

个性化辅导授课教案

学员姓名：_____ 辅导类型（1对1、小班）：

年 级：_____ 辅 导 科 目：_____ 学 科 教 师：_____

课 题	
课 型	☐ 预习课 ☐ 同步课 ☐ 复习课 ☐ 习题课
授课日期及时段	_____年 ____月____日 时间段

教 学 内 容

函数性质

一、函数单调性与最值

一、函数单调性

（一）单调性与函数最值

1. 函数的单调性与单调区间

递增：在函数 $y = f(x)$ 的定义域内的一个区间 A 上，如果对于任意两数 $x_1, x_2 \in A$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，那么就称函数 $y = f(x)$ 在区间 A 上是增加的，有时也称函数 $y = f(x)$ 在区间 A 上是递增的。

递减：在函数 $y = f(x)$ 的定义域内的一个区间 A 上，如果对于任意两数 $x_1, x_2 \in A$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，那么就称函数 $y = f(x)$ 在区间 A 上是减少的，有时也称函数 $y = f(x)$ 在区间 A 上是递减的。

x_1	x_2	x_1	x_2
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
f(x) 单增		f(x) 单减	
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
x_1	x_2	x_1	x_2

注：（1）如果 $y = f(x)$ 在区间 A 上是增加的或是减少的，那么称 A 为**单调区间**. 在单调区间上，如果函数是增加的，那么它的图像是上升的；如果函数是减少的，那么它的图像是下降的。

（2）如果函数 $y = f(x)$ 在定义域的某个子集上是增加的或是减少的，那么就称函数 $y = f(x)$ 在这个子集上具有单调性。

（3）如果函数 $y = f(x)$ 在整个定义域内是增加的或者是减少的，我们分别称这个函数为增函数或减函数，统称为单调函数。

注意：函数在每个区间上单调，不能说函数在区间 $A \cup B$ 上单调，应该说函数在区间 A 和 B 上是单调的。

例如： $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是减少的，但 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不一定是递减的。

2. 判断函数单调性常用的方法

（1）定义法：利用定义判断.

例 1. 用定义证明 $f(x) = x^3 - a$ ($a \in \mathbb{R}$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数。

证明：设 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - a - (x_2^3 - a) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

由于 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$ ， $x_1 - x_2 < 0$

则 $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0$ ，即 $f(x_1) > f(x_2)$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数。

例 2. 用定义证明函数 $f(x) = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性。

证明：设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + \frac{k}{x_1}) - (x_2 + \frac{k}{x_2}) = (x_1 - x_2) + (\frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2})$$

$$= (x_1 - x_2) + k(\frac{x_2 - x_1}{x_1x_2}) = (x_1 - x_2)(1 - \frac{k}{x_1x_2}) = (x_1 - x_2)(\frac{x_1x_2 - k}{x_1x_2}),$$

又 $0 < x_1 < x_2$ ，所以 $x_1 - x_2 < 0$ ， $x_1x_2 > 0$ ，

当 $x_1, x_2 \in (0, \sqrt{k}]$ 时 $x_1x_2 - k < 0$ ， $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ，此时函数 $f(x)$ 为减函数；

当 $x_1, x_2 \in (\sqrt{k}, +\infty)$ 时 $x_1x_2 - k > 0$ ， $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，此时函数 $f(x)$ 为增函数。

综上函数 $f(x) = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 在区间 $(0, \sqrt{k}]$ 内为减函数；在区间 $(\sqrt{k}, +\infty)$ 内为增函数。

◎此题函数 $f(x)$ 是一种特殊函数（对号函数），用定义法证明时通常需要进行因式分解，由于

$x_1x_2 - k$ 与 0 的大小关系 ($k > 0$) 不是明确的，因此要分段讨论。

方法总结：利用定义来证明函数 $y = f(x)$ 在给定区间 D 上的单调性的一般步骤：

- ① 设元，任取 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$ ；
- ② 作差 $f(x_1) - f(x_2)$ ；
- ③ 变形（普遍是因式分解和配方）；
- ④ 断号（即判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 差与 0 的大小）；
- ⑤ 定论（即指出函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性）。

(2) 利用函数的性质：如若 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 为增函数，则

- (i) $y = f(x) + g(x)$ 为增函数
- (ii) $y = \frac{1}{f(x)}$ 为减函数 $f(x) > 0$
- (iii) $y = \sqrt{f(x)}$ 为增函数 $f(x) \geq 0$
- (iv) $y = f(x) \cdot g(x)$ 为增函数 ($f(x) > 0, g(x) > 0$)
- (v) $y = f(x)$ 为减函数
- (vi) $y = f(x)$ 与 $y = f(x) + c$ 单调性一致

例 3.判断 $f(x) = x + x^3 + \log_2 x^3 + 2^{x+1}(x^2 - 1) + 5$ 的单调性。

解:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，由简单函数的单调性知在此定义域内 $x, x^3, \log_2 x^3$ 均为增函数，因为 $2^{x+1} > 0, x^2 - 1 \geq 0$ 由性质 (iv) 可得 $2^{x+1}(x^2 - 1)$ 也是增函数；由单调函数的性质 (i) 知 $x + x^3 + \log_2 x$ 为增函数，再由性质 (vi) 知函数 $f(x) = x + x^3 + \log_2 x^3 + 2^{x+1}(x^2 - 1) + 5$ 在 $(0, +\infty)$ 为单调递增函数。

例 4.设函数 $f(x) = \frac{x+a}{x-b} (a < b < 0)$ ，判断 $f(x)$ 在其定义域上的单调性。

解:函数 $f(x) = \frac{x+a}{x-b}$ 的定义域为 $(-\infty, b) \cup (b, +\infty)$ 。
 先判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, b)$ 内的单调性，由题可把 $f(x) = \frac{x+a}{x-b}$ 转化为 $f(x) = 1 + \frac{a+b}{x-b}$ ，又 $a < b < 0$ 故 $a+b < 0$ 由性质 (3) 可得 $\frac{1}{x-b}$ 为减函数；由性质 (iv) 可得 $\frac{a+b}{x-b}$ 为减函数；再由性质 (vi) 可得 $f(x) = 1 + \frac{a+b}{x-b}$ 在 $(-\infty, b)$ 内是减函数。

(3) 利用复合函数关系判断单调性 (以 $y = f(g(x))$ 为例，令 $t = g(x)$)

	t g (x)	y f (t)	y f (g (x))
x A ₁			
x A ₂			
x A ₃			
x A ₄			
总结	内外函数单调性一致时复合函数单增， 内外函数单调性相反时， 复合函数单减		

例 5. 求 $f(x) = \log_a (3x^2 - 5x + 2) (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的单调区间。

解：由题可得函数 $f(x) = \log_a (3x^2 - 5x + 2)$ 是由外函数 $y = \log_a u$ 和内函数 $u = 3x^2 - 5x + 2$ 符合而成。由题知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 2) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ 。内函数 $u = 3x^2 - 5x + 2$ 在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 内为增函数，

在 $(-\infty, 2)$ 内为减函数。

①若 $a > 1$ ，外函数 $y = \log_a u$ 为增函数，由同增异减法则，故函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{3}, \infty)$ 上是增函数；
函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上是减函数。

②若 $0 < a < 1$ ，外函数 $y = \log_a u$ 为减函数，由同增异减法则，故函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{3}, \infty)$ 上是减函数；
函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上是增函数。

方法总结：判断复合函数 $y = f[g(x)]$ 的单调性的一般步骤：

(1)合理地分解成两个基本初等函数 $y = f(u), u = g(x)$ ；

(2)分别求出两个基本初等函数的定义域；

(3)分别确定单调区间；

(4)若两个基本初等函数在对应区间上的单调性是同时单调递增或同单调递减，则 $y = f[g(x)]$ 为增函数，若为一增一减，则 $y = f[g(x)]$ 为减函数（同增异减）；

(5)求出相应区间的交集，既是复合函数 $y = f[g(x)]$ 的单调区间。

以上步骤可以用八个字简记“一分”，“二求”，“三定”，“四交”。利用“八字”求法可以解决一些复合函数的单调性问题。

【跟踪训练】

求函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$ 的单调区间。

解：设 $u = x^2 + x - 6$ ， $y = \sqrt{u}$ 。

由 $x^2 + x - 6 \geq 0$ ，得 $x \leq -3$ 或 $x \geq 2$ 。

结合二次函数的图象可知，函数 $u = x^2 + x - 6$ 在 $(-\infty, -3]$ 上是递减的，在 $[2, +\infty)$ 上是递增的。

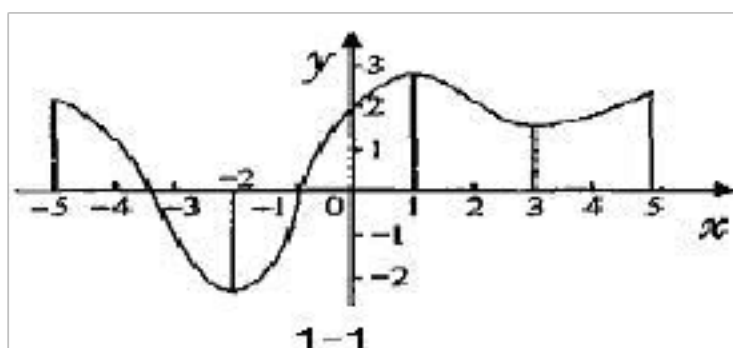
又 $\because$ 函数 $y = \sqrt{u}$ 是递增的， $\therefore$ 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$ 在 $(-\infty, -3]$ 上是递减的，在 $[2, +\infty)$ 上是递增的。

(4) 图像法

递增：图像在区间上呈上升趋势

递减：图像在区间上呈下降趋势

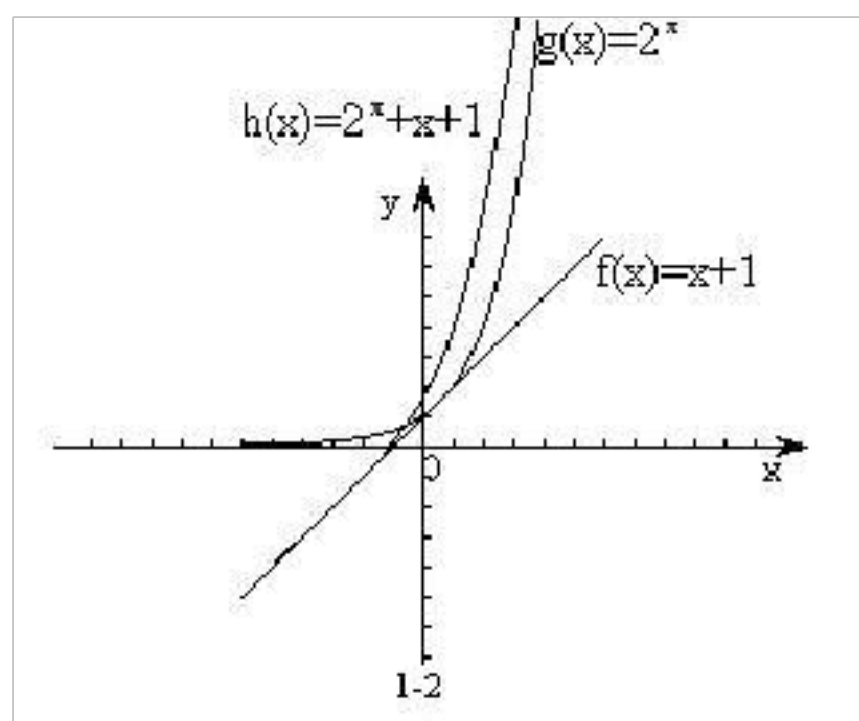
例 6. 如图 1-1 是定义在闭区间 $[-5, 5]$ 上的函数 $y = f(x)$ 的图像，试判断其单调性。



解：由图像可知：函数 $y = f(x)$ 的单调区间有 $[-5, -2)$ ， $[-2, 1)$ ， $[1, 3)$ ， $[3, 5)$ 。其中函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-5, -2)$ ， $[1, 3)$ 上的图像是从左往右逐渐下降的，则函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-5, -2)$ ， $[1, 3)$ 为减函数；函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-2, 1)$ ， $[3, 5]$ 上的图像是从往右逐渐上升的，则函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-2, 1)$ ， $[3, 5]$ 上是增函数。

例 7. 利用函数图像判断函数 $f(x) = x + 1$ ； $g(x) = 2^x$ ； $h(x) = 2^x + x + 1$ 在 $[-3, 3]$ 上的单调性。

分析：观察三个函数，易见 $h(x) = f(x) + g(x)$ ，作图一般步骤为列表、描点、作图。首先作出 $f(x) = x + 1$ 和 $g(x) = 2^x$ 的图像，再利用物理学上波的叠加就可以大致作出 $h(x) = 2^x + x + 1$ 的图像，最后利用图像判断函数 $h(x) = 2^x + x + 1$ 的单调性。解：作图像 1-2 如下所示：由以上函数图像得知函数 $f(x) = x + 1$ 在闭区间 $[-3, 3]$ 上是单调增函数； $g(x) = 2^x$ 在闭区间 $[-3, 3]$ 上是单调增函数；利用物理上波的叠加可以直接大致作出 $h(x) = 2^x + x + 1$ 在闭区间 $[-3, 3]$ 上图像，即 $h(x) = 2^x + x + 1$ 在闭区间 $[-3, 3]$ 上是单调增函数。事实上本题中的三个函数也可以直接用函数性质法判断其单调性。



用函数图像法判断函数单调性比较直观，函数图像能够形象的表示出随着自变量的增加，相应的函数值的变化趋势，但作图通常较烦。对于较容易作出图像的函数用图像法比较简单直观，可以类似物理上波的叠加来大致画出图像。而对于不易作图的函数就不太适用了。但如果我们借助于相关的数学软件去作函数的图像，那么用图像法判断函数单调性是非常简单方便的。

(5) 导数法

$f'(x) > 0$ $f(x)$ (严格) 单增

$f'(x) < 0$ $f(x)$ (严格) 单减

注意：①单调性是与“区间”紧密联系的概念，一个函数在不同的区间上，可以有不同的单调性。

②函数的单调性只能在函数的定义域内来讨论，所以求函数的单调区间，必须先求函数的定义域.

③ 函数的单调性定义中的 x_1 、 x_2 有三个特征：（三者缺一不可）

i)任意性

ii)有大小，即 $x_1 < x_2$ ($x_1 > x_2$)

iii)同属于一个单调区间

iv)由 $f(x)$ 是增（减）函数知 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) $x_1 < x_2$, 这说明单调性使得变量之间的不等式关系和函数值之间的不等关系可以“互逆互推”.

v)函数的单调性是对某个区间而言的，所以要受到区间的限制. 如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 分别在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上都是单调递减的，但不能说它在整个定义域内 $(-\infty, +\infty)$ 是单调递减，只能分开写，即函数的单调区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$.

vi)在研究函数的单调性时，常需要先将函数化简，转化为讨论一些熟知的函数的单调性，因此掌握并熟记一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数的单调性，将大大简化我们的判断过程.

3. 判断抽象函数单调性的方法

如果一个函数没有给出具体解析式，那么这样的函数叫做抽象函数。抽象函数没有具体的解析式，需充分提取题目条件给出的信息。

（1）定义法

通过作差(或者作商)，根据题目提出的信息进行变形，然后与 0（或者 1）比较大小关系来判断其函数单调性。通常有以下几种方法：

（2）凑差法

根据单调函数的定义，设法从题目中“凑出”“ $f(x_1) - f(x_2)$ ”的形式，然后比较 $f(x_1) - f(x_2)$ 与 0 的大小关系。

例：已知函数 $f(x)$ 对任意实数 m 、 n 均有 $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ，且当 $m > 0$ 时，

$f(m) > 0$ ，试讨论函数 $f(x)$ 的单调性。

解：由题得 $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ，

令 $x_1 = m+n$, $x_2 = m$ ，且 $x_1 > x_2$ ， $n = x_1 - x_2 > 0$

又由题意当 $m > 0$ 时， $f(m) > 0$ $f(x_1) - f(x_2) = f(n) > 0$ ，所以函数 $f(x)$ 为增函数。

（3）添项法

弄清题目中的结构特点，采用加减添项或乘除添项，以达到能判断“ $f(x_2) - f(x_1)$ ”与 0 大小关系的目的。

例 12.（同例 11）

解:任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, $f(x_2) - f(x_1) = f[(x_2 - x_1) + x_1] - f(x_1)$

由题意函数 $f(x)$ 对任意实数 m, n 均有 $f(m+n) = f(m) + f(n)$, 且当 $m > 0$ 时,

$f(m) > 0$ $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 为增函数。

(4) 增量法

由单调性的定义出发, 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ 设 $x_2 - x_1 = t$ ($t > 0$), 然后联系题目提取的信息给出解答。

例 13. (同例 11)

解: 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ 设 $x_2 - x_1 = t$ ($t > 0$) 由题意函数 $f(x)$ 对任意实数 m, n 均有 $f(m+n) = f(m) + f(n)$,

$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) = f(t) > 0$, 又由题当 $m > 0$ 时,

$f(m) > 0$ $f(x_2) - f(x_1) = f(t) > 0$ ($t > 0$), 所以函数 $f(x)$ 为增函数。

(5) 放缩法

利用放缩法, 判断 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系, 从而得 $f(x)$ 在其定义域内的单调性。

例 14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 对任意正实数 m, n 均有

$f(mn) = f(m)f(n)$, 且当 $m = 1$ 时 $0 < f(m) < 1$, 判断函数 $f(x)$ 的单调性。

解: 设 $0 < x_1 < x_2$, 则 $\frac{x_2}{x_1} > 1$ 又当 $m = 1$ 时 $0 < f(m) < 1$, 故 $0 < f(\frac{x_2}{x_1}) < 1$

再由 $f(mn) = f(m)f(n)$ 中令 $m = 1, n = 1$ 得 $f(1) = 1$

当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x} > 1$, 由 $f(1) = f(x)f(\frac{1}{x})$ 易知此时 $f(x) < 1$, 故 $f(x) > 0$ 恒成立。

因此 $f(x_2) - f(\frac{x_2}{x_1} x_1) = f(\frac{x_2}{x_1})f(x_1) - 1 = f(x_1) - f(x_1) = f(x_2) - f(x_1)$

即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调递减函数。

对于抽象函数, 由于抽象函数没有具体的解析式, 因此需充分提取题目条件给出的信息, 观察结构特点。用定义法判定抽象函数单调性比较适用于那种对于定义域内任意两个数 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时, 容易得出

$f(x_1) - f(x_2)$ 与 0 大小关系的函数。定义法是最直接的方法, 思路也比较清晰, 在解题中灵活选择凑差法、添项法、增量法、放缩法等恰当的方法, 可使解题过程更加简单方便。

(6) 列表法

对于比较复杂的复合函数，除了用复合函数单调性判断法外，还可以用列表，将各个函数的单调性都列出来，然后再判断复合函数单调性。

例 15. 已知 $y = f(x)$ 在 R 上是偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 上是增函数，求 $f(2-x^2)$ 是减函数的区间

解：列表如下

函数 表达式	单调性			
	$(-\infty, \sqrt{2})$	$[\sqrt{2}, 0)$	$[0, \sqrt{2})$	$[\sqrt{2}, +\infty)$
$y = 2-x^2$				
$y = f(u)$				
$y = f(2-x^2)$				

由表知 $f(2-x^2)$ 是减函数的区间 $(-\infty, \sqrt{2})$ ， $[0, \sqrt{2})$ 。

利用列表法比较直观，精确、易懂、量与量之间的关系又很明确。列表法在实际生活当中应用也是比较广泛的。但是列表法也有其局限性：在于适用题型狭窄，求解范围小，大部分是跟探寻规律或反映规律有关。

◎函数单调性是函数的一个非常重要的性质，上面从单调性的定义入手，总结了判断单调性的常见方法。上面把函数分为具体函数和抽象函数两大类进行讨论，对于每类函数都给出了判定单调性的若干方法。对于具体的函数，我们可以用多种方法去判断其单调性，特别地导数法是普遍适用的，若借助于计算机，那么图像法也是最简单最直观的。对于抽象函数的单调性问题，我们给出了用定义法及列表法。这种题型不仅抽象，而且综合性较强，对学生的思维能力有很高的要求，学生往往很难发现数学符号与数学语言之间的内在关系。因此在判断函数单调性的问题上，应灵活选择恰当的方法，从而使解题过程最简单。

【跟踪训练】

定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意实数 m, n ，总有 $f(m+n)=f(m) \cdot f(n)$ ，且当 $x>0$ 时， $0<f(x)<1$ 。

- (1)试求 $f(0)$ 的值；
- (2)判断 $f(x)$ 的单调性并证明你的结论；
- (3)设 $A = \{(x, y) | f(x^2) \cdot f(y^2) > f(1)\}$ ， $B = \{(x, y) | f(ax-y+\sqrt{2})=1, a \in R\}$ ，若 $A \cap B = \emptyset$ ，试确定 a 的取值范围。

解：(1)在 $f(m+n)=f(m) \cdot f(n)$ 中，令 $m=1, n=0$ ，
得 $f(1)=f(1) \cdot f(0)$ 。 因为 $f(1) \neq 0$ ，所以 $f(0)=1$ 。

(2)任取 $x_1, x_2 \in R$ ，且 $x_1 < x_2$ 。
在已知条件 $f(m+n)=f(m) \cdot f(n)$ 中，若取 $m+n=x_2, m=x_1$ ，则已知条件可化为： $f(x_2)=f(x_1) \cdot f(x_2-x_1)$ 。
由于 $x_2-x_1>0$ ，所以 $0<f(x_2-x_1)<1$ 。

为比较 $f(x_2)$, $f(x_1)$ 的大小, 只需考虑 $f(x_1)$ 的正负即可.

在 $f(m+n)=f(m)f(n)$ 中, 令 $m=x$, $n=-x$, 则得 $f(x)f(-x)=1$.

因为当 $x>0$ 时, $0<f(x)<1$, 所以当 $x<0$ 时, $f(x)=\frac{1}{f(-x)}>1>0$.

又 $f(0)=1$, 所以综上所述可知, 对于任意的 $x_1 \in \mathbb{R}$, 均有 $f(x_1)>0$.

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_1)[f(x_2-x_1)-1]<0$. 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减.

(3) $f(x_2)f(y_2)>f(1)$, 即 $x_2+y_2<1$.

$f(ax-y+\sqrt{2})=1=f(0)$, 即 $ax-y+\sqrt{2}=0$.

由 $A \cap B = \emptyset$, 得直线 $ax-y+\sqrt{2}=0$ 与圆面 $x^2+y^2<1$ 无公共点, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}} \geq 1$, 解得 $-1 \leq a \leq 1$.

4. 单调性和单调区间的应用

例: 函数 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$ 的单调递增区间为 (D)

【解题导引】 考虑定义域 利用复合函数单调性法则 结论

【解析】 由 $x^2-4 \geq 0$ 得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 2$. 又 $u=x^2-4$ 在 $(-\infty, -2]$ 上为减函数, 在 $[2, +\infty)$ 上为增函数, $y=\log_{\frac{1}{2}} u$ 为减函数, 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2]$ 和 $[2, +\infty)$.

A. $0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0]$ C. $2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2]$ 和 $[2, +\infty)$

二、单调性的应用及单调区间的判断

1. 单调性的应用

1 典题导入

(1) 若 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 则满足 $f(2-m)<f(m-2)$ 的实数 m 的取值范围是_____.

(2) (2012安徽高考) 若函数 $f(x)=|x+a|$ 的单调递增区间是 $[3, +\infty)$, 则 $a=$ _____.

[自主解答] (1) $\because f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数, $\therefore 2-m < m-2$.

$\therefore m-2+m-2>0 \therefore m>2$ 或 $m<-2$.

(2) 由 $f(x)=\begin{cases} -2x-a, & x<-\frac{a}{2}, \\ 2x+a, & x\geq-\frac{a}{2}, \end{cases}$ 可得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{a}{2}, +\infty)$, 故 $3=-\frac{a}{2}$, 解得 $a=-6$.

[答案] (1) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (2) -6

2 由题悟法

单调性的应用主要涉及利用单调性求最值, 进行大小比较, 解抽象函数不等式, 解题时要注意: 一是函数定义域的限制; 二是函数单调性的判定; 三是等价转化思想与数形结合思想的运用.

3 以题试法

3. (1) (2013孝感调研)函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 在 $[2, 3]$ 上的最小值为_____, 最大值为_____.

(2)已知函数 $f(x)=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}$ ($a>0, x>0$), 若 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的值域为 $[\frac{1}{2}, 2]$, 则 a =_____.

解析: (1) $\because f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}<0$, $\therefore f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上为减函数, $\therefore f(x)_{\min}=f(3)=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$, $f(x)_{\max}=f(2)=\frac{1}{2-1}=1$.

(2)由反比例函数的性质知函数 $f(x)=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}$ ($a>0, x>0$) 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上单调递增,

所以 $\begin{cases} f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}, \\ f(2)=2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{1}{a}-2=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{a}-\frac{1}{2}=2, \end{cases}$ 解得 $a=\frac{2}{5}$. 答案: (1) $\frac{1}{2}$ 1 (2) $\frac{2}{5}$

2. 单调区间判断

1 典题导入

[例 2] (2012长沙模拟)设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义. 对于给定的正数 k , 定义函数 $f_k(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\leq k, \\ k, & f(x)>k, \end{cases}$ 取函数 $f(x)=2^{-x}$. 当 $k=\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f_k(x)$ 的单调递增区间为()

A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(1, +\infty)$

[自主解答] 由 $f(x)>\frac{1}{2}$, 得 $-1<x<1$. 由 $f(x)\leq\frac{1}{2}$, 得 $x\leq-1$ 或 $x\geq 1$.

$2^{-x}, x\geq 1,$

所以 $f_k(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & -1<x<1, \\ 2^{-x}, & x\leq-1 \text{ 或 } x\geq 1. \end{cases}$ 故 $f_k(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$. [答案] C

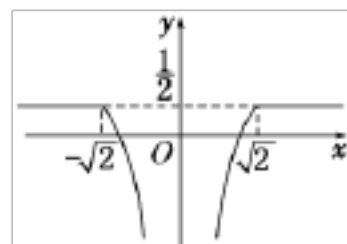
$2^x, x\leq-1.$

>>> 一题多变

若本例中 $f(x)=2^{-x}$ 变为 $f(x)=\log_2|x|$, 其他条件不变, 则 $f_k(x)$ 的单调增区间为_____.

解析: 函数 $f(x)=\log_2|x|$, $k=\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f_k(x)$ 的图象如图所示, 由图示可得函数 $f_k(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \sqrt{2}]$.

答案: $(0, \sqrt{2}]$



2 由题悟法

求函数的单调区间的常用方法

(1)利用已知函数的单调性, 即转化为已知函数的和、差或复合函数, 求单调区间.

(2)定义法: 先求定义域, 再利用单调性定义.

(3)图象法: 如果 $f(x)$ 是以图象形式给出的, 或者 $f(x)$ 的图象易作出, 可由图象的直观性写出它的单调区间.

(4)导数法: 利用导数的正负确定函数的单调区间.

3 以题试法

2. 函数 $f(x)=|x-2|x|$ 的单调减区间是()

A. $[1, 2]$ B. $[-1, 0]$ C. $[0, 2]$ D. $[2, +\infty)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/597124156123006162>