

第五章 导数及其应用 (知识归纳+题型突破)

基础知识归纳

1、平均变化率

(1) 变化率

事物的变化率是相关的两个量的“增量的比值”。如气球的平均膨胀率是半径的增量与体积增量的比值。

(2) 平均变化率

一般地, 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的平均变化率为: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

(3) 如何求函数的平均变化率

求函数的平均变化率通常用“两步”法:

①作差: 求出 $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ 和 $\Delta x = x_2 - x_1$

②作商: 对所求得的差作商, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

2、导数的概念

(1) 定义: 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处瞬时变化率是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 我们称它为函数

$y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$ 即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

(2) 定义法求导数步骤:

① 求函数的增量: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

② 求平均变化率: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;

③ 求极限, 得导数: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

3、导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的导数的几何意义, 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率 k , 即 $k = f'(x_0)$.

4、基本初等函数的导数公式

基本初等函数	导数
$f(x) = c (c \text{ 为常数})$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n (n \in R)$	$f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x (a > 0)$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a^x (a > 0, a \neq 1)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

5、导数的运算法则

若 $f'(x)$, $g'(x)$ 存在, 则有

- (1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- (2) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- (3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

6、复合函数求导

复合函数 $y = f(g(x))$ 的导数和函数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x = y'_u u'_x$, 即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

7、曲线的切线问题

- (1) 在型求切线方程

已知: 函数 $f(x)$ 的解析式. 计算: 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 或者 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程.

步骤: 第一步: 计算切点的纵坐标 $f(x_0)$ (方法: 把 $x = x_0$ 代入原函数 $f(x)$ 中), 切点 $(x_0, f(x_0))$.

第二步: 计算切线斜率 $k = f'(x)$.

第三步: 计算切线方程. 切线过切点 $(x_0, f(x_0))$, 切线斜率 $k = f'(x_0)$.

根据直线的点斜式方程得到切线方程: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

- (2) 过型求切线方程

已知: 函数 $f(x)$ 的解析式. 计算: 过点 $P_1(x_1, y_1)$ (无论该点是否在 $y = f(x)$ 上) 的切线方程.

步骤: 第一步: 设切点 $P_0(x_0, y_0)$

第二步：计算切线斜率 $k = f'(x_0)$ ；计算切线斜率 $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ；

第三步：令 $k = f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ，解出 x_0 ，代入 $k = f'(x_0)$ 求斜率

第三步：计算切线方程.根据直线的点斜式方程得到切线方程： $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

8、函数的单调性与导数的关系（导函数看正负，原函数看增减）

条件	恒有	结论
函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导	$f'(x) \geq 0$	$y = f(x)$ 在 (a, b) 内单调递增
	$f'(x) \leq 0$	$y = f(x)$ 在 (a, b) 内单调递减
	$f'(x) = 0$	$y = f(x)$ 在 (a, b) 内是常数函数

9、求已知函数（不含参）的单调区间

①求 $y = f(x)$ 的定义域

②求 $f'(x)$

③令 $f'(x) > 0$ ，解不等式，求单调增区间

④令 $f'(x) < 0$ ，解不等式，求单调减区间

注：求单调区间时，令 $f'(x) > 0$ （或 $f'(x) < 0$ ）不跟等号.

10、函数的极值

一般地，对于函数 $y = f(x)$ ，

(1) 若在点 $x = a$ 处有 $f'(a) = 0$ ，且在点 $x = a$ 附近的左侧有 $f'(x) < 0$ ，右侧有 $f'(x) > 0$ ，则称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的极小值点， $f(a)$ 叫做函数 $f(x)$ 的极小值.

(2) 若在点 $x = b$ 处有 $f'(b) = 0$ ，且在点 $x = b$ 附近的左侧有 $f'(x) > 0$ ，右侧有 $f'(x) < 0$ ，则称 $x = b$ 为 $f(x)$ 的极大值点， $f(b)$ 叫做函数 $f(x)$ 的极大值.

(3) 极小值点与极大值点通称极值点，极小值与极大值通称极值.

注：极大（小）值点，不是一个点，是一个数.

11、函数的最大（小）值

一般地，如果在区间 $[a, b]$ 上函数 $y = f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，那么它必有最大值与最小值.

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤为：

(1) 求 $f(x)$ 在 (a, b) 内的极值；

(2) 将函数 $f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$ ， $f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

重要题型

题型一：平均变化率与瞬时变化率

例题 1. (2023 下·上海普陀·高二上海市晋元高级中学校考期中) 函数 $y = f(x)$, 其中 $f(x) = 2x^2$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均变化率为 k_1 , 在 $[x_0 - \Delta x, x_0]$ 上的平均变化率为 k_2 , 则 k_1 与 k_2 的大小关系是_____

例题 2. (2023 上·高二课时练习) 自由落体运动的位移 d (单位: m) 与时间 t (单位: s) 满足函数关系 $d = \frac{1}{2}gt^2$ (g 为重力加速度).

- (1) 分别求 $[4, 4.1]$ 、 $[4, 4.01]$ 、 $[4, 4.001]$ 这些时间段内自由落体的平均速度;
- (2) 求 $t = 4$ 时的瞬时速度;
- (3) 求 $t = a$ ($a > 0$) 时的瞬时速度;
- (4) 借助 (3) 的结果, 求 $t = \frac{5}{2}$ 时的瞬时速度.

例题 3. (2023 上·高二课时练习) 从桥上将一小球掷向空中, 小球相对于地面的高度 h (单位: m) 和时间 t (单位: s) 近似满足函数关系 $h = -5t^2 + 15t + 12$. 问:

- (1) 小球的初始高度是多少?
- (2) 小球在 $t = 0$ 到 $t = 1$ 这段时间内的平均速度是多少?
- (3) 小球在 $t = 1$ 时的瞬时速度是多少?
- (4) 小球所能达到的最大高度是多少? 何时达到?

巩固训练

1. (2023 上·高二课时练习) 自由落体运动中, 物体下落的距离 d (单位: m) 与时间 t (单位: s) 近似满足函数关系 $d = 5t^2$.

(1) 求物体在 $[2, 4]$ 时间段内的平均速度;

(2) 求物体在 $t = 3$ 时的瞬时速度;

(3) 求物体在 $t = a (a > 0)$ 时的瞬时速度.

2. (2023 上·高二课时练习) 已知车辆启动后的一段时间内, 车轮旋转的角度和时间 (单位: 秒) 的平方成正比, 且车辆启动后车轮转动第一圈需要 1 秒.

(1) 求车轮转动前 2 秒的平均角速度;

(2) 求车轮在转动开始后第 3 秒的瞬时角速度.

3. (2023 上·高二课时练习) 将石子投入水中, 水面产生的圆形波纹不断扩散.

(1) 当半径 r 从 a 增加到 $a+h (h > 0)$ 时, 求圆周长相对于半径的平均变化率;

(2) 当半径 $r = a$ 时, 求圆周长相对于半径的瞬时变化率.

题型二：定义法求导数

例题 1. (2023 上·上海·高三上海中学校考期中) 若 $f(x) = x^2 + \sin x$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例题 2. (2023 上·高二课时练习) 已知在使用某种杀菌剂 t 小时后室内的细菌数量为

$$f(t) = 10^5 + 10^4 t - 10^3 t^2.$$

(1) 求 $f'(10)$;

(2) $f'(10)$ 的实际意义是什么?

巩固训练

1. (2023 下·上海松江·高二上海市松江一中校考阶段练习) 计算: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+2h) - \sin x}{h} = (\quad)$

A. 0

B. $2 \cos x$

C. $\cos 2x$

D. $2 \cos 2x$

2. (2023 下·上海浦东新·高二校考期末) 设函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处导数存在, 若 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = 6$

则 $f'(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型三：导数的运算

例题 1. (2023 下·上海普陀·高二校考期末) 下列求导运算正确的是 ()

A. $\left(\ln x + \frac{3}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$

B. $(x^2 e^x)' = 2x e^x$

C. $(e^x \cos 2x)' = e^x (\cos 2x - 2 \sin 2x)$

D. $\left(\ln \frac{1}{2} + \ln x\right)' = 2 + \frac{1}{x}$

例题 2. (2023 上海·高二课时练习) 已知 $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, 计算下列函数 $y = h(x)$ 在点 $x = 1$ 处的导数值:

(1) $h(x) = 3f(x) - 5g(x)$;

(2) $h(x) = f(x)g(x)$;

(3) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$;

(4) $h(x) = f(2x+1) + g(3x-1)$.

例题 3. (2023 上海·高二课时练习) 求下列函数 $y = f(x)$ 的导数:

(1) $f(x) = x^2 \sin x$; (2) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$; (3) $f(x) = (x-2)^2$.

巩固训练

1. (2023 下·上海黄浦·高二格致中学校考阶段练习) 已知函数 $y = f(x)$ 导函数为 $y = f'(x)$, 且 $f(x) = 2f'(3)x - 2x^2 + 3\ln x$, 则 $f(1) =$ ()

- A. 21 B. 20 C. 16 D. 11

2. (2023 下·上海黄浦·高三格致中学校考开学考试) 已知函数 $f(x) = 2f'(3) \cdot x - \frac{2}{9}x^2 + \ln x$, 则 $f(1) =$ _____.

3. (2023 上·高二课时练习) 求下列函数 $y = f(x)$ 的导数:

(1) $f(x) = 2x^e - e^2$; (2) $f(x) = e^x \cos x$; (3) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$; (4) $f(x) = \frac{\ln x}{\sin x}$.

题型四：求切线方程

例题 1. (2023 上·上海普陀·高三上海市晋元高级中学校考期中) 曲线 $y = e^x$ 在点 $(1, e)$ 处的切线斜率为 _____.

例题 2. (2023 下·上海嘉定·高二上海市嘉定区第一中学校考期中) 已知曲线 $f(x) = 2x^3 - 3x$, 过点 $(0, 0)$ 作曲线的切线, 则切线方程 _____.

例题 3. (2023 上·上海宝山·高三校考期中) 已知 $f(x) = x \ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的导函数以及驻点.

(2) 求平行于 $y = x - 5$ 的切线方程;

例题 4. (2023·上海虹口·华东师范大学第一附属中学校考三模) 已知函数 $f(x) = ae^x - be^{-x} - (a+1)x$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

(1) 当 $a=2, b=0$ 时, 求函数图象过点 $(0, f(0))$ 的切线方程;

巩固训练

1. (2023 下·上海浦东新·高三上海市实验学校校考开学考试) 已知曲线 $f(x) = 2x^3 - 3x$, 过点 $M(0, 32)$ 作曲线的切线, 则切线的方程为_____.

2. (2023 上·上海·高二校考阶段练习) (1) 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 - \frac{2}{3}f'(-1)x$, 求 $f'(-1)$;

(2) 已知曲线 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程.

3. (2023 上·高二课时练习) 已知 $f(x) = 3x^2$, 分别求曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(-1, 3)$ 和点 $Q(1, 3)$ 处的切线方程.

4. (2023 下·上海浦东新·高二上海市川沙中学校考开学考试) (1) 曲线 $y = 1 - \frac{2}{x+2}$ 在点 $(-1, -1)$ 处的切线方程.

(2) 曲线 $f(x) = x^3 + x - 2$ 的一条切线平行于直线 $y = 4x - 1$, 求切点 P_0 的坐标.

题型五：根据切线的斜率求参数

例题 1. (2023 上·上海青浦·高三校考期中) 已知 $a \in \mathbb{R}$, 曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(1, 2)$ 且在该点处的切线方程为 $ax + y - 5 = 0$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 2}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例题 2. (2023 下·上海杨浦·高三复旦附中校考阶段练习) 已知 a, b 为实数, 函数 $y = \ln x + \frac{a}{x}$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $4y - x - b = 0$, 则 ab 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

例题 3. (2023 上·上海嘉定·高三校考期中) 已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的图像在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $y = f(x)$ 的单调性;

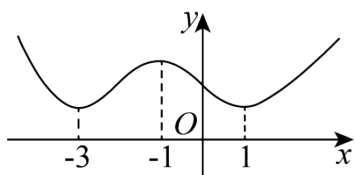
巩固训练

1. (2023 下·上海松江·高二上海市松江二中校考期中) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像在点 $M(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y = 2x + 1$, 则 $f(1) + f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. (2023·上海·高二专题练习) 函数 $f(x) = x^3 - a \ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x + y + 1 = 0$ 平行, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型六：函数的单调性与图象

例题 1. (2023 上·上海松江·高三统考期末) 函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, $y = f'(x)$ 为函数 $y = f(x)$ 的导函数, 则不等式 $\frac{f'(x)}{x} < 0$ 的解集为 ()



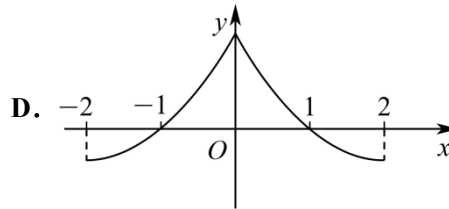
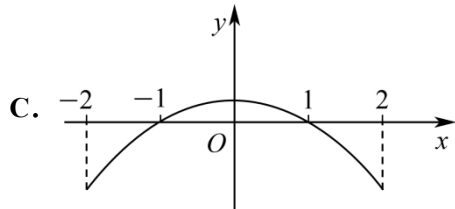
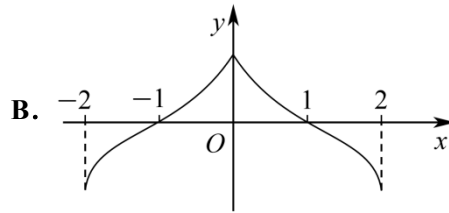
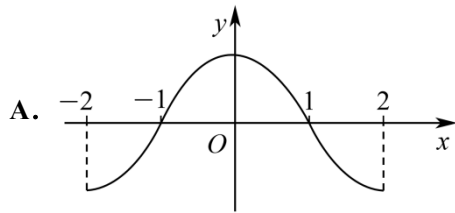
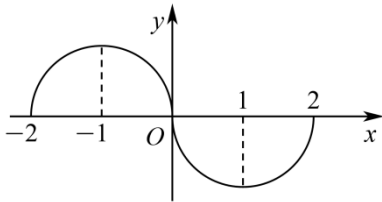
A. $(-3, -1)$

B. $(0, 1)$

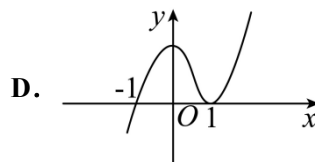
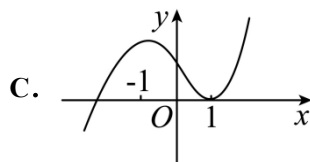
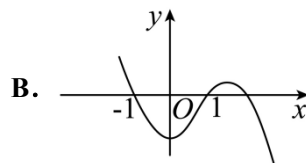
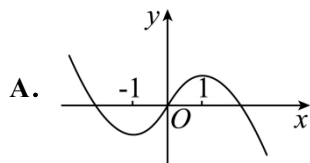
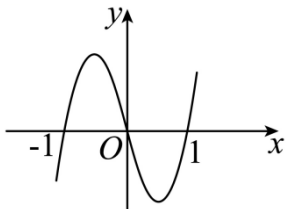
C. $(-3, -1) \cup (0, 1)$

D. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

例题 2. (2023 下·高二单元测试) 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 图像如图所示, 则 $f(x)$ 的图像是图四个图像中的 ().



例题 3. (2022 下·上海浦东新·高二校考期末) 已知函数 $y = xf'(x)$ 的图象如图所示 (其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 则下面四个图象中, $y = f(x)$ 的图象大致是 ()



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/597116166052006162>