P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查概率的求法，考查列举法解决古典概型问题，是基础题.

5. B

【解析】

解不等式确定集合 A ，然后由补集、并集定义求解.

【详解】

$$\text{由题意 } A = \{x \mid x^2 - 2x - 15 > 0\} = \{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 5\},$$

$$\therefore \complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\},$$

$$(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \{x \mid -3 \leq x < 7\}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查集合的综合运算，以及一元二次不等式的解法，属于基础题型.

6. C

【解析】

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 设直线 l 的方程为: $y = kx + b$, 与抛物线方程联立, 由 $\Delta > 0$ 得 $kb < 1$, 利用韦达定理结

合已知条件得 $b = \frac{2-k^2}{k}$, $m = \frac{2}{k}$, 代入上式即可求出 k 的取值范围.

【详解】

设直线 l 的方程为: $y = kx + b$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 消去 y 得: $k^2 x^2 + (2kb - 4)x + b^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (2kb - 4)^2 - 4k^2 b^2 > 0,$$

$$\therefore kb < 1,$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{b^2}{k^2},$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2b = \frac{4}{k},$$

Q 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$),

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2} = 2, \quad y_1 + y_2 = \frac{4}{k} = 2m,$$

$$\therefore b = \frac{2 - k^2}{k}, \quad m = \frac{2}{k},$$

Q $m > 0$,

$$\therefore k > 0,$$

把 $b = \frac{2 - k^2}{k}$ 代入 $kb < 1$, 得 $2 - k^2 < 1$,

$$\therefore k^2 > 1,$$

$$\therefore k > 1,$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查了直线与抛物线的位置关系，考查了韦达定理的应用，属于中档题.

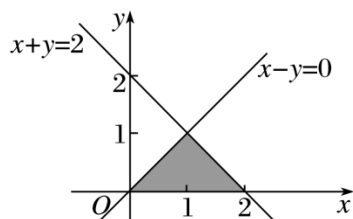
7. D

【解析】

作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，利用数形结合即可得到结论.

【详解】

作出不等式组表示的平面区域如下图阴影部分所示，



$z = 2x + y$ 等价于 $y = -2x + z$ ，作直线 $y = -2x$ ，向上平移，

易知当直线经过点 $(2, 0)$ 时 z 最大，所以 $z_{\max} = 2 \times 2 + 0 = 4$ ，故选 D.

【点睛】

本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义，结合数形结合的数学思想是解决此类问题的基本方法.

8. C

【解析】

设第一天走 a_1 里，则 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项，以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，由题意得 $S_6 = \frac{a_1(1-\frac{1}{2^6})}{1-\frac{1}{2}} = 378$ ，求出 $a_1 = 192$

(里)，由此能求出该人第四天走的路程.

【详解】

设第一天走 a_1 里，则 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项，以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

$$\text{由题意得: } S_6 = \frac{a_1(1-\frac{1}{2^6})}{1-\frac{1}{2}} = 378,$$

解得 $a_1 = 192$ (里)，

$$\therefore a_4 = a_1 \times (\frac{1}{2})^3 = 192 \times \frac{1}{8} = 24 \text{ (里)}.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查等比数列的某一项的求法，考查等比数列等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想，是基础题.

9. B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/596220043105010235>