

延安中学高三数学练习试卷

2025.02

一. 填空题

1. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, 则 $\vec{a}$ 的单位向量的坐标为_____.
2. 方程 $\cos \frac{x}{2} = 1$ 的解集为_____.
3. 已知球 O 的体积为 $36\pi \text{cm}^3$, 则球 O 的表面积为_____ cm^2 .
4. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 5, a_2 = 2, a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} (n \geq 3)$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$ _____.
5. 从二项式 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中随机抽取一项, 则该项的系数是奇数的概率为_____.
6. 平面直角坐标系中, 点 $A(2, 1), P$ 是直线 $2x + y - 7 = 0$ 上的动点, 则 $|AP|$ 的最小值为_____.
7. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} + ax^2 + 1$ 的图像在 $x = 1$ 处的切线与直线 $x + 3y - 1 = 0$ 垂直, 则实数 $a =$ _____.
8. 已知甲罐中有 3 个红球、2 个黑球, 乙罐中有 2 个红球、2 个黑球, 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐, 再从乙罐中随机取出一球. A 表示事件“由甲罐取出的球是黑球”, B 表示事件“由乙罐取出的球是黑球”, 则 $P(B|A) =$ _____.
9. 若对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 不等式 $|x+1| + |x-a| \geq 5$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
10. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 第一象限的 A, B 两点在抛物线上, 且满足 $|BF| - |AF| = 4$, $|AB| = 4\sqrt{2}$. 若线段 AB 中点的纵坐标为 4, 则抛物线的方程为_____.
11. 若不等式 $(mx-1)(x^2-mx-1) \geq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则实数 m 的值为_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 且 BC 边上的高为 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$, 则 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 的最大值是_____.

二. 选择题

13. 复数 z 是纯虚数的一个充分条件为 ()

A. $z = \bar{z}$ B. $z + \bar{z} = 0$ C. $|z-1| = |z+1|$ D. $|z-i| + |z-3i| = 2$

14. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \left\{x \mid \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}$, $N = \left\{x \mid \frac{x-3}{x+1} \leq 0\right\}$, 则集合 $P = \{x \mid |2x+3| \leq 1\}$ 可

表示为 ()

- A. $M \cap N$ B. $M \mid \bar{N}$ C. $M \cup N$ D. $\bar{M} \mid N$

15. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，下列四个命题中假命题是 ()

- A. $P(X > \mu + 1) > P(X < \mu - 2)$
- B. $P(X > \mu) = 0.5$
- C. $P(X \leq \mu) = 0.5$
- D. $P(\mu - 1 < X < \mu) < P(\mu + 1 < X < \mu + 2)$

16. 数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = a$, $a_{n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}a_n\right) (n \in \mathbf{N}^*)$, 给出下列两个命题:

①若数列 $\{a_n\}$ 为常数数列, 则 $a = \pm 1$;

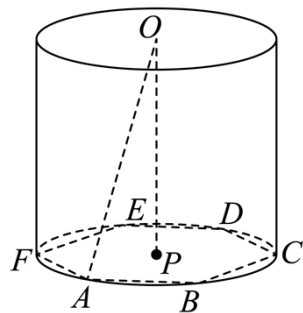
②若 a 不是整数, 任取 $\{a_n\}$ 中的 m 项 a_{k_1} 、 a_{k_2} 、 $\dots$ 、 a_{k_m} ($2 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m$) 构成数列

$\{a_{k_n}\} (1 \leq n \leq m)$, 则数列 $\{a_{k_n}\}$ 是严格增数列, 或者 $\{a_{k_n}\}$ 是严格减数列. 则 ()

- A. ①②都是真命题
B. ①②都是假命题
C. ①是假命题，②是真命题
D. ①是真命题，②是假命题

三. 解答题

17. 已知圆柱的底面圆半径为 r ，上底面圆心为 O ，正六边形 $ABCDEF$ 内接于下底面圆 O_1 . OA 与母线所成角为 30° .



- (1) 已知 $r=3$ ，求圆柱的侧面积 S ；
- (2) 若圆柱体积为 9π ，求点 C 到平面 OEF 的距离.

18. 第二十二届卡塔尔世界杯足球决赛中，阿根廷队通过扣人心弦的点球大战战胜了法国队，某校为了丰

富学生课余生活，组建了足球社团，足球社团为了解学生喜欢足球是否与性别有关，随机抽取了男、女同学各100名进行调查，部分数据如下表所示.

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生	a	40	100
女生	30	d	100
合计	e	f	200

(1) 根据所给数据求出 a 、 d 、 e 、 f 的值，并判断是否有 95% 的把握认为该校学生喜欢足球与性别有

关? (附 $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} P(\chi^2 \geq 3.841) \approx 0.05$)

(2) 社团指导老师从喜欢足球的学生中抽取了 2 名男生和 1 名女生示范点球射门. 已知男生进球的概率为 $\frac{2}{3}$, 女生进球的概率为 $\frac{1}{2}$, 每人射门一次, 假设各人射门相互独立, 求 3 人进球总次数的分布和数学期望.

19. 设 x 是实数, z 是整数, 若 $|x-z| < \frac{1}{2}$, 则称 z 是“在数轴上与 x 距离最近的整数”.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \sqrt{n^2 + n}$, 求证: 数轴上与 a_n 距离最近的整数是 n ;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, 若 c_n 是在数轴上与 b_n

距离最近的整数, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. 平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{2}$.

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 若直线 $m: y = 2x + b$ 与 Γ 有两个公共点 M 、 N , 动点 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, 求点 Q 的轨迹方程;

(3) 若直线 l 与 Γ 只有一个公共点, 且直线 l 与 Γ 的两条渐近线 l_1 、 l_2 分别交于 A 、 B 两点, 则 $\triangle OAB$ 的面积是否为定值? 如果是, 求出这个定值; 如果不是, 请说明理由.

21. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \frac{x}{ae^{x-1}}$.

(1) 若 $a=2$ ，求 $y=f(x)$ 的单调区间；

(2) 是否存在实数 a ，使得 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\frac{a+\ln x}{x}$ 有相同的最大值？若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由；

(3) 已知 $a=1$ ，直线 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=\frac{1+\ln x}{x}$ 共有四个不同的交点，其横坐标分别为

x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$)，证明： $x_1 x_4 = x_2 x_3$ 。

延安中学高三数学练习试卷

2025.02

一. 填空题

1. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, 则 $\vec{a}$ 的单位向量的坐标为_____.

【答案】 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

【解析】

【分析】 求出 $|\vec{a}|$, 可得出 $\vec{a}$ 的单位向量为 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, 求其坐标即可.

【详解】 因为 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, 则 $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$,

所以, $\vec{a}$ 的单位向量的坐标为 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}(2, 1, -1) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

故答案为: $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

2. 方程 $\cos \frac{x}{2} = 1$ 的解集为_____.

【答案】 $\{x | x = 4k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

【解析】

【分析】 利用余弦函数的图象性质解方程 $\cos \frac{x}{2} = 1$ 即可.

【详解】 由 $\cos \frac{x}{2} = 1$ 可得 $\frac{x}{2} = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = 4k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

因此, 方程 $\cos \frac{x}{2} = 1$ 的解集为 $\{x | x = 4k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

故答案为: $\{x | x = 4k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

3. 已知球 O 的体积为 $36\pi \text{cm}^3$, 则球 O 的表面积为_____ cm^2 .

【答案】 36π

【解析】

【分析】 求出球 O 的半径长, 利用球体的表面积公式可求得球 O 的表面积.

【详解】 设球 O 的半径长为 $R \text{cm}$, 则该球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$, 解得 $R = 3$,

所以, 球 O 的表面积为 $4\pi \times 3^2 = 36\pi \text{cm}^2$.

故答案为: 36π .

4. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 5, a_2 = 2, a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} (n \geq 3)$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$ _____.

【答案】 $-3n + 8$

【解析】

【分析】通过递推关系式可变形为 $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$, 可得 $\{a_n - a_{n-1}\}$ 是一个常数列, 利用等差数列的通项公式求解即可.

【详解】已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} (n \geq 3)$, 且 $a_1 = 5$ 和 $a_2 = 2$,

递推式可变形为 $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$, 则 $\{a_n - a_{n-1}\}$ 是一个常数列,

即 $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是一个等差数列, $d = a_2 - a_1 = -3$,

因此通项公式为 $a_n = 5 + (n-1)(-3) = 5 - 3n + 3 = 8 - 3n$.

故答案为: $-3n + 8$.

5. 从二项式 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中随机抽取一项, 则该项的系数是奇数的概率为 _____.

【答案】 $\frac{4}{7}$

【解析】

【分析】写出二项展开式, 确定系数为奇数的项数, 结合古典概型的概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 \cdot x^6 + C_6^1 \cdot x^5 \cdot \frac{1}{x} + C_6^2 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + C_6^3 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^3} + C_6^4 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^4} + C_6^5 \cdot x \cdot \frac{1}{x^5} + C_6^6 \cdot \frac{1}{x^6}$
 $= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6},$

展开式共 7 项, 其中有 4 项的系数为奇数, 故所求概率为 $\frac{4}{7}$.

故答案为: $\frac{4}{7}$.

6. 平面直角坐标系中, 点 $A(2, 1)$, P 是直线 $2x + y - 7 = 0$ 上的动点, 则 $|AP|$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】当 $|AP|$ 与直线 $2x+y-7=0$ 垂直时，点 $A(2,1)$ 与动点 P 之间距离 $|AP|$ 有最小值，通过计算点 A 到直线的距离即可求解.

【详解】已知直线方程为 $2x+y-7=0$ ，点 $A(2,1)$ ，

根据点到直线的距离公式，代入得到：

$$d = \frac{|2 \times 2 + 1 \times 1 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|4 + 1 - 7|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

因此，点 $A(2,1)$ 到直线 $2x+y-7=0$ 的最短距离即 $|AP|$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为： $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

7. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} + ax^2 + 1$ 的图像在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+3y-1=0$ 垂直，则实数 $a =$ _____.

【答案】1

【解析】

【分析】根据导数的几何意义及两直线垂直的斜率关系即可求出 a 的值.

【详解】由 $f(x) = e^{x-1} + ax^2 + 1$ ，得 $f'(x) = e^{x-1} + 2ax$ ，

因为函数 $f(x) = e^{x-1} + ax^2 + 1$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+3y-1=0$ 垂直，

所以 $f'(1) = 1 + 2a = 3$ ，则 $a = 1$.

故答案为：1

8. 已知甲罐中有3个红球、2个黑球，乙罐中有2个红球、2个黑球，先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，再从乙罐中随机取出一球. A 表示事件“由甲罐取出的球是黑球”， B 表示事件“由乙罐取出的球是黑球”，则 $P(B|A) =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{5}$ ## 0.6

【解析】

【分析】由题意可求 $P(A)$ ， $P(AB)$ ，再根据条件概率的计算公式求解即可.

【详解】因为甲罐中有3个红球、2个黑球，所以 $P(A) = \frac{2}{5}$ ，

因为 $P(AB) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ ，所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$ 。

故答案为： $\frac{3}{5}$ 。

9. 若对任意的 $x \in \mathbb{R}$ ，不等式 $|x+1| + |x-a| \geq 5$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____。

【答案】 $(-\infty, -6] \cup [4, +\infty)$

【解析】

【分析】根据绝对值三角不等式得到 $|x+1| + |x-a| \geq |a+1|$ ，即可得到 $|a+1| \geq 5$ ，解得即可。

【详解】因为 $|x+1| + |x-a| \geq |(x+1) - (x-a)| = |a+1|$ ，当且仅当 $(x+1)(x-a) \leq 0$ 时取等号，

因为不等式 $|x+1| + |x-a| \geq 5$ 恒成立，所以 $|a+1| \geq 5$ ，即 $a+1 \geq 5$ 或 $a+1 \leq -5$ ，

解得 $a \geq 4$ 或 $a \leq -6$ ，即 $a \in (-\infty, -6] \cup [4, +\infty)$ 。

故答案为： $(-\infty, -6] \cup [4, +\infty)$

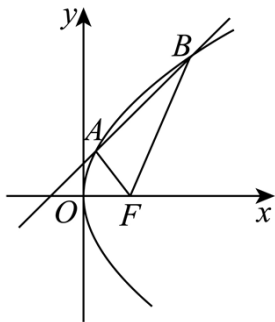
10. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，第一象限的 A 、 B 两点在抛物线上，且满足 $|BF| - |AF| = 4$ ， $|AB| = 4\sqrt{2}$ 。若线段 AB 中点的纵坐标为 4，则抛物线的方程为_____。

【答案】 $y^2 = 8x$

【解析】

【分析】先根据焦半径公式得到 x_1, x_2 的关系，然后根据弦长公式求解出 k_{AB} ，结合两点间斜率公式以及点在抛物线上求解出 p 的值，则抛物线方程可求。

【详解】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，



因为 $|BF| - |AF| = 4$,

所以 $\left(x_2 + \frac{p}{2}\right) - \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) = 4$, 所以 $x_2 - x_1 = 4$,

又因为 $|AB| = \sqrt{1 + k_{AB}^2} \times |x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$, 所以 $k_{AB}^2 = 1$,

因为 A, B 都在第一象限, 所以 $k_{AB} = 1$,

又因为 $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1 + y_2} = 1$ 且 $y_1 + y_2 = 4 \times 2 = 8$,

所以 $2p = 8$, 所以 $p = 4$, 所以抛物线方程为 $y^2 = 8x$,

故答案为: $y^2 = 8x$.

11. 若不等式 $(mx-1)(x^2-mx-1) \geq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则实数 m 的值为_____

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】通过二次函数的性质和方程的根, 列出不等式求出结果.

【详解】解: 若 $m \leq 0$, 则当 x 趋于 $+\infty$ 时, $(mx-1)(x^2-mx-1)$ 趋于 $-\infty$, 不满足题意;

当 $m > 0$ 时, $\frac{1}{m}$ 是方程 $(mx-1)(x^2-mx-1) = 0$ 的一个根,

Q 不等式 $(mx-1)(x^2-mx-1) \geq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

且方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ 的两根不相等,

所以 $x = \frac{1}{m}$ 是方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ 的根,

$$\therefore \left(\frac{1}{m}\right)^2 - m \times \frac{1}{m} - 1 = 0,$$

$$\therefore m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 得 } m = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

此时原不等式等价于 $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (x - \sqrt{2})^2 \geq 0$, 显然 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立,

$\therefore$ 实数 m 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 且 BC 边上的高为 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$, 则 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 的最大值是

【答案】4

【解析】

【分析】由面积公式可得 $a^2 = 2\sqrt{3}bc \sin A$, 再用余弦定理可得 $b^2 + c^2 = 2\sqrt{3}bc \sin A + 2bc \cos A$, 即 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c} = 4 \sin(A + \frac{\pi}{6}) \leq 4$ 得出结果.

【详解】由题, 三角形的面积: $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 = \frac{1}{2} bc \sin A \therefore a^2 = 2\sqrt{3}bc \sin A$

由余弦定理: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

可得: $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A = 2\sqrt{3}bc \sin A + 2bc \cos A$

所以 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c} = \frac{b^2 + c^2}{bc} = 2\sqrt{3} \sin A + 2 \cos A = 4 \sin(A + \frac{\pi}{6}) \leq 4$

所以 $\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$ 的最大值为 4

故答案为 4

【点睛】本题考查了正余弦定理解三角形, 将边的关系转化为三角函数是解题的关键, 属于较难题.

二. 选择题

13. 复数 z 是纯虚数的一个充分条件为 ()

A. $z = \bar{z}$

B. $z + \bar{z} = 0$

C. $|z-1| = |z+1|$

D. $|z-i| + |z-3i| = 2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题可根据纯虚数的定义以及各选项所给条件逐一分析判断.

【详解】若 $z = \bar{z}$, 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $\bar{z} = a - bi$,

由 $z = \bar{z}$ 可得 $a + bi = a - bi$, 即 $2bi = 0$, 所以 $b = 0$,

此时 $z = a$ 为实数, 不是纯虚数, 所以选项 A 错误;

若 $z + \bar{z} = 0$, 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/597012126042010044>