2021年广东省广州市天河区高考数学综合测试试卷（二）（二模）

一、单选题（本大题共8小题，共40.0分）

1. (2021·广东省广州市·模拟题)已知集合$P=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$，$Q=\{y|y=x^2+2x\}$，则$P\cup(\complement_R Q)=(\quad)$

A. $[-3,-1)$　　B. $[-1,1]$　　C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-\infty,1]$

2. (2021·广东省广州市·模拟题)已知i为虚数单位，且$(1+i)z=i^3$，则复数z的虚部为$(\quad)$

A. $-\frac{1}{2}i$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}i$

3. (2021·广东省广州市·模拟题)设$\theta\in R$，则“$sin\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$”是“$0<\theta<\frac{\pi}{4}$”的$(\quad)$

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. (2021·广东省广州市·模拟题)生物学指出：生态系统中，在输入一个营养级的能量中，大约10%的能量能够流到下一个营养级在$H_1\to H_2\to H_3$这个生物链中，若能使H_3获得$10kJ$的能量，则需H_1提供的能量为$(\quad)$

A. $10^{-2}kJ$　　B. $10^{-1}kJ$　　C. $10^{2}kJ$　　D. $10^{3}kJ$

5. (2021·广东省广州市·模拟题)在某次数学测试中，学生成绩ξ服从正态分布$(100,\sigma^2)(\sigma>0)$，若ξ在$(80,120)$内的概率为0.6，则任意选取两名学生的成绩，恰有一名学生成绩不高于80的概率为$(\quad)$

A. 0.16　　B. 0.24　　C. 0.32　　D. 0.48

6. (2021·广东省广州市·模拟题)已知$a=\log_4 3$，$b=\log_5 3$，$c=\frac{3}{4}$，则$(\quad)$

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

7. (2021·广东省广州市·模拟题)天河区某校开展学农活动时进行劳动技能比赛，通过初选，选出甲、乙、丙、丁、戊共5名同学进行决赛，决出第1名到第5名的名次.甲和乙去询问成绩，回答者对甲说“很遗憾，你和乙都未拿到冠军”；对乙说“你当然不是最差的”，试从这个回答中分析这5人的名次排列顺序可能出现的种类有$(\quad)$

A. 54种　　B. 60种　　C. 72种　　D. 96种

8. (2021·江苏省南通市·单元测试)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右顶点分别是$A$，$B$，右焦点为$F$，点$P$在过$F$且垂直于$x$轴的直线$l$上，当$\triangle ABP$的外接圆面积达到最小时，点$P$恰好在双曲线上，则该双曲线的渐近线方程为(   )

A. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　C. $y=\pm x$　　D. $y=\pm\sqrt{2}x$

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. (2021·广东省广州市·模拟题)设向量$\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(0,2)$，则(   )

A. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　B. $(\vec{a}-\vec{b})//\vec{a}$

C. $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$　　D. $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$

10. (2021·广东省广州市·模拟题)已知函数$f(x)=2cos^2x-2\sqrt{3}\sin(\pi+x)cosx-1$，则下列结论正确的是(   )

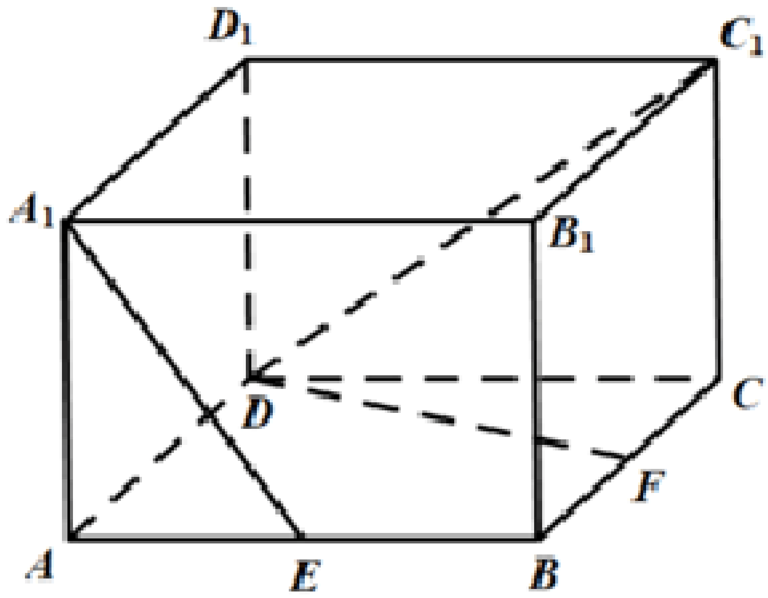
A. 函数$f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{3},0)$对称

B. 函数$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{6}]$单调递增

C. 函数$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的值域为$[-1,2]$

D. 把函数$y=2sin2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度可得到函数$y=f(x)$的图象

11. (2021·广东省广州市·模拟题)如图，已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，四边形$ABCD$为正方形，$AB=2$，$AA_1=\sqrt{2}$，E，F分别为AB，BC的中点.则(   )



A. $A_1E\perp DF$

B. 点A_1、E、F、C_1四点共面

C. 直线C_1D与平面BB_1C_1C所成角的正切值为$\sqrt{2}$

D. 三棱锥$E-C_1DF$的体积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. (2021·广东省广州市·模拟题)定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x)-f(-x)=2sinx$，且当$x\geq 0$时，$f'(x)>1$.若$f(t)-f(\frac{\pi}{2}-t)\leq sint-cost$，则实数$t$的取值可能是(   )

A. $\frac{\pi}{6}$　　　　B. $\frac{\pi}{4}$　　　　C. $\frac{\pi}{3}$　　　　D. $\frac{\pi}{2}$

三、单空题（本大题共 4 小题，共 18.0 分）

13. (2021·广东省东莞市·单元测试)过抛物线$y^2 = 4x$的焦点作一条直线交抛物线于 A，B 两点，若线段 AB 的中点 M 的横坐标为 2，则$|AB|$等于______ .

14. (2021·广东省广州市·模拟题)写出一个满足前 5 项的和为 10，且递减的等差数列的通项$a_n =$ ______ .

15. (2021·广东省广州市·模拟题)已知三棱锥$P-ABC$中，$\angle BAC = 90°$，$AB = AC = 2$，$PB = PC$，$PA = \sqrt{14}$，O_1为$\triangle ABC$的外接圆的圆心，$\cos\angle PAO_1 = \frac{2\sqrt{7}}{7}$，则三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为______ .

16. (2021·广东省广州市·模拟题)已知函数$f(x) = \frac{lnx}{x}\ \ \frac{}{a}$，且$f'(1) = 1$，则$a =$ ______ ，曲线$y = f(x)$在$x = e$处的切线方程为______ .

四、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分）

17. (2021·广东省广州市·模拟题)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1 = 1$，$\frac{a_1}{1}\ \ \frac{a_2}{2}$ $\cdots\frac{a_{n-1}}{n-1}\ \ \frac{a_n}{n} = n(n \geq 2)$，$n \in N^*$.

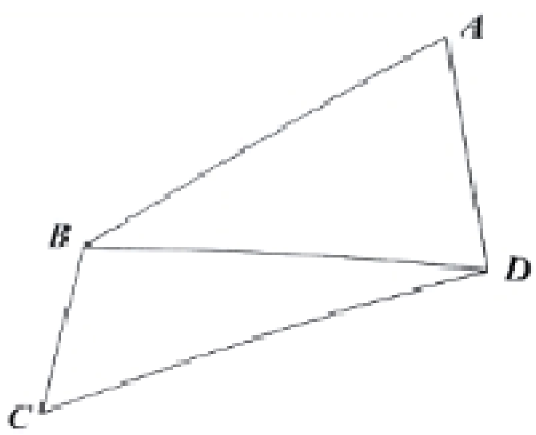
(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若a_1，a_k，S_{k^2}成等比数列，$k \in N^*$，求$\frac{1}{S_1}\ \ \frac{1}{S_2}\ \ \cdots\cdots\ \ \frac{1}{S_{k^2}}$的值．

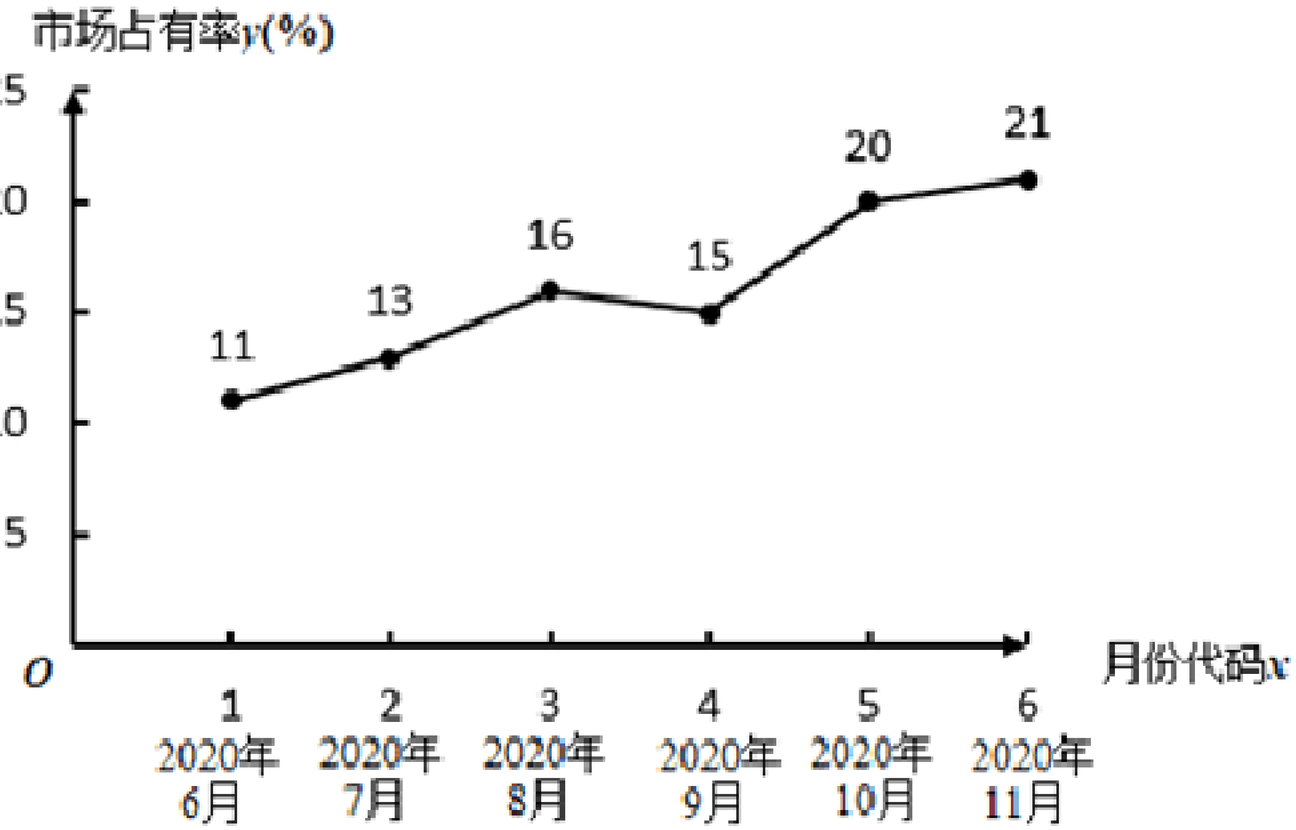
18. (2021·重庆市市辖区·期末考试)如图，在四边形$ABCD$中，$CD = 3\sqrt{3}$，$BC = \sqrt{7}$，$\cos\angle CBD = -\frac{\sqrt{7}}{14}$.

(1)求$\angle BDC$；

(2)若$\angle A = \frac{\pi}{3}$，求$\triangle ABD$周长的最大值．



19. (2021·广东省广州市·模拟题)某市场研究人员为了了解共享单车运营公司 M 的经营状况，对该公司近六个月内的市场占有率进行了统计，并绘制了相应的折线图.



(1)月市场占有率 y 与月份代码 x 符合线性回归模型拟合的关系，求 y 关于 x 的线性回归方程，并预测 M 公司 2021 年 3 月份(即$x = 10$时)的市场占有率；

(2)为进一步扩大市场，公司拟再采购一批单车.现有采购成本分别为 1000 元/辆和 1200 元/辆的 A，B 两款车型可供选择，按规定每辆单车最多使用 4 年，但由于多种原因(如骑行频率等)会导致车辆报废年限各不相同.考虑到公司运营的经济效益，该公司决定先对两款车型的单车各 100 辆进行科学模拟测试，得到两款单车使用寿命频数表如表：

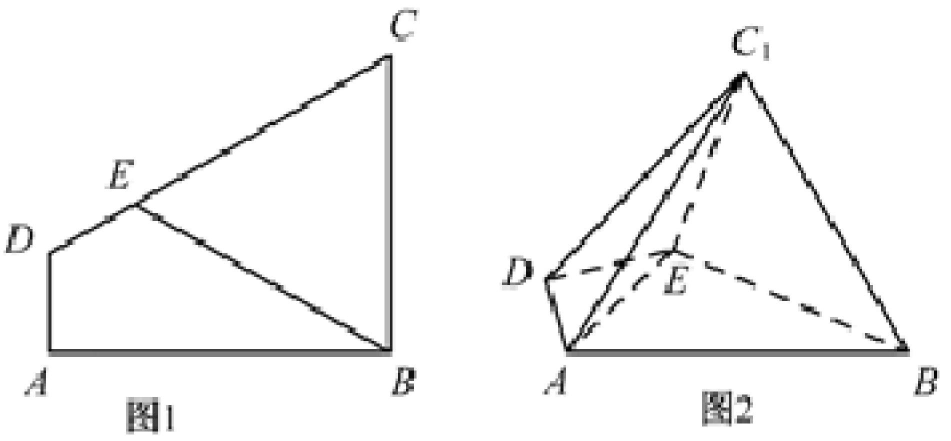
报废年限	1 年	2 年	3 年	4 年
A 型车(辆)	20	35	35	10
B 型车(辆)	10	30	40	20

经测算，平均每辆单车每年可以带来收入 500 元.不考虑除采购成本之外的其他成本，假设每辆单车的使用寿命都是整年，且以每辆单车使用寿命的频率作为每辆单车使

用寿命的概率.如果你是M公司的负责人，以每辆单车产生利润的期望值为决策依据，你会选择采购哪款车型？

参考公式及数据：回归直线方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=371$，$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=91$.

20. (2021·广东省广州市·模拟题)如图1，四边形$ABCD$为直角梯形，$AD//BC$，$AD\perp AB$，$AB=2\sqrt{3}$，$\angle BCD=60°$.E为线段CD上的点，且$CE=CB=3$.将$\triangle BCE$沿BE折起，得到四棱锥C_1-ABED(如图2)，使得$C_1A=C_1B$.



(1)求证：平面$AC_1D\perp$平面ABC_1；

(2)求二面角C_1-DE-A的余弦值.

21. (2021·广东省广州市·模拟题)设O为坐标原点，已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$为直线$x=\sqrt{2}a$上一点，$\triangle F_2PF_1$是底角为$30°$的等腰三角形.

(1)求椭圆 E 的离心率；

(2)若$F_2(1,0)$，设不与 x 轴重合的直线 l 过椭圆 E 的右焦点F_2，与椭圆 E 相交于 A、B 两点，与圆$x^2+y^2=a^2$相交于 C、D 两点，求$|AB|\cdot|CD|^2$的取值范围.

22. (2021·广东省广州市·模拟题)已知函数$f(x)=e^x-ax$，其中$a\in R$.

(1)讨论函数$f(x)$在$[0,1]$上的单调性；

(2)若函数$g(x)=f(x)+\ln(x+1)-cosx$，则是否存在实数 a，使得函数$g(x)$在$x=0$处取得极小值？若存在，求出 a 值；若不存在，说明理由.

答案和解析

1.【答案】D

【知识点】交、并、补集的混合运算

【解析】解：$\because$集合$P=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$，

$Q=\{y|y=x^2+2x\}=\{y|y=(x+1)^2-1\}=\{y|y\geq -1\}$，

$\therefore \complement_R Q=\{y|y<-1\}$，

则$P\cup(\complement_R Q)=\{x|x\leq 1\}=(-\infty,1]$．

故选：D．

求出集合 Q，从而求出$\complement_R Q$，由此能求出$P\cup(\complement_R Q)$．

本题考查交集的求法，考查交集定义、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

2.【答案】B

【知识点】复数的四则运算

【解析】解：$\because$ i为虚数单位，且$(1+i)z=i^3$，

$\therefore z=\frac{i^3}{1+i}=\frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-i+i^2}{1-i^2}=\frac{-1-i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$．

$\therefore$复数 z 的虚部为$-\frac{1}{2}$．

故选：B．

推导出$z=\frac{i^3}{1+i}$，利用复数的运算法则和复数定义能求出该复数的虚部．

本题考查复数的虚部的求法，考查复数的运算法则等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

3.【答案】B

【知识点】必要条件、充分条件与充要条件的判断

【解析】解：$\because$ $sin0=0<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ “$sin\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$” 不是 “$0<\theta<\frac{\pi}{4}$” 的充分条件，

$\because$ $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，又$\because$ $y=sinx$在$[0,\frac{\pi}{4}]$上为增函数，

$\therefore sin0<sin\theta<\sin\frac{\pi}{4}$，

$\therefore 0<sin\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ “$sin\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$” 是 “$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$” 必要条件，

故选：B.

由$sin0 = 0 < \frac{\sqrt{2}}{2}$知 “$sin\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$” 不是 “$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$” 的充分条件，再结合三角函数的性质知 “$sin\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$” 是 “$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$” 必要条件，从而解得.

本题考查了充分、必要条件的判断，同时考查了三角函数的性质，属于基础题.

4.【答案】D

【知识点】等比数列的通项公式

【解析】解：根据题意可知：能量流动法则里表明能量的效率大约是10%，

如果要使H_3获得 $10kJ$ 能量，

则$H_1 \times (10\%)^2 = H_3$，解得$H_1 = 10^3KJ$，

故选：D.

根据等比数列的通项公式即可求出.

本题考查了等比数列的基本知识，考查了学生的计算能力，解题时要认真审题，仔细解答，避免错误，属于基础题.

5.【答案】C

【知识点】正态曲线及其性质

【解析】解：$\because \xi$服从正态分布$(100, \sigma^2)(\sigma > 0)$，

又ξ在$(80,120)$内的概率为0.6，

$\therefore P(\xi \leq 80) = \frac{1-0.6}{2} = 0.2$，

$\therefore$所抽取的 2 名学生不高于 80 分的成绩变量 X 服从二项分布$B(2,0.2)$，

$\therefore$任意选取两名学生的成绩，恰有一名学生成绩不高于 80 的概率$P' = C_2^1 \times 0.2^1 \times 0.8 = 0.32$，

故选：C.

依题意，可得$P(\xi \leq 80) = 0.2$，于是所抽取的两名学生不高于 80 分的成绩变量 X 服从二项分布$B(2,0.2)$，从而可得答案.

本题考查正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义，考查化归思想与运算求解能力，属于中档题.

6.【答案】D

【知识点】对数函数及其性质

【解析】解：$\because a-\frac{3}{4}=\frac{4log_4 3-3}{4}=\frac{log_4 81-log_4 64}{4}>0$，

$\therefore a>c$，

$b-\frac{3}{4}=\log_5 3-\frac{3}{4}=\frac{4log_5 3-3}{4}=\frac{log_5 81-log_5 125}{4}<0$，

$\therefore b<c$，

故$a>c>b$，

故选：D.

利用作差法及对数函数的单调性依次比较大小.

本题考查了对数值比较大小的方法，属于基础题.

7.【答案】A

【知识点】排列、组合的综合应用

【解析】解：由题意，甲、乙都不是第一名且乙不是最后一名.

乙的限制最多，故先排乙，有 3 种情况，即第二、三、四名；

再排甲，除乙的名次外有 2 种情况，故甲也有 3 种情况；

余下 3 人有A_3^3种排法.

故共有$3\cdot 3\cdot A_3^3=54$种不同的情况.

故选：A.

由题意知，甲、乙不是第一名且乙不是最后一名．乙的限制最多，故先排乙，有 3 种情况；再排甲，也有 3 种情况；余下的问题是三个元素在三个位置全排列，根据分步计数原理得到结果.

排列、排列数公式及解排列的应用题，在中学代数中较为独特，它研究的对象以及研究问题的方法都和前面掌握的知识不同，内容抽象，解题方法比较灵活，历届高考主要考查排列的应用题，是中档题.

8.【答案】C

【知识点】双曲线的性质及几何意义

【解析】解：由题意设$P(c,y_0)$，$y_0>0$，当$\triangle ABP$的外接圆面积达到最小时，

设其外接圆的半径 r，即 r 最小，而$\frac{AB}{\sin\angle APB}=2r$，

所以$\sin\angle APB$最大时，$\triangle ABP$的外接圆面积达到最小，

可得$\tan\angle APB$最大，而$\angle APB=\angle APF-\angle BPF$，

$\tan\angle APF=\frac{a+c}{y_0}$，$\tan\angle BPF=\frac{c-a}{y_0}$，

所以$\tan\angle APB=\tan(\angle APF-\angle BPF)=\frac{\tan\angle APF-\tan\angle BPF}{1+\tan\angle APF\cdot\tan\angle BPF}=\frac{\frac{a+c}{y_0}-\frac{c-a}{y_0}}{1+\frac{a+c}{y_0}\cdot\frac{c-a}{y_0}}=\frac{2a}{y_0+\frac{b^2}{y_0}}\le\frac{2a}{2\sqrt{y_0\cdot\frac{b^2}{y_0}}}=\frac{a}{b}$，

当且仅当$y_0=\frac{b^2}{y_0}$，即$y_0=b$，

所以 P 的坐标(c,b)，将 P 点坐标代入双曲线的方程可得$\frac{c^2}{a^2}-\frac{b^2}{b^2}=1$，

即$c^2=2a^2$，可得$a^2+b^2=2a^2$，

所以$a=b$，

所以渐近线的方程为：$y=\pm x$，

故选：C.

由题意设 P 的坐标，当$\triangle ABP$的外接圆面积达到最小时，即外接圆的半径最小，由三角形的外接圆的求法可得半径最小时$\angle APB$的正弦值最大，可得其角的正切值最大，由两角差的正切公式，及均值不等式可得当 P 的纵坐标为 b 时满足条件，将 P 的坐标代入双曲线的方程可得 a，c 的工作，再由 a，b，c 的关系求出 a，b 的关系，进而求出双曲线的渐近线的方程.

本题考查双曲线的性质，三角形外接圆的半径的求法，均值不等式的应用，属于中档题.

9.【答案】CD

【知识点】向量垂直的判断与证明、向量的夹角

【解析】解：向量$\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(0,2)$，

对于 A，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，故 A 错误；

对于 B，$\vec{a}-\vec{b}=(-1,-1)$，故 B 错误；

对于 C，，$\vec{a}-\vec{b}=(-1,-1)$，$\therefore(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，$\therefore(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，故 C 正确；

对于 D，$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，故 D 正确.

故选：CD.

分别求出两个向量的模，判断 A；求出$\vec{a}-\vec{b}$判断 B；求出)，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，判断 C；求出$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$，判断 D.

本题考查命题真假的判断，考查向量的模、向量平行、向量垂直、向量夹角的余弦值等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

10.【答案】BC

【知识点】函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与性质、三角恒等变换

【解析】解：$f(x)=2cos^2x-2\sqrt{3}\sin(\pi+x)cosx-1=cos2x+\sqrt{3}sin2x=2sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

A：由于$f(\frac{\pi}{3})=2sin\frac{5\pi}{6}=1$，图像不关于点$(\frac{\pi}{3},0)$对称，不符合题意；

B：$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in Z$，

当$k=0$时，可得函数的一个单调递增区间为$[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$，符合题意；

C：由$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$得$2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$，

所以$2sin(2x+\frac{\pi}{6})\in[-1,2]$，符合题意；

D：把函数$y=2sin2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度可得到函数$y=2sin(2x+\frac{\pi}{3})$，不符合题意．

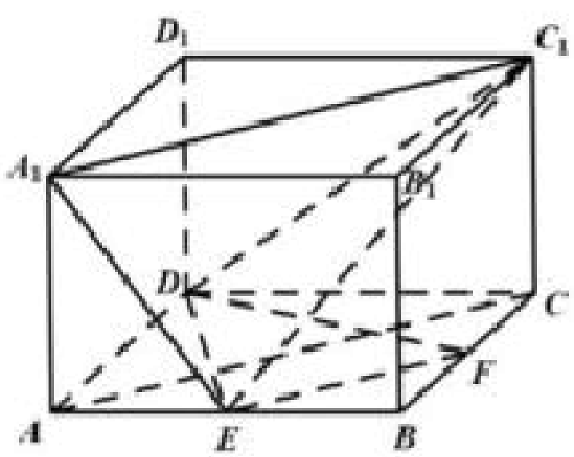
故选：BC．

先结合二倍角及辅助角公式进行化简，然后结合正弦函数的性质分别检验各选项即可判断．

本题主要考查了二倍角公式及辅助角公式，还考查了正弦函数的性质，属于中档题．

11.【答案】BCD

【知识点】圆柱、圆锥、圆台的侧面积、表面积和体积、平面的基本性质及应用、利用空间向量求线线、线面和面面的夹角



【解析】解：对于A，假设$A_1E\perp DF$，由题意可知，$BC\perp$平面AA_1B_1B，因为$A_1E\subset$平面AA_1B_1B，所以$A_1E\perp BC$，又$BC\cap DF=F$，BC，$DF\subset$平面$ABCD$，所以$A_1E\perp$平面$ABCD$，

由长方体的性质可知，A_1E与平面$ABCD$不垂直，故假设不等式，故选项A错误；

对于B，连结EF，AC，A_1C_1，由于E，F分别为AB，BC的中点，所以$EF//AC$，

又在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AC//A_1C_1$，所以$EF//A_1C_1$，

则点A_1，E，F，C_1四点共面，故选项B正确；

对于C，由题意可知，$DC\perp$平面BB_1C_1C，所以$\angle DC_1C$即为C_1D与平面BB_1C_1C所成的角，