

四川省泸州市泸县一中 2023 届高三第一次模拟（期末）考试数学试题试卷

注意事项：

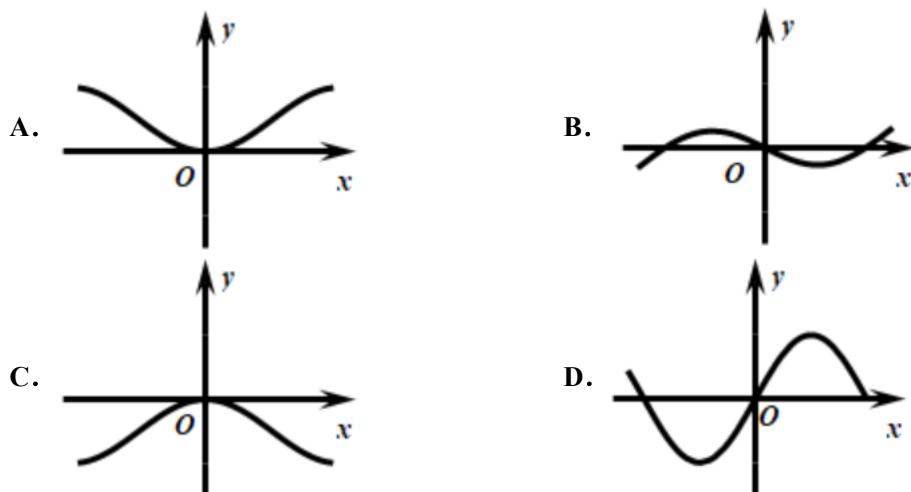
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid x > 0\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - x + b = 0\}$ ，若 $A \cap B = \{3\}$ ，则 $b =$ （ ）

- A. -6 B. 6 C. 5 D. -5

2. 函数 $f(x) = \left(\frac{2}{1+e^x} - 1\right)\cos x$ 图象的大致形状是（ ）



3. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid y = \sqrt{4-x}\}$ ， $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）

- A. $[0, 4]$ B. $\{0, 2, 4\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $[2, 4]$

4. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左焦点 F 的直线 l 交 C 的左支于 A, B 两点，直线 AO （ O 是坐标原点）交 C

的右支于点 D ，若 $DF \perp AB$ ，且 $|BF| = |DF|$ ，则 C 的离心率是（ ）

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 = -2$ ， $a_8 = 10$ ，则 $S_9 =$ （ ）

- A. 45 B. 42 C. 25 D. 36

6. 已知曲线 $y = a^{x-1} + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 过定点 (k, b) , 若 $m + n = b$ 且 $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{4}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 ().

- A. $\frac{9}{2}$ B. 9 C. 5 D. $\frac{5}{2}$

7. 已知函数 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$ ($0 < x < \frac{3\pi}{4}$) 的图像与一条平行于 x 轴的直线有两个交点, 其横坐标分别为 x_1, x_2 ,

则 $x_1 + x_2 =$ ()

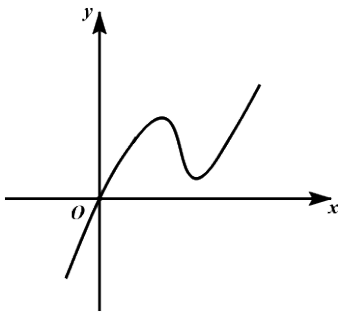
- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$

8. 已知焦点为 F 的抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线与 x 轴交于点 A , 点 M 在抛物线 C 上, 则当 $\frac{|MA|}{|MF|}$ 取得最大值时, 直

线 MA 的方程为 ()

- A. $y = x + 1$ 或 $y = -x - 1$ B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ C. $y = 2x + 2$ 或 $y = -2x - 2$
D. $y = -2x + 2$

9. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(4) = 1$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 已知 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 若两个正数 a, b 满足 $f(2a + b) < 1$, 则 $\frac{b+1}{a+1}$ 的取值范围是 ()



- A. $(\frac{1}{5}, \frac{1}{3})$ B. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (5, +\infty)$ C. $(\frac{1}{3}, 5)$ D. $(-\infty, 3)$

10. 已知 i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $\frac{5}{1+2i} = \bar{z} - i$, 则 $z =$ ()

- A. $1 + i$ B. $-1 + i$ C. $1 - 2i$ D. $1 + 2i$

11. 下列函数中, 在定义域上单调递增, 且值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = |\lg(x+1)|$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = 2^x$ D. $y = \ln|x|$

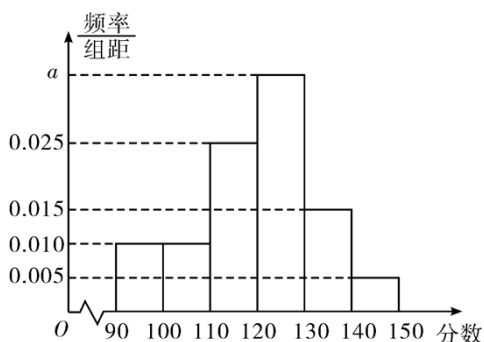
12. 在复平面内, 复数 $i(2+i)$ 对应的点的坐标为 ()

- A. (1, 2) B. (2, 1) C. (-1, 2) D. (2, -1)

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 某校高三年级共有800名学生参加了数学测验（满分150分），已知这800名学生的数学成绩均不低于90分，将这800名学生的数学成绩分组如下：[90,100)，[100,110)，[110,120)，[120,130)，[130,140)，[140,150]，得到的频率分布直方图如图所示，则下列说法中正确的是_____（填序号）。

- ① $a = 0.045$ ；
- ② 这800名学生中数学成绩在110分以下的人数为160；
- ③ 这800名学生数学成绩的中位数约为121.4；
- ④ 这800名学生数学成绩的平均数为125。



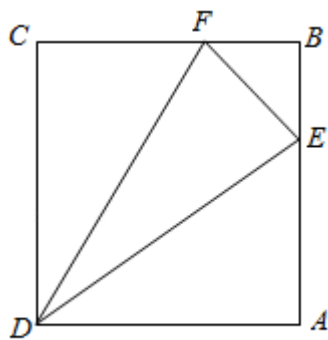
14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 9$ ， $\frac{S_9}{9} - \frac{S_5}{5} = -4$ ，则 $a_n =$ _____。

15. 已知 a, b 均为正数，且 $a + b = 1$ ， $\frac{a^2 + 1}{2ab} - 1$ 的最小值为_____。

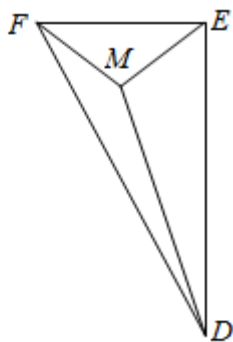
16. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， F_1, F_2 是椭圆 Γ 的左、右焦点， A 为椭圆 Γ 的上顶点，延长 AF_2 交椭圆 Γ 于点 B ，若 $\triangle ABF_1$ 为等腰三角形，则椭圆 Γ 的离心率为_____。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 一张边长为 $2m$ 的正方形薄铝板 $ABCD$ (图甲)，点 E, F 分别在 AB, BC 上，且 $AE = CF = x$ (单位： m)。现将该薄铝板沿 EF 裁开，再将 $\triangle DAE$ 沿 DE 折叠， $\triangle DCF$ 沿 DF 折叠，使 DA, DC 重合，且 A, C 重合于点 M ，制作成一个无盖的三棱锥形容器 $D-MEF$ (图乙)，记该容器的容积为 V (单位： m^3)，(注：薄铝板的厚度忽略不计)



图甲

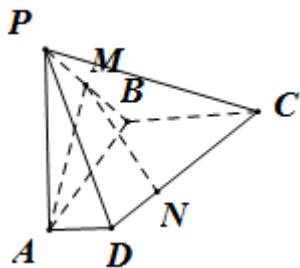


图乙

(1) 若裁开的三角形薄铝板 EFB 恰好是该容器的盖, 求 x , V 的值;

(2) 试确定 x 的值, 使得无盖三棱锥容器 $D-MEF$ 的容积 V 最大.

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 1$, $PA = AB = BC = 2$, M 是棱 PB 的中点.



(1) 求证: $AM \parallel$ 平面 PCD ;

(2) 若 $\angle ABC = 90^\circ$, 点 N 是线段 CD 上一点, 且 $DN = \frac{1}{3}DC$, 求直线 MN 与平面 PCD 所成角的正弦值.

19. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 的各项均为整数, 它们的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $b_1 = 2a_1 = 2$, $b_2 S_3 = 54$, $a_2 + T_2 = 11$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $M_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$;

(3) 是否存在正整数 m , 使得 $\frac{S_m + T_{m+1}}{S_m + T_m}$ 恰好是数列 $\{a_n\}$ 或 $\{b_n\}$ 中的项? 若存在, 求出所有满足条件的 m 的值; 若不存在, 说明理由.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{e^x}$ ($a > 0$) 的导函数 $y = f'(x)$ 的两个零点为 -3 和 0 .

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 的极小值为 $-e^3$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-5, +\infty)$ 上的最大值.

21. (12 分) 在平面直角坐标系中, 以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 已知曲线 C :

$$\rho \sin^2 \theta = 2a \cos \theta (a > 0). \text{过点 } P(-2, -4) \text{ 的直线 } l: \begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \text{ 与曲线 } C \text{ 相交于 } M, N \text{ 两点.}$$

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程;

(2) 若 $\frac{|MN|}{|PM|} = \frac{|PN|}{|MN|}$, 求实数 a 的值.

22. (10 分) 已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n > 0, a_1 = 4, \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} = \frac{2}{a_4}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项的和.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

由 $A \cap B = \{3\}$, 得 $3 \in B$, 代入集合 B 即可得 b .

【详解】

Q $A \cap B = \{3\}$, $\therefore 3 \in B$, $\therefore 9 - 3 + b = 0$, 即: $b = -6$,

故选: A

【点睛】

本题考查了集合交集的含义, 也考查了元素与集合的关系, 属于基础题.

2、B

【解析】

判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，可排除 A、C，再判断函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上函数值与 0 的大小，即可得出答案.

【详解】

解：因为 $f(x) = \left(\frac{2}{1+e^x} - 1\right) \cos x = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) \cos x$,

所以 $f(-x) = \left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) \cos(-x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \cos x = \frac{1-e^x}{1+e^x} \cos x = -f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是奇函数，可排除 A、C；

又当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $f(x) < 0$ ，可排除 D；

故选：B.

【点睛】

本题考查函数表达式判断函数图像，属于中档题.

3、B

【解析】

计算 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，再计算交集得到答案

【详解】

$A = \{x \in N \mid y = \sqrt{4-x}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{x \mid x = 2n, n \in Z\}$ 表示偶数，

故 $A \cap B = \{0, 2, 4\}$.

故选：B.

【点睛】

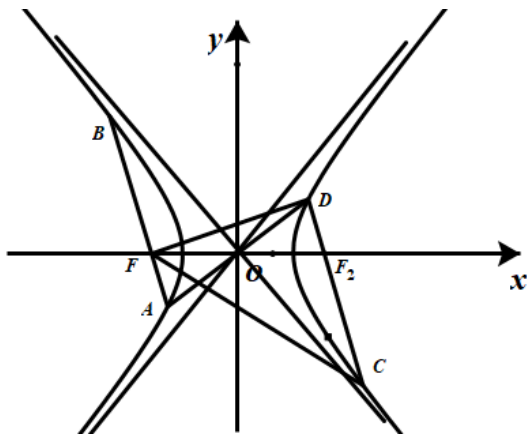
本题考查了集合的交集，意在考查学生的计算能力.

4、D

【解析】

如图，设双曲线的右焦点为 F_2 ，连接 DF_2 并延长交右支于 C ，连接 FC ，设 $DF_2 = x$ ，利用双曲线的几何性质可以得到 $DF = x + 2a$ ， $FC = x + 4a$ ，结合 $Rt\triangle FDC$ 、 $Rt\triangle FDF_2$ 可求离心率.

【详解】



如图，设双曲线的右焦点为 F_2 ，连接 FC ，连接 DF_2 并延长交右支于 C 。

因为 $FO = OF_2$, $AO = OD$ ，故四边形 FAF_2D 为平行四边形，故 $FD \perp DF_2$ 。

又双曲线为中心对称图形，故 $F_2C = BF$ 。

设 $DF_2 = x$ ，则 $DF = x + 2a$ ，故 $F_2C = x + 2a$ ，故 $FC = x + 4a$ 。

因为 $\triangle FDC$ 为直角三角形，故 $(x + 4a)^2 = (2x + 2a)^2 + (x + 2a)^2$ ，解得 $x = a$ 。

在 $Rt\triangle FDF_2$ 中，有 $4c^2 = a^2 + 9a^2$ ，所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查双曲线离心率，注意利用双曲线的对称性（中心对称、轴对称）以及双曲线的定义来构造关于 a, b, c 的方程，

本题属于难题。

5、D

【解析】

由等差数列的性质可知 $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$ ，进而代入等差数列的前 n 项和的公式即可。

【详解】

由题， $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_2 + a_8)}{2} = \frac{9 \times (-2 + 10)}{2} = 36$ 。

故选：D

【点睛】

本题考查等差数列的性质，考查等差数列的前 n 项和。

6、A

【解析】

根据指数型函数所过的定点，确定 $k=1, b=2$ ，再根据条件 $m+n=2$ ，利用基本不等式求 $\frac{4}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值.

【详解】

Q 定点为 $(1, 2)$,

$$\therefore k=1, b=2,$$

$$\therefore m+n=2$$

$$\therefore \frac{4}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m} + \frac{1}{n} \right) (m+n) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \right) \dots \frac{9}{2}$$

当且仅当 $\frac{m}{n} = \frac{4n}{m}$ 时等号成立,

$$\text{即 } m = \frac{4}{3}, n = \frac{2}{3} \text{ 时取得最小值 } \frac{9}{2}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查指数型函数的性质，以及基本不等式求最值，意在考查转化与变形，基本计算能力，属于基础题型.

7、A

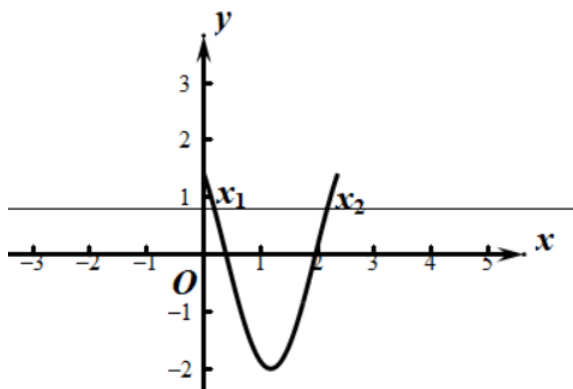
【解析】

画出函数 $y = 2 \sin \left(2x + \frac{3\pi}{4} \right) \left(0 < x < \frac{3\pi}{4} \right)$ 的图像，函数对称轴方程为 $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ，由图可得 x_1 与 x_2 关于 $x = \frac{3\pi}{8}$

对称，即得解.

【详解】

函数 $y = 2 \sin \left(2x + \frac{3\pi}{4} \right) \left(0 < x < \frac{3\pi}{4} \right)$ 的图像如图，



$$\text{对称轴方程为 } 2x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{又} \because 0 < x < \frac{3\pi}{4}, \therefore x = \frac{3\pi}{8},$$

由图可得 x_1 与 x_2 关于 $x = \frac{3\pi}{8}$ 对称,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2 \times \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

故选: A

【点睛】

本题考查了正弦型函数的对称性, 考查了学生综合分析, 数形结合, 数学运算的能力, 属于中档题.

8、A

【解析】

过 M 作 MP 与准线垂直, 垂足为 P , 利用抛物线的定义可得 $\left| \frac{MA}{MF} \right| = \left| \frac{MA}{MP} \right| = \frac{1}{\cos \angle AMP} = \frac{1}{\cos \angle MAF}$, 要使 $\left| \frac{MA}{MF} \right|$

最大, 则 $\angle MAF$ 应最大, 此时 AM 与抛物线 C 相切, 再用判别式或导数计算即可.

【详解】

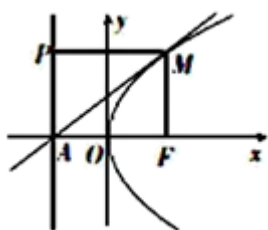
过 M 作 MP 与准线垂直, 垂足为 P , $\left| \frac{MA}{MF} \right| = \left| \frac{MA}{MP} \right| = \frac{1}{\cos \angle AMP} = \frac{1}{\cos \angle MAF}$,

则当 $\left| \frac{MA}{MF} \right|$ 取得最大值时, $\angle MAF$ 最大, 此时 AM 与抛物线 C 相切,

易知此时直线 AM 的斜率存在, 设切线方程为 $y = k(x+1)$,

$$\text{则} \begin{cases} y = k(x+1) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{. 则 } \Delta = 16 - 16k^2 = 0, \quad k^2 = 1, \quad k = \pm 1,$$

则直线 AM 的方程为 $y = \pm (x+1)$.



故选: A.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/598005066065006051>