专题 07 圆中的重要模型--圆中的内切圆和外接圆模型

模型 1、内切圆模型

【模型解读】

内切圆：平面上的多边形的每条边都能与其内部的一个圆形相切，该圆就是该多边形的内切圆，这时称这个多边形为圆外切多边形。它亦是该多边形内部最大的圆形。内切圆的圆心被称为该多边形的内心。

三角形内切圆圆心：在三角形中，三个角的角平分线的交点是内切圆的圆心，圆心到三角形各个边的垂线段相等。正多边形必然有内切圆，而且其内切圆的圆心和外接圆的圆心重合，都在正多边形的中心。

【常见模型及结论】

1）三角形的内切圆模型

条件：如图 1，⊙O 为三角形 ABC 的内切圆（即 O 为三角形 ABC 的内心），⊙O 的半径为 r。

结论：①点 O 到三角形 ABC 的三边距离相等；② $\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$；③$r=\frac{2S_{\Delta ABC}}{C_{\Delta ABC}}$。

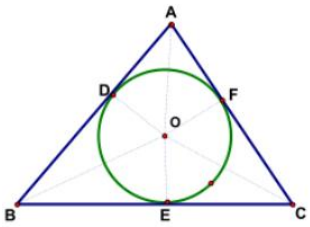


图 1

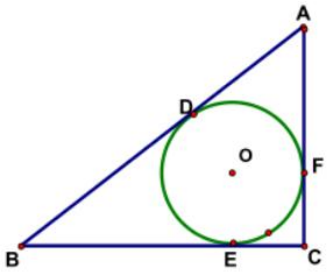


图 2

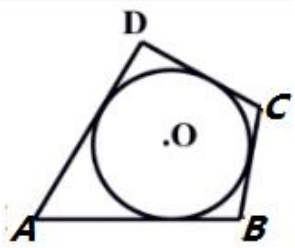


图 3

2）直角三角形的内切圆模型

条件：如图 2，⊙O 为 $Rt\Delta ABC$ 的内切圆（即 O 为三角形 ABC 的内心），⊙O 的半径为 r。

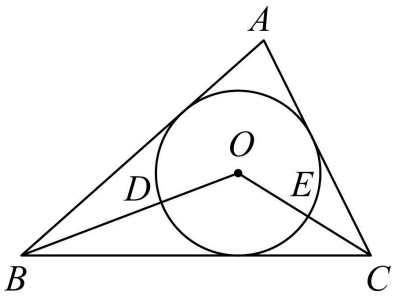
结论：①点 O 到三角形 ABC 的三边距离相等；② $\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$；③$r=\frac{AC+BC-AB}{2}$；

3）四边形的内切圆模型

条件：如图 3，⊙O 是四边形 $ABCD$ 的内切圆。

结论： $AB+CD=AD+BC$。

例 1.（2023·黑龙江鸡西·校考三模）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=80°$，半径为 3cm 的⊙O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，连接 OB,OC，分别交⊙O 于 D，E 两点，则 $\overset{\frown}{DE}$ 的长为_____.（结果用含 π 的式子表示）



【答案】$\frac{13\pi}{6}$

【分析】根据内切圆圆心是三角形三条角平分线的交点，得到$\angle DOE$的大小，然后用弧长公式即可求解.

【详解】∵内切圆圆心是三条角平分线的交点，

∴$\angle ABO=\angle CBO$；$\angle ACO=\angle BCO$设$\angle ABO=\angle CBO=\alpha$，$\angle ACO=\angle BCO=\beta$，

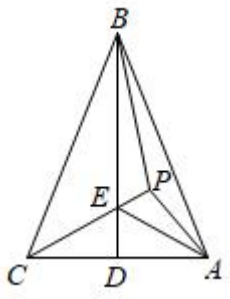
在$\triangle ABC$中：$\angle A+2\alpha+2\beta=180°$①，在$\triangle BOC$中：$\angle DOE+\alpha+\beta=180°$②，

由①②得：$\angle DOE=90°+\frac{1}{2}\angle A=90°+\frac{1}{2}\times 80°=130°$，

$l_{\overset{\frown}{DE}}=\frac{130°}{180°}\times\pi\times 3=\frac{13}{6}\pi$　故答案为：$\frac{13}{6}\pi$.

【点睛】本题考查内心的性质，求弧长；解题关键是根据角平分线算出$\angle DOE$的度数.

例 2.（2022 秋·安徽·九年级统考期末）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，过点B作$BD\perp AC$于点D，P是$\triangle ABC$内一点，且$\angle BPC=108°$，连接CP交BD于点E，若点P恰好为$\triangle ABE$内心，则$\angle PEB$的度数为（　）



A．36°　　B．48°　　C．60°　　D．72°

【答案】C

【分析】根据内心定义可知PB，PE，PA分别是$\angle ABE$，$\angle AEB$，$\angle BAE$的角平分线，推导出$\angle BAE=36°$，由等腰三角形三线合一的性质可得$\angle ABE=\angle CBE$，由全等三角形的判定及其性质可得

$\triangle ABE\cong\triangle CBE\left(SAS\right)$,$\angle BCE=\angle BAE=36°$，继而可得$\angle CBP=36°$，$\angle CBE=24°$，进而即可求解.

【详解】∵点P恰好为$\triangle ABE$内心，

∴ PB， PE， PA 分别是 $\angle ABE$， $\angle AEB$， $\angle BAE$ 的角平分线，

∴ $\angle PBE+\angle PEB+\angle PAE=90°$，

又 $\angle BPC=108°$，∴ $\angle PBE+\angle PEB=72°$，∴ $\angle PAE=18°$，∴ $\angle BAE=36°$，

∵ $AB=BC$， $BD\perp AC$ 于点 D，∴点 D 是 AC 的中点， $\angle ABE=\angle CBE$，

又 $BE=BE$， $AB=CB$，∴ $\triangle ABE\cong\triangle CBE\ (SAS)$，∴ $\angle BCE=\angle BAE=36°$，

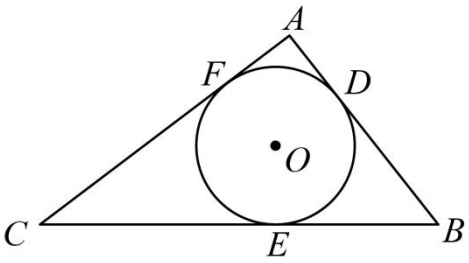
又 $\angle BPC=108°$，∴ $\angle CBP=180°-108°-36°=36°$，

又 $\angle CBE=\angle ABE=2\angle PBE$，∴ $\angle CBE=24°$，

∴ $\angle PEB=\angle BCE+\angle CBE=60°$，故选：C.

【点睛】本题考查三角形内心的定义及其性质，全等三角形的判定及其性质、等腰三角形三线合一的性质，三角形内角和定理，解题的关键是熟练掌握所学知识点.

例 3.（2023 秋·河南漯河·九年级统考期末）如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别为 D,E,F，且 $\angle A=90°$，$BC=5$， $CA=4$，则 $\odot O$ 的半径是_____.



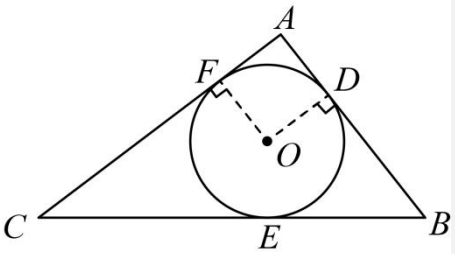
【答案】1

【分析】先根据勾股定理求出 $AB=3$，由切线长定理得 $BD=BE$，$AD=AF$，$CF=CE$，设 $OD=OF=AF=AD=x$，则 $CF=CE=4-x$， $BD=BE=3-x$，然后根据 $CE+BE=5$，求解即可.

【详解】解：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，∵ $\angle A=90°$， $BC=5$， $CA=4$，∴ $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=3$，

∵ $\odot O$ 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别为 D，E，F，

∴ $BD=BE$， $AD=AF$， $CF=CE$，如图，连接 OD， OF，



∵ $\odot O$ 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆，∴ $OD\perp AB$，$OF\perp AC$，$OD=OF$，

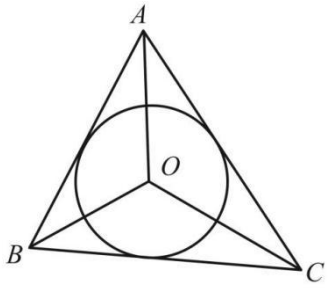
∴ $\angle ODA=\angle A=\angle OFA=90°$，∴四边形 $ADOF$ 是正方形，

设 $OD=OF=AF=AD=x$，则 $CF=CE=4-x$，$BD=BE=3-x$，

∵ $CE+BE=5$，∴ $4-x+3-x=5$，∴ $x=1$，则 $\odot O$ 的半径为 1．故答案为：1．

【点睛】本题考查三角形的内切圆与内心，勾股定理，正方形的判定与性质，切线长定理等知识，解题的关键是熟练掌握切线长定理．

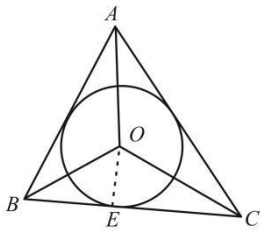
例 4．（2023 秋·辽宁葫芦岛·九年级统考期末）如图，点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\angle A=60°$，$OB=3$，$OC=6$，$BC=3\sqrt{7}$，则 $\odot O$ 的半径为_____．



【答案】$\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

【分析】过 O 作交 BC 于 E，设 $BE=x$，在 $Rt\triangle OBE$ 和 $Rt\triangle OCE$ 中，运用勾股定理即可解答；

【详解】过 O 作交 BC 于 E，设 $BE=x$



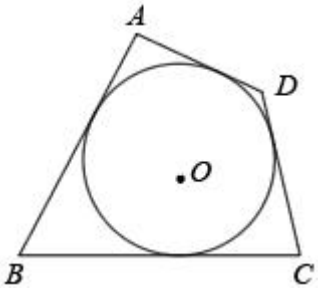
∵ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，$OB=3$，$OC=6$，$BC=3\sqrt{7}$

在 $Rt\triangle OBE$ 中，由勾股定理可得：$3^2=x^2+r^2$ 在 $Rt\triangle OCE$ 中，由勾股定理可得：$r^2+(3\sqrt{7}-x)^2=6^2$

故 $3^2-x^2+(3\sqrt{7}-x)^2=36$ 解得 $x=\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$ 故 $r=\sqrt{3^2-x^2}=\sqrt{\dfrac{27}{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$ 故答案为 $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

【点睛】该题考查了角平分线的性质，勾股定理，圆的基本性质，解答该题的关键是掌握该部分知识点．

例 5．（2023·江苏南京·九年级校联考阶段练习）如图，AB、BC、CD、DA 都是 $\odot O$ 的切线．若 $AD=3$，$BC=6$，则 $AB+CD$ 的值是_____．



【答案】9

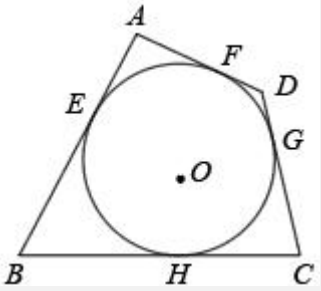
【分析】根据切线长定理，可得 $AF=AE,BE=BH,CH=CG,DG=DF$，由此即可解决问题.

【详解】∵AB、BC、CD、DA 都是⊙O 的切线，∴可以假设切点分别为 E、H、G、F，

∴ $AF=AE,BE=BH,CH=CG,DG=DF$，

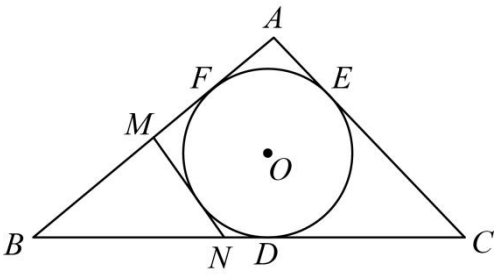
∴ $AD+BC=AF+DF+BH+CH=AE+BE+DG+CG=AB+CD$，

∵ $AD=3$， $BC=6$，∴ $AB+CD=AD+BC=3+6=9$，故答案为：9.



【点睛】本题考查了切线长定理，考查了数学运算能力.

例 6.（2023·成都市九年级期中）如图，⊙O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，D、E、F 为切点，$AB=18\text{cm}$，$BC=20\text{cm}$，$AC=12\text{cm}$， MN 切⊙O 交 AB 于 M， 交 BC 于 N，则 $\triangle BMN$ 的周长为（　）



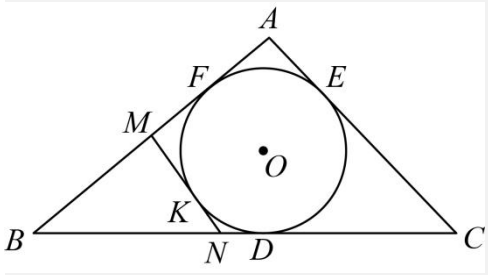
A． 20cm　　B． 22cm　　C． 24cm　　D． 26cm

【答案】D

【分析】利用切线长定理得到等边，再利用给出的三条边长，设未知数列方程组，计算出边长，再利用等边换边得到 $\triangle BMN$ 的周长.

【详解】∵⊙O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，AB、AC、BC 是⊙O 的切线，

又∵ MN 切⊙O 于点 K，∴ $AF=MK$、$AE=AF$、$CE=CD$、$ND=NK$、$BF=BD$，



$\therefore \triangle BMN$ 的周长为：$BM+MN+BN=BM+MK+NK+BN=(BM+MF)+(BN+ND)=BF+BD$

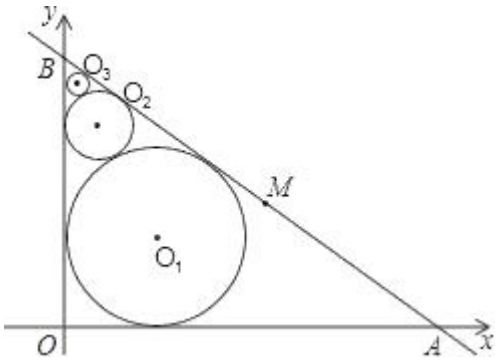
设 $AE=AF=a$，$BF=BD=b$，$CE=CD=c$，

则 $AB=18=b+a$、$BC=20=b+c$、$AC=12=a+c$，

解得 $\begin{cases}a=5\\b=13\\c=7\end{cases}$，$\therefore \triangle BMN$ 的周长为：$BF+BD=2b=26$ cm．故选 D.

【点睛】本题考查切线长定理及边长的计算，需要理清目标和条件，正确且有条理的计算是解题的关键.

例 7.（2023·四川宜宾·九年级专题练习）如图，在直角坐标系中，一直线 l 经过点 M（$\sqrt{3}$，1）与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，且 MA＝MB，可求得△ABO 的内切圆⊙O_1 的半径 $r_1=\sqrt{3}-1$；若⊙O_2 与⊙O_1、l、y 轴分别相切，⊙O_3 与⊙O_2、l、y 轴分别相切，…，按此规律，则⊙O_{2014} 的半径 r_{2014}＝_____.



【答案】$\dfrac{\sqrt{3}-1}{3^{2013}}$

【分析】连接 OO_1、AO_1、BO_1，作 $O_1D\perp OB$ 于 D，$O_1E\perp AB$ 于 E，$O_1F\perp OA$ 于 F，将三角形 ABO 分解成三个三角形，再根据三个三角形的面积之和等于△ABO 的面积，即可得出半径的值，再根据题意依次列出⊙O_2，⊙O_3…的半径大小，找出规律即可.

【详解】连接 OO_1、AO_1、BO_1，作 $O_1D\perp OB$ 于 D，$O_1E\perp AB$ 于 E，$O_1F\perp OA$ 于 F，如图所示：

则 $O_1D=O_1E=O_1F=r_1$，

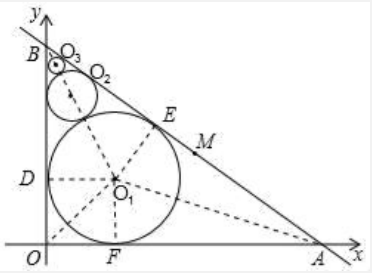
∵M 是 AB 的中点，∴B（0，2），A（$2\sqrt{3}$，0），则 $S_{\triangle OO1B}=\frac{1}{2}\times OB\times r_1=r_1$，

$S_{\triangle AO1O}=\frac{1}{2}\times AO\times r_1=\sqrt{3}r_1$　　$S_{\triangle AO1B}=\frac{1}{2}\times AB\times n=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}\times r_1=2r_1$　　$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

∵$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle OO_1B}+S_{\triangle AO_1O}+S_{\triangle AO_1B}=(3+\sqrt{3})r_1=2\sqrt{3}$ ∴ $r_1=\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

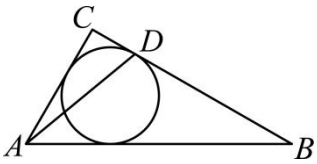
同理得：$r_2=\frac{\sqrt{3}-1}{3}, r_3=\frac{\sqrt{3}-1}{3^2}$…∴ $r_n=\frac{\sqrt{3}-1}{3^{n-1}}$

依此类推可得：⊙O_{2014}的半径 $r_{2014}=\frac{\sqrt{3}-1}{3^{2013}}$ 故答案为$\frac{\sqrt{3}-1}{3^{2013}}$



【点睛】本题考查的是三角形的内切圆、勾股定理、规律型，解此类题目时要根据题意列出等式，适当地对图形进行分解，总结出规律是解题的关键.

例 8.（2023·广东东莞·九年级校考期中）如图，在内切圆半径为 1 的直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，内切圆与 BC 边切于点 D，则 A 到 D 的距离 $AD=$（ ）

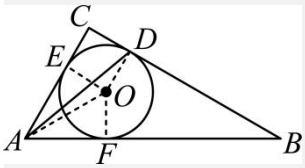


A．$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$　　B．$\sqrt{3+3\sqrt{3}}$　　C．$\sqrt{3+4\sqrt{3}}$　　D．$\sqrt{5+2\sqrt{3}}$

【答案】D

【分析】取内切圆的圆心 O，连接圆心与切点，由 $\angle C=90°$，$\angle B=30°$ 可得 $\angle BAC=60°$，再根据内切圆的圆心的是三角形三条角平分线的交点，可知 $\angle OAE=30°$，从而得到 $AE=\sqrt{3}$，$CE=1$，$CD=1$，再用勾股定理即可求解.

【详解】解：取内切圆的圆心 O，与 AC，AB 的切点 E、F，连接 OD、OE、OF.



∵ $\angle C=90°$，$\angle B=30°$，∴ $\angle BAC=60°$，

∵内切圆的圆心的是三角形三条角平分线的交点，∴ $\angle OAE=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$

又∵ $OE=1$，$OE\perp AC$（切线的性质），∴ $AE=\sqrt{3}$，

∵ $OE\perp AC$，$OD\perp BC$，$\angle C=90°$，∴四边形 $CDOE$ 是矩形，

又∵$OD=OE$，∴四边形 $CDOE$ 是正方形，∴$CE=CD=OE=1$，　∴$AC=AE+CE=\sqrt{3}+1$，

在 $Rt\triangle ACD$ 中，$\angle C=90°$，∴ $AC^2+CD^2=AD^2$，

∴ $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+1^2}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$，故选：D.

【点睛】本题考查勾股定理，正方形的判定与性质，三角形的内切圆，切线的性质等知识，根据题意正确画出的辅助线是解题的关键.

模型 2、多边形的外接圆模型

【模型解读】

外接圆：与多边形各顶点都相交的圆叫做多边形的外接圆，通常是针对一个凸多边形来说的，如三角形，若一个圆恰好过三个顶点，这个圆就叫作三角形的外接圆，此时圆正好把三角形包围。

三角形外接圆圆心：即做三角形三条边的垂直平分线（两条也可，两线相交确定一点）。

【常见模型及结论】

1）三角形的外接圆模型

条件：如图 1，⊙O 为三角形 ABC 的外接圆（即 O 为三角形 ABC 的外心）。

结论：①$OA=OB=OC$；②$\angle BOC=2\angle BAC$。

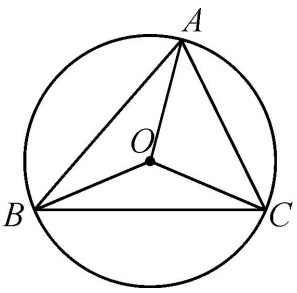


图 1

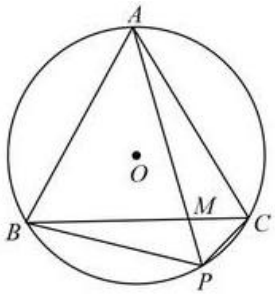


图 2

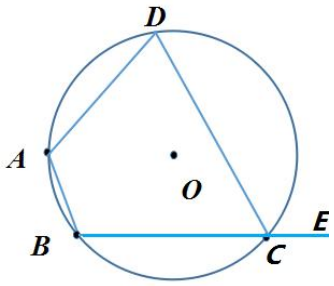


图 3

2）等边三角形的外接圆模型

条件：如图 2，点 P 为等边三角形 ABC 外接圆劣弧 BC 上一点。

结论：①$\angle BPC=120°$，PM 平分 $\angle BPC$；②$PA=PB+PC$；③$\dfrac{1}{PM}=\dfrac{1}{PB}+\dfrac{1}{PC}$；

3）四边形的外接圆模型

条件：如图 3，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形。

结论：①$\angle ABC+\angle ADC=180°$；$\angle BAD+\angle DCB=180°$；②$\angle DAB=\angle DCE$。

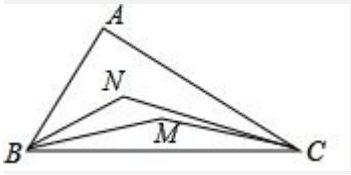
例 1.（2023·黑龙江·校联考模拟预测）△ABC 中，$\angle A=80°$，点 M 是△ABC 的外心，点 N 是△ABC 的内心，连接 BM，CM，BN，CN，则 $\angle BMC$ 与 $\angle BNC$ 的差为（　　）

A．30°　　B．35°　　C．40°　　D．45°

【答案】A

【分析】分别求出 $\angle BMC=2\angle A=160°$，$BNC=130°$,然后得出结果.

【详解】解：如图，∵点 M 是△ABC 的外心，∴$\angle BMC=2\angle A=160°$，



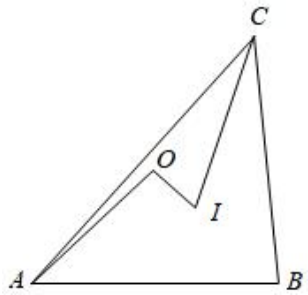
∵点 N 是△ABC 的内心，∴∠BNC＝180°－（∠NBC+∠NCB）

＝180°$-\frac{1}{2}$（∠ABC+∠ACB）＝180°$-\frac{1}{2}$（180°－∠A）＝130°，

∴∠BMC－∠BNC＝160°－130°＝30°．故选：A．

【点睛】本题考查三角形的内心和外心，解题关键掌握内心（内切圆圆心）和外心（外接圆圆心）的定义．

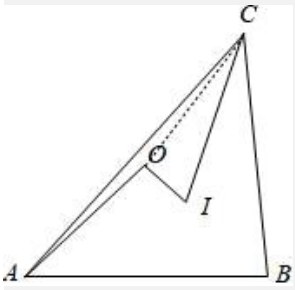
例 2．（2023 秋·河北邢台·九年级校联考期末）如图，点 O，I 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的外心、内心，若 $\angle BAC=8\angle OAC=48°$，则 $\angle BCI$ 的度数为_____．



【答案】24°/24 度

【分析】连接 OC，先计算出 $\angle OAC=6°$，再利用外心性质和等腰三角形的性质得到 $\angle OCA=\angle OAC=6°$，则 $\angle AOC=168°$，利用圆周角定理得到 $\angle ABC=84°$，接着计算出 $\angle ACB=48°$，再根据三角形内心即可解决问题．

【详解】解：连接 OC，如图，



∵$8\angle OAC=48°$，∴$\angle OAC=6°$，∵O 点为 $\triangle ABC$ 的外心，∴$OA=OC$，∴$\angle OCA=\angle OAC=6°$，

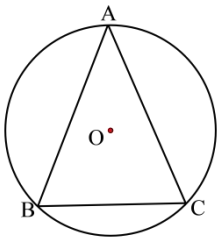
∴$\angle AOC=180°-6°-6°=168°$，∴$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=84°$，

∵$\angle ACB+\angle CAB+\angle ABC=180°$，∴$\angle ACB=180°-48°-84°=48°$，

∵I 为 $\triangle ABC$ 的内心，∴CI 平分 $\angle ACB$，∴$\angle BCI=\frac{1}{2}\angle ACB=24°$．故答案为：24°．

【点睛】本题考查了三角形的内切圆与内心，三角形的外接圆与外心，圆周角定理，解决本题的关键是掌握内心与外心定义．

例 3．（2023·湖北武汉·九年级阶段练习）如图，等腰△ABC 内接于⊙O，AB=AC=$4\sqrt{5}$，BC=8，则⊙O 的半径为_____．



【答案】5cm

【分析】作 AD⊥BC 于 D，根据等腰三角形的性质得 BD=CD=$\frac{1}{2}$BC=4，再利用三角形外心的定义得到△ABC 的外接圆的圆心在 AD 上，连结 OB，设⊙O 的半径为 r，利用勾股定理，在 Rt△ABD 中计算出 AD=8，然后在 Rt△OBD 中得到 $4^2+(8-r)^2=r^2$，再解关于 r 的方程即可；

【详解】解：

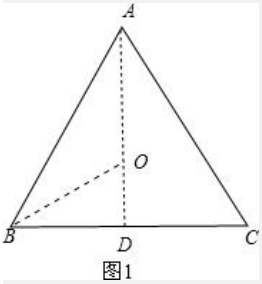


图1

如图 1，作 AD⊥BC 于 D，∵AB=AC，∴BD=CD=$\frac{1}{2}$BC=4，∴△ABC 的外接圆的圆心在 AD 上，

连结 OB，设⊙O 的半径为 r，在 Rt△ABD 中，∵AB=$4\sqrt{5}$，BD=4，∴AD=$\sqrt{AB^2-BD^2}$ =8，

在 Rt△OBD 中，OD=AD-OA=8-r，OB=r，BD=4，∴$4^2+(8-r)^2=r^2$，解得 r=5，

即△ABC 的外接圆的半径为 5；

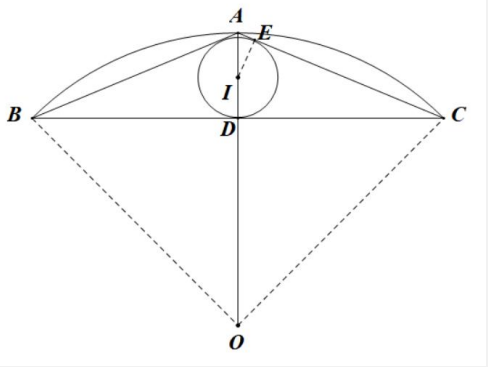
【点睛】本题考查三角形的外接圆和外心，解题关键证明等腰三角形底边上的高经过三角形外接圆的圆心.

例 4.（2022 春·江苏·九年级期末）$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=13$，$BC=24$，点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，则 $OI=$_____.

【答案】14.3

【分析】如图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 交于点 D，由等腰三角形得点 I、点 O 都在直线 AD 上，连接 OB、OC，过点 I 作 $IE\perp AC$ 交于点 E，设 $OA=OB=OC=R$，$ID=IE=r$，根据勾股定理求出 $AD=5$，则 $OD=R-5$，$IA=5-r$，由勾股定理求出 R 的值，证明 $\triangle AEI\sim ADC$ 由相似三角形的性质得 $\frac{IE}{CD}=\frac{IA}{AC}$，求出 r 的值，即可计算 $OI=OA-IA$.

【详解】如图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 交于点 D，



∵ $AB=AC=13$，$BC=24$，∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形，∴ $BD=CD=\frac{1}{2}BC=12$，

∵点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，∴点 I、点 O 都在直线 AD 上，

连接 OB、OC，过点 I 作 $IE\perp AC$ 交于点 E，设 $OA=OB=OC=R$，$ID=IE=r$，

在 $Rt\triangle ADC$ 中，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$，∴ $OD=R-5$，$IA=5-r$，

在 $Rt\triangle ODC$ 中，$R^2-(R-5)^2=12^2$，解得：$R=16.9$，

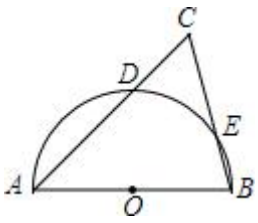
∵ $\angle IAE=\angle CAD$，$\angle AEI=\angle ADC=90°$，∴ $\triangle AEI\sim ADC$，

∴ $\frac{IE}{CD}=\frac{IA}{AC}$，即 $\frac{r}{12}=\frac{5-r}{13}$，解得：$r=2.4$，∴ $IA=5-2.4=2.6$，

∴ $OI=OA-IA=16.9-2.6=14.3$．故答案为：14.3．

【点睛】本题考查内切圆与外接圆，等腰三角形的性质以及相似三角形的判定与性质，掌握内切圆的圆心为三角形三条角平分线的交点，外接圆圆心为三角形三条垂直平分线的交点是解题的关键．

例 5．（2023.广东九年级期中）如图，在△ABC 中，$\angle C$=60°，以 AB 为直径的半圆 O 分别交 AC，BC 于点 D，E，已知⊙O 的半径为 $\sqrt{3}$．（1）求证：△CDE∽△CBA；（2）求 DE 的长．

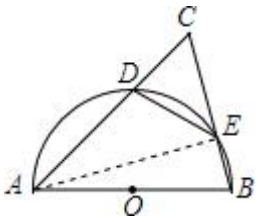


分析 （1）由圆内接四边形的外角等于它的内对角知∠CED=∠A（或∠CDE=∠B），又有∠C=∠C，故△CDE∽△CBA；（2）连接 AE．由（1）中△CDE∽△CBA 得 DE：BA=CE：CA，由于直径对的圆周角是直角，有∠AEB=∠AEC=90°；在 Rt△AEC 中，有∠C=60°，∠CAE=30°．则 DE：BA=CE：CA=1：2，即 DE=$\sqrt{3}$．

解答 （1）证明：∵四边形 ABED 为⊙O 的内接四边形，

∴∠CED=∠A（或∠CDE=∠B）；又∠C=∠C，∴△CDE∽△CBA.

（2）解：连接 AE.



由（1）得△CDE∽△CBA，∴DE：BA=CE：CA，

∵AB 为⊙O 的直径，∴∠AEB=∠AEC=90°.

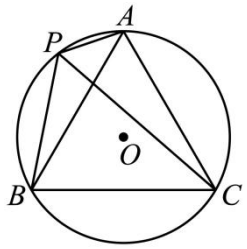
在 Rt△AEC 中，∵∠C=60°，∴∠CAE=30°；

∴DE：BA=CE：CA=1：2，即 DE=$\sqrt{3}$.

点评 本题考查了圆内接四边形的性质、相似三角形的判定和性质、圆周角定理，直角三角形的性质等知识的综合应用能力.

例 6.（2023 湖北省荆门市九年级上期中）如图，A、P、B、C是⊙O 上的四个点，$\angle APC=\angle CPB=60°$.

(1)判断 $\triangle ABC$ 的形状，并证明你的结论；(2)探究 PA、PB、PC之间的数量关系，并证明你的结论.



【答案】(1)等边三角形，见解析(2) $PC=PA+PB$，见解析

【分析】（1）根据圆周角定理得到 $\angle ABC=\angle APC=60°$，$\angle BAC=\angle CPB=60°$，根据等边三角形的判定定理证明；（2）在 PC 上截取 $PH=PA$，得到 $\triangle APH$ 为等边三角形，证明 $\triangle APB\cong\triangle AHC$，根据全等三角形的性质，结合图形证明即可.

【详解】（1）解：$\triangle ABC$ 是等边三角形，理由如下：

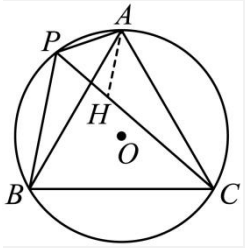
由圆周角定理得，$\angle ABC=\angle APC=60°$，$\angle BAC=\angle CPB=60°$，∴$\triangle ABC$ 是等边三角形；

（2）解：$PC=PA+PB$，理由如下：在 PC 上截取 $PH=PA$，

∵$\angle APC=60°$，∴$\triangle APH$ 为等边三角形，∴$AP=AH$，$\angle AHP=60°$，

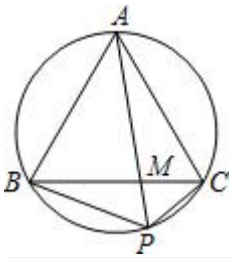
在 $\triangle APB$ 和 $\triangle AHC$ 中，$\begin{cases}\angle ABP=\angle ACH\\ \angle APB=\angle AHC=120°\\ AP=AH\end{cases}$，∴$\triangle APB\cong\triangle AHC(\text{AAS})$

∴ $PB=HC$，∴ $PC=PH+HC=PA+PB$．



【点睛】本题考查的是圆周角定理，全等三角形的判定和性质，掌握在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半是解题的关键．

例 7．（2023 广东中考模拟）如图，点 P 为等边△ABC 外接圆劣弧 BC 上一点．（1）求∠BPC 的度数；（2）求证：$PA=PB+PC$；（3）设 PA，BC 交于点 M，若 $AB=4$，$PC=2$，求 CM 的长度．



【答案】（1）∠$BPC=120°$，（2）证明见解析；（3）$CM=\frac{-2+2\sqrt{13}}{3}$．

【分析】（1）由圆周角定理得∠BPC 与∠BAC 互补；

（2）在 PA 上截取 $PD=PC$，可证明△ACD≌△BCP，则 $AD=PB$，从而得出 $PA=PB+PC$；

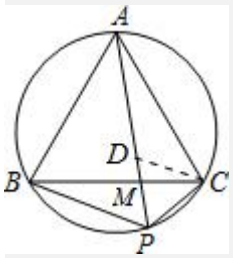
（3）容易得到△CDM∽△ACM，所以 CM：$AM=DM$：$MC=DC$：$AC=2$：$4=1$：2，设 $DM=x$，则 $CM=2x$，$BM=4-2x$，$PM=2-x$，$AM=4x$，$AD=AM-DM=4x-x=3x$，△BPM∽△ACM，所以 BP：$AC=PM$：CM，即 $3x$：$4=(2-x)$：$2x$，解此分式方程求出 x．

【详解】解：（1）∵△ABC 为等边三角形，∴∠$BAC=60°$，

∵点 P 为等边△ABC 外接圆劣弧 BC 上一点，

∴四边形 $ABPC$ 是圆的内接四边形∴∠BPC+∠$BAC=180°$，∴∠$BPC=120°$，

（2）证明：连结 CD．在 PA 上截取 $PD=PC$，



∵∠ABC=∠$APC=60°$，∴△PCD 为等边三角形，∴∠PCD=∠$ACB=60°$，$CP=CD$，

∴∠PCD-∠DCM=∠ACB-∠DCM，即∠ACD=∠BCP，

在△ACD 和△BCP 中，$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACD=\angle BCP \\ CP=CD \end{cases}$，∴△$ACD$≌△$BCP$，∴$AD=PB$，

∵$PA=AD+DP$，$DP=PC$，∴$PA=PB+PC$；

（3）∵△PCD 和△ABC 都为等边三角形，∴$\angle MDC=\angle ACM=60°$，$CD=PC$，

又∵$\angle DMC=\angle CMA$，∴△CDM∽△ACM，$AB=4$，$PC=2$，

∴CM：$AM=DM$：$MC=DC$：$AC=PC$：$AC=2$：$4=1$：2，

设 $DM=x$，则 $CM=2x$，$BM=4-2x$，$PM=2-x$，$AM=4x$，$AD=AM-DM=4x-x=3x$

∵$\angle BMP=\angle CMA$，$\angle PBM=\angle CAM$，∴△BPM∽△ACM，

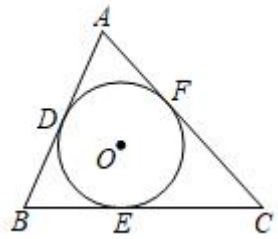
∴BP：$AC=PM$：CM，即 $3x$：$4=(2-x)$：$2x$，

解得 $x=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$（舍去负值），∴$CM=\frac{-2+2\sqrt{13}}{3}$．

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、圆周角定理以及等边三角形的性质，是一个综合题，难度较大．

课后专项训练

1.（2023·湖北恩施·九年级统考期末）如图，$\triangle ABC$ 的内切圆⊙O 与 AB，BC，CA 分别相切于点 D，E，F，且 $AD=BD=2$，$EC=3$，则$\triangle ABC$ 的周长为（　）



A．10　　B．10　　C．14　　D．16

【答案】C

【分析】根据切线长定理得到 $AF=AD=2$、$BE=BD=2$、$CF=CE=3$，然后根据三角形的周长公式计算即可.

【详解】解：∵$\triangle ABC$ 的内切圆⊙O 与 AB，BC，CA 分别相切于点 D，E，F，

∴$AF=AD=2$、$BE=BD=2$、$CF=CE=3$∴$BC=BE+CE=5$，$AB=AD+BD=4$，$AC=BF+FC=BC=5$，

∴$\triangle ABC$ 的周长$=2+2+5+5=14$．故答案为 C.

【点睛】本题考查的是三角形的内切圆与内心、切线长定理等知识点，灵活利用切线长定理是解题答本题的关键.

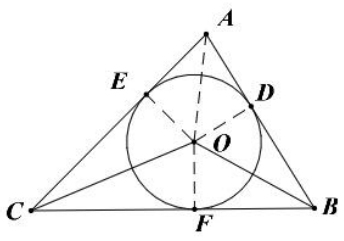
2.（2023 春·湖北九年级课时练习）已知 $\triangle ABC$ 的内切圆⊙O 的半径为 $\sqrt{3}$，且 $\angle BOC=120°$，$\triangle ABC$ 的周长为 16，则 BC 的长为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【答案】C

【分析】根据题意，画出图形，，过点 O 作 $OD\perp AB$，$OE\perp AC$，$OF\perp CB$，连接 OA，根据内切圆的性质，可得 $\angle BAC=60°$，求得线段 $AD=AE=3$，再根据切线长定理求解即可.

【详解】解：根据题意，作出图形，过点 O 作 $OD\perp AB$，$OE\perp AC$，$OF\perp CB$，连接 OA，如下图：



由切线长定理可得：$CE=CF$，$BF=BD$，$AD=AE$，$\angle ABC=2\angle OBC$，$\angle ACB=2\angle OCB$，$\angle CAB=2\angle OAC$，

∵$\angle BOC=120°$，∴$\angle OBC+\angle OCB=60°$，

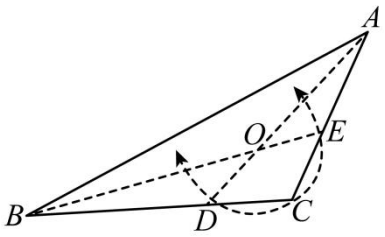
$\therefore \angle ABC+\angle ACB=2\left(\angle OBC+\angle OCB\right)=120°$，$\therefore \angle BAC=60°$，即$\angle OAE=30°$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AOE$中，$\angle OAE=30°$，$OE=\sqrt{3}$，$\therefore OA=2\sqrt{3}$，由勾股定理可得：$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=3$，

$\triangle ABC$的周长为16，可得：$AB+BC+AC=2AE+2CF+2BF=2AE+2BC=16$解得$BC=5$，故选：C.

【点睛】此题考查了圆与三角形的综合应用，涉及了切线长定理，勾股定理，直角三角形的性质，解题的关键是熟练掌握相关基础性质.

4.（2023·河北石家庄·统考模拟预测）如图，将$\triangle ABC$折叠，使AC边落在AB边上，展开后得到折痕AD．将$\triangle ABC$再次折叠，使BC边落在BA边上，展开后得到折痕BE，BE，AD交于点O．则以下结论一定成立的是（　）



A．$AO=2OD$　　B．$S_{\triangle ABO}=S_{四边形ODCE}$

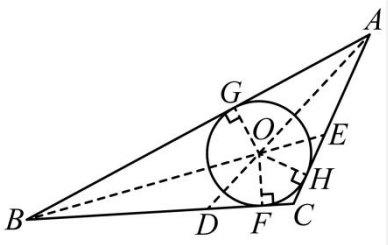
C．点O到$\triangle ABC$三边的距离相等　　D．点O到$\triangle ABC$三个顶点的距离相等

【答案】C

【分析】根据AD,BE是折痕，可知AD平分$\angle BAC$，BE平分$\angle ABC$，点O为$\triangle ABC$的内接圆的圆心，由此即可求解.

【详解】解：$\because AD,BE$是折痕，

$\therefore AD$平分$\angle BAC$，BE平分$\angle ABC$，点O为$\triangle ABC$的内接圆的圆心，如图所示，



$OF\perp BC$于F，$OG\perp AB$于G，$OH\perp AC$于H，

A选项，$\angle BAC$的度数无法确定，OA与OD的数量关系也不确定，故A选项不符合题意；

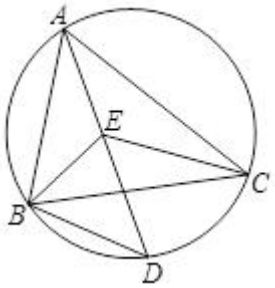
B选项，AB,AC,BC的长度不确定，$S_{\triangle ABO},S_{四边形ODCE}$的数量关系也不确定，故B选项不符合题意；

C选项，根据角平分的性质可得，$OF=OG=OH$，即点O到$\triangle ABC$三边的距离相等，故C选项符合题意；

D选项，$OA\neq OB\neq OC$，故D选项不符合题意；故选：C.

【点睛】本题考查三角形与圆的知识的综合，理解并掌握角平分线的性质，内切圆的知识是解题的关键.

4.（2022 春·绵阳市九年级课时练习）如图，点 E 是△ABC 的内心，AE 的延长线和△ABC 的外接圆相交于点 D，连接 BD，CE，若∠CBD=32°，则∠BEC 的大小为（　）



A．64°　　B．120°　　C．122°　　D．128°

【答案】C

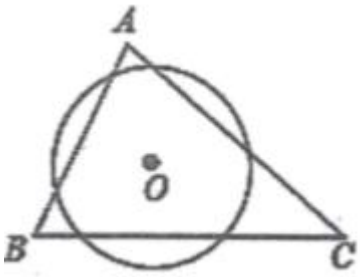
【分析】根据圆周角定理可求∠CAD=32°，再根据三角形内心的定义可求∠BAC，再根据三角形内角和定理和三角形内心的定义可求∠EBC+∠ECB，再根据三角形内角和定理可求∠BEC 的度数.

【详解】在⊙O 中，∵∠CBD=32°，∴∠CAD=32°，∵点 E 是△ABC 的内心，∴∠BAC=64°，

∴∠EBC+∠ECB=(180°-64°)÷2=58°，∴∠BEC=180°-58°=122°．故选：C.

【点睛】本题考查了三角形的内心，圆周角定理，三角形内角和定理，关键是得到∠EBC+∠ECB 的度数.

5.（2023·山西太原·校考模拟预测）如图，⊙O 截 ΔABC 的三条边所得的弦长相等，若 $\angle A=80^{\circ}$，则 $\angle BOC$ 的度数为(　　)

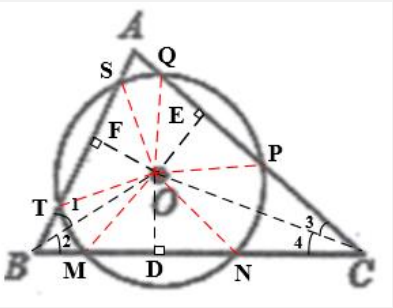


A．125°　　B．120°　　C．130°　　D．115°

【答案】C

【分析】先利用⊙O 截 $\triangle ABC$ 的三条边所得的弦长相等，得出即 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，从而∠1=∠2，∠3=∠4，进一步求出 $\angle BOC$ 的度数.

【详解】解：过点 O 分别作 $OD\perp BC$、$OE\perp AC$、$OF\perp AB$，垂足分别为 D、E、F，连接 OB、OC、OM、ON、OP、OQ、OS、OT，如图：



$\because MN=PQ=ST$，$OM=ON=OP=OQ=OS=OT$ $\therefore \triangle OMN\cong\triangle OPQ\cong\triangle OST\ (SAS)$

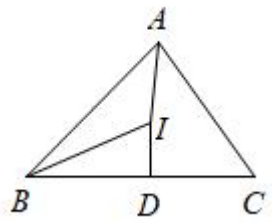
$\therefore OD=OE=OF$ $\therefore$点O是$\triangle ABC$三条角平分线的交点，即三角形的内心$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

$\because \angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A=100°$ $\therefore \angle 2+\angle 4=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=50°$

$\therefore \angle BOC=180°-(\angle 2+\angle 4)=130°$ ．故选：C

【点睛】本题考查的是三角形的内心、角平分线的性质、全等三角形的判定和性质以及三角形内角和定理，比较简单.

6.（2023·河北邢台·九年级校考阶段练习）如图，在$\triangle ABC$中，点I为$\triangle ABC$的内心，点D在BC边上，且$ID\perp BC$，若$\angle ABC=50°$，$\angle C=58°$，则$\angle AID$的度数为（　）



A．176°　　B．174°　　C．172°　　D．170°

【答案】A

【分析】$\triangle ABC$中，点I为$\triangle ABC$的内心，可求出$\angle CAI$的度数，根据四边形$AIDC$的内角和即可得出结论.

【详解】解：在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=50°$，$\angle C=58°$ $\therefore \angle BAC=180°-50°-58°=72°$

$\because$点I为$\triangle ABC$的内心，　$\therefore \angle CAI=\angle BAI=\frac{1}{2}\angle BAC=36°$

$\because$四边形$AIDC$的内角和$180°\times(4-2)=360°$，且$ID\perp BC$

$\therefore \angle AID=360°-\angle C-\angle IDC-\angle CAI=360°-58°-90°-36°=176°$ 故选：A.

【点睛】本题考查了三角形内心的定义及多边形的内角和，牢固掌握相关概念是解题的关键.

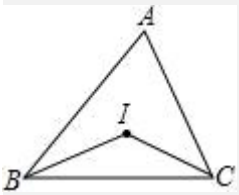
7.（2023 春·湖北九年级期中）点I是$\triangle ABC$的内心，若$\angle BIC=115°$，则$\angle A$的度数为（　　）

A．$50°$　　B．$57.5°$　　C．$122.5°$　　D．$50°$或$130°$

【答案】A

【分析】先根据内心的定义得到$\angle IBC=\frac{1}{2}\angle ABC,\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ACB$，再根据$\angle BIC=115°$作答即可.

【详解】如图，



∵点I是$\triangle ABC$的内心，∴$\angle IBC=\frac{1}{2}\angle ABC,\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ACB$，

∵$\angle BIC=115°$，∴$\angle IBC+\angle ICB=180°-\angle BIC=65°$；

∴$\angle ABC+\angle ACB=130°$；∴$\angle BAC=180°-(\angle ABC+\angle ACB)=50°$．故选：A.

【点睛】本题考查了三角形的内心，熟练掌握定义是解答本题的关键．三角形内切圆的圆心叫做三角形的内心，三角形的内心是三角形角平分线的交点.

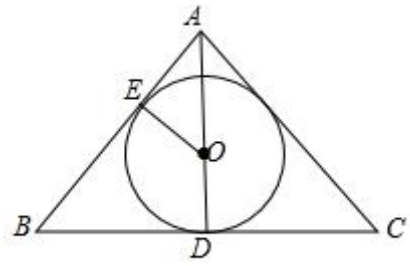
8.（2023·重庆九年级期中）已知三角形三边长分别为5cm、5cm、6cm，则这个三角形内切圆的半径是（　　）

A．$\frac{9}{8}$cm　　B．$\frac{3}{2}$cm　　C．2cm　　D．3cm

【答案】B

【分析】由⊙O是△ABC的内切圆，⊙O切AB于E，切BC于D，根据切线长定理得到AB=AC，A，O，D三点共线，求得BD，AD，BE，AE，由勾股定理列方程求解.

【详解】如图∵⊙O是△ABC的内切圆，⊙O切AB于E，切BC于D，



∵AB=AC=5，∴A，O，D三点共线，∴BD=$\frac{1}{2}$BC=3，∴AD=$\sqrt{AB^2-BD^2}$=4，

∴BE=BD=3，∴AE=2，　设三角形内切圆的半径为r，

∴$(4-r)^2=2^2+r^2$，∴r=$\frac{3}{2}$cm，∴三角形内切圆的半径为$\frac{3}{2}$cm．故选B.

【点睛】考查对三角形的内切圆与内心，切线长定理，切线的性质等知识点的理解和掌握，综合运用这些

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/597124015132010022