

新疆阿克苏市沙雅县二中 2023-2024 学年高三下学期数学试题 4 月开学考试卷

注意事项

1. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回.
2. 答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符.
4. 作答选择题, 必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑; 如需改动, 请用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 作答非选择题, 必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答, 在其他位置作答一律无效.
5. 如需作图, 须用 2B 铅笔绘、写清楚, 线条、符号等须加黑、加粗.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_8 = 0$, $a_3 = -3$, 则 $S_9 =$ ()

- A. 9 B. 12 C. -15 D. -18

2. 已知 $f(x) = 1 - 2\cos^2(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$). 给出下列判断:

①若 $f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$, 且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi$, 则 $\omega = 2$;

②存在 $\omega \in (0, 2)$ 使得 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的图象关于 y 轴对称;

③若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恰有 7 个零点, 则 ω 的取值范围为 $[\frac{41}{24}, \frac{47}{24})$;

④若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围为 $(0, \frac{2}{3}]$.

其中, 判断正确的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 设集合 A 、 B 是全集 U 的两个子集, 则“ $A \subseteq B$ ”是“ $A \cap \complement_U B = \emptyset$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = \begin{cases} 2 & n \leq 5 \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} - 1, n \geq 6 \end{cases}$ ($n \in N^*$) 若正整数 k ($k \geq 5$) 使得 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 = a_1 a_2 \dots a_k$ 成

立, 则 $k =$ ()

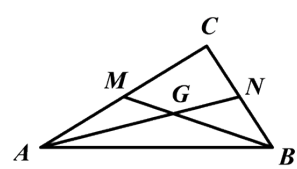
- A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

5. 下列函数中, 图象关于 y 轴对称的为 ()

- A. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ B. $f(x) = \sqrt{7 + 2x} + \sqrt{7 - 2x}$, $x \in [-1, 2]$

C. $f(x) = \sin 8x$
D. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M ， N 分别为 CA ， CB 的中点，若 $AB = \sqrt{5}$ ， $CB = 1$ ，且满足 $3\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2$ ，则 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}$ 等于（ ）



- A. 2
B. $\sqrt{5}$
C. $\frac{2}{3}$
D. $\frac{8}{3}$

7. 为实现国民经济新“三步走”的发展战略目标，国家加大了扶贫攻坚的力度．某地区在 2015 年以前的年均脱贫率（脱离贫困的户数占当年贫困户总数的比）为 70%．2015 年开始，全面实施“精准扶贫”政策后，扶贫效果明显提高，其中 2019 年度实施的扶贫项目，各项目参加户数占比（参加该项目户数占 2019 年贫困户总数的比）及该项目的脱贫率见下表：

实施项目	种植业	养殖业	工厂就业	服务业
参加用户比	40%	40%	10%	10%
脱贫率	95%	95%	90%	90%

那么 2019 年的年脱贫率是实施“精准扶贫”政策前的年均脱贫率的（ ）

- A. $\frac{27}{28}$ 倍
B. $\frac{47}{35}$ 倍
C. $\frac{48}{35}$ 倍
D. $\frac{7}{5}$ 倍

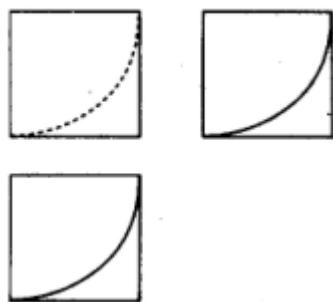
8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $3a_5 = 2a_7$ ，则此数列中一定为 0 的是（ ）

- A. a_1
B. a_3
C. a_8
D. a_{10}

9. 设 $A(2,-1)$ ， $B(4,1)$ ，则以线段 AB 为直径的圆的方程是（ ）

- A. $(x-3)^2 + y^2 = 2$
B. $(x-3)^2 + y^2 = 8$
- C. $(x+3)^2 + y^2 = 2$
D. $(x+3)^2 + y^2 = 8$

10. 一个几何体的三视图如图所示，正视图、侧视图和俯视图都是由一个边长为 a 的正方形及正方形内一段圆弧组成，则这个几何体的表面积是（ ）



- A. $\left(3 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$ B. $\left(6 - \frac{\pi}{2}\right)a^2$ C. $\left(6 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$ D. $\left(6 - \frac{3\pi}{4}\right)a^2$

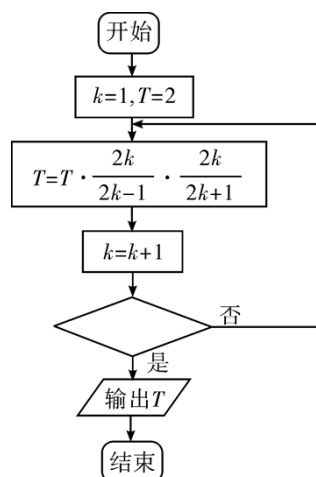
11. 根据散点图，对两个具有非线性关系的相关变量 x, y 进行回归分析，设 $u = \ln y$, $v = (x-4)^2$ ，利用最小二乘法，得到线性回归方程为 $\hat{u} = -0.5v + 2$ ，则变量 y 的最大值的估计值是（ ）

- A. e B. e^2 C. $\ln 2$ D. $2\ln 2$

12. 历史上有不少数学家都对圆周率作过研究，第一个用科学方法寻求圆周率数值的人是阿基米德，他用圆内接和外切正多边形的周长确定圆周长的上下界，开创了圆周率计算的几何方法，而中国数学家刘徽只用圆内接正多边形就求得 π 的近似值，他的方法被后人称为割圆术。近代无穷乘积式、无穷连分数、无穷级数等各种 π 值的表达式纷纷出现，

使得 π 值的计算精度也迅速增加。华理斯在 1655 年求出一个公式： $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \dots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots}$ ，根据该公式绘制出了

估计圆周率 π 的近似值的程序框图，如下图所示，执行该程序框图，已知输出的 $T > 2.8$ ，若判断框内填入的条件为 $k \geq m?$ ，则正整数 m 的最小值是



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

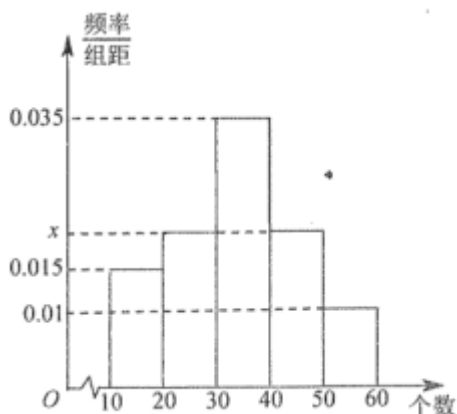
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， S 为 $\triangle ABC$ 的面积，若 $c = 2a \cos B$ ， $S = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}c^2$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状为_____， C 的大小为_____。

14. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是互相垂直的单位向量，若 $\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 的夹角为 60° ，则实数 λ 的值是_____。

15. 某校初三年级共有 500 名女生，为了了解初三女生 1 分钟“仰卧起坐”项目训练情况，统计了所有女生 1

分钟“仰卧起坐”测试数据（单位：个），并绘制了如下频率分布直方图，则1分钟至少能做到30个仰卧起坐的初三女生有_____个。



16. 在 $(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})^8$ 的展开式中， x 的系数等于__.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 过点 $(m, 2\sqrt{m}) (m > 0)$.

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) F 是抛物线 C 的焦点，过焦点的直线与抛物线交于 A, B 两点，若 $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FA}$ ，求 $|AB|$ 的值.

18. (12 分) 已知 $f(x) = x^2 + 2|x - 1|$.

(1) 解关于 x 的不等式： $f(x) > \frac{|2x|}{x}$;

(2) 若 $f(x)$ 的最小值为 M ，且 $a + b + c = M (a, b, c \in \mathbb{R}^+)$ ，求证： $\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{a^2 + c^2}{b} + \frac{c^2 + b^2}{a} \geq 2$.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\sqrt{3}a \sin C = c \cos A$.

(I) 求角 A 的大小；

(II) 若 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$ ， $b + c = 2 + 2\sqrt{3}$ ，求 a 的值.

20. (12 分) 某单位准备购买三台设备，型号分别为 A, B, C 已知这三台设备均使用同一种易耗品，提供设备的商家规定：可以在购买设备的同时购买该易耗品，每件易耗品的价格为 100 元，也可以在设备使用过程中，随时单独购买易耗品，每件易耗品的价格为 200 元.为了决策在购买设备时应购买的易耗品的件数.该单位调查了这三种型号的设备各 60 台，调查每台设备在一个月中使用的易耗品的件数，并得到统计表如下所示.

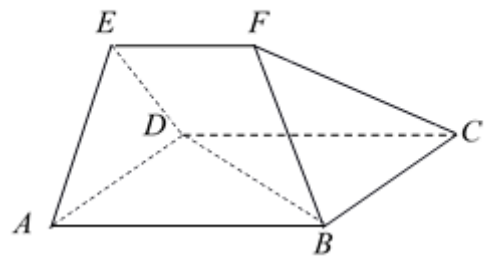
每台设备一个月中使用的易耗品的件数	6	7	8
-------------------	---	---	---

频数	型号 A	30	30	0
	型号 B	20	30	10
	型号 C	0	45	15

将调查的每种型号的设备的频率视为概率，各台设备在易耗品的使用上相互独立.

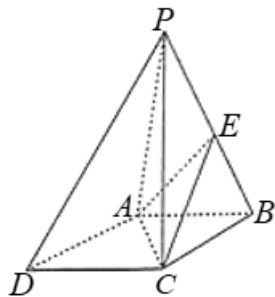
- (1) 求该单位一个月中 A, B, C 三台设备使用的易耗品总数超过 21 件的概率；
- (2) 以该单位一个月购买易耗品所需总费用的期望值为决策依据，该单位在购买设备时应同时购买 20 件还是 21 件易耗品？

21. (12 分) 在以 $ABCDEF$ 为顶点的五面体中，底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB = AE = ED = 2EF$ ， $EF \parallel AB$ ，二面角 $E - AD - B$ 为直二面角.



- (I) 证明： $BD \perp FC$ ；
- (II) 求二面角 $A - CF - B$ 的余弦值.

22. (10 分) 在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $PA = 2$ ， $PB = PC = PD$ ， E 是 PB 的中点.



- (1) 证明： $PD \parallel$ 平面 AEC ；
- (2) 设 F 是线段 DC 上的动点，当点 E 到平面 PAF 距离最大时，求三棱锥 $P - AFE$ 的体积.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

由 $S_8 = 0$ ， $a_3 = -3$ 可得 a_1, d 以及 a_9 ，而 $S_9 = S_8 + a_9$ ，代入即可得到答案。

【详解】

$$\text{设公差为 } d, \text{ 则 } \begin{cases} a_1 + 2d = -3, \\ 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2}d = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = -7, \\ d = 2, \end{cases}$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 9, \text{ 所以 } S_9 = S_8 + a_9 = 9.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查等差数列基本量的计算，考查学生运算求解能力，是一道基础题。

2、B

【解析】

对函数 $f(x)$ 化简可得 $f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6})$ ，进而结合三角函数的最值、周期性、单调性、零点、对称性及平移变换，

对四个命题逐个分析，可选出答案。

【详解】

$$\text{因为 } f(x) = 1 - 2\cos^2(\omega x + \frac{\pi}{3}) = -\cos(2\omega x + \frac{2\pi}{3}) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}), \text{ 所以周期 } T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}.$$

对于①，因为 $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi = \frac{1}{2}T$ ，所以 $T = 2\pi = \frac{\pi}{\omega}$ ，即 $\omega = \frac{1}{2}$ ，故①错误；

对于②，函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数为 $y = \sin(2\omega x - \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$ ，其图象关于 y 轴对称，则

$$-\frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 解得 } \omega = -1 - 3k (k \in \mathbf{Z}), \text{ 故对任意整数 } k, \omega \notin (0, 2), \text{ 所以②错误；}$$

$$\text{对于③，令 } f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}) = 0, \text{ 可得 } 2\omega x + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 则 } x = \frac{k\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega},$$

因为 $f(0) = \sin \frac{\pi}{6} > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上第 1 个零点 $x_1 > 0$ ，且 $x_1 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega}$ ，所以第 7 个零点

$x_7 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + 3T = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + \frac{3\pi}{\omega} = \frac{41\pi}{12\omega}$ ，若存在第 8 个零点 x_8 ，则

$$x_8 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + \frac{7}{2}T = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{12\omega} + \frac{7\pi}{2\omega} = \frac{47\pi}{12\omega},$$

所以 $x_7 \leq 2\pi < x_8$, 即 $\frac{41\pi}{12\omega} \leq 2\pi < \frac{47\pi}{12\omega}$, 解得 $\frac{41}{24} \leq \omega < \frac{47}{24}$, 故③正确;

对于④, 因为 $f(0) = \sin \frac{\pi}{6}$, 且 $0 \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以 $\begin{cases} 2\omega \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} \\ 2\omega \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\omega \leq \frac{2}{3}$, 又 $\omega > 0$, 所以

$0 < \omega \leq \frac{2}{3}$, 故④正确.

故选: B.

【点睛】

本题考查三角函数的恒等变换, 考查三角函数的平移变换、最值、周期性、单调性、零点、对称性, 考查学生的计算求解能力与推理能力, 属于中档题.

3、C

【解析】

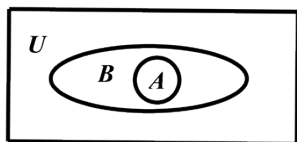
作出韦恩图, 数形结合, 即可得出结论.

【详解】

如图所示, $A \subseteq B \Rightarrow A \cap \complement B = \emptyset$,

同时 $A \cap \complement B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$.

故选: C.



【点睛】

本题考查集合关系及充要条件, 注意数形结合方法的应用, 属于基础题.

4、B

【解析】

计算 $a_6^2 + a_7^2 + \dots + a_n^2 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$, 故 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 = a_{k+1} + k - 16 = a_{k+1} + 1$, 解得答案.

【详解】

当 $n \geq 6$ 时, $a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n - 1 = (a_n + 1)a_n - 1$, 即 $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$, 且 $a_6 = 31$.

故 $a_6^2 + a_7^2 + \dots + a_n^2 = (a_7 - a_6) + (a_8 - a_7) + \dots + (a_{n+1} - a_n) + n - 5 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$,

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 = a_{k+1} + k - 16 = a_{k+1} + 1, \text{ 故 } k = 17.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了数列的相关计算，意在考查学生的计算能力和对于数列公式方法的综合应用.

5、D

【解析】

图象关于 y 轴对称的函数为偶函数,用偶函数的定义及性质对选项进行判断可解.

【详解】

图象关于 y 轴对称的函数为偶函数;

$$A \text{ 中, } x \in \mathbf{R}, f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} = -f(x), \text{ 故 } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ 为奇函数;}$$

$$B \text{ 中, } f(x) = \sqrt{7+2x} + \sqrt{7-2x} \text{ 的定义域为 } [-1, 2],$$

不关于原点对称, 故为非奇非偶函数;

$$C \text{ 中, 由正弦函数性质可知, } f(x) = \sin 8x \text{ 为奇函数;}$$

$$D \text{ 中, } x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0, f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{(-x)^2} = f(x), \text{ 故 } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} \text{ 为偶函数.}$$

故选：D.

【点睛】

本题考查判断函数奇偶性. 判断函数奇偶性的两种方法:

(1)定义法: 对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x 都有 $f(x) = -f(-x)$, 则函数 $f(x)$ 是奇函数; 都有 $f(x) = f(-x)$, 则函数 $f(x)$ 是偶函数

(2)图象法: 函数是奇(偶)函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于原点(y 轴)对称.

6、D

【解析】

选取 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 为基底, 其他向量都用基底表示后进行运算.

【详解】

由题意 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$3\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{MB} = 3 \times \frac{2}{3} \overrightarrow{AN} \cdot (-\overrightarrow{BM}) = -2(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$$

$$= \overline{BA}^2 - \frac{1}{2} \overline{BC}^2 + \frac{1}{2} \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \overline{BA} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = (\overline{BA} - \overline{BC})^2 + 1 = \overline{BA}^2 - 2\overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}^2 + 1 = 5 - 2\overline{BA} \cdot \overline{BC} + 1 + 1,$$

$$\therefore \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 7 - 2\overline{BA} \cdot \overline{BC}, \quad \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 1,$$

$$\therefore \overline{AG} \cdot \overline{AC} = \frac{2}{3} \overline{AN} \cdot \overline{AC} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overline{BC} - \overline{BA} \right) \cdot (\overline{BC} - \overline{BA}) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overline{BC}^2 - \frac{3}{2} \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{BA}^2 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 5 \right) = \frac{8}{3},$$

故选：D.

【点睛】

本题考查向量的数量积，解题关键是选取两个不共线向量作为基底，其他向量都用基底表示参与运算，这样做目标明确，易于操作.

7、B

【解析】

设贫困户总数为 a ，利用表中数据可得脱贫率 $P = 2 \times 40\% \times 95\% + 2 \times 10\% \times 90\%$ ，进而可求解.

【详解】

$$\text{设贫困户总数为 } a, \text{ 脱贫率 } P = \frac{2 \times 40\% \times 95\% a + 2 \times 10\% \times 90\% a}{a} = 94\%,$$

$$\text{所以 } \frac{94\%}{70\%} = \frac{47}{35}.$$

故 2019 年的年脱贫率是实施“精准扶贫”政策前的年均脱贫率的 $\frac{47}{35}$ 倍.

故选：B

【点睛】

本题考查了概率与统计，考查了学生的数据处理能力，属于基础题.

8、A

【解析】

将已知条件转化为 a_1, d 的形式，由此确定数列为 0 的项.

【详解】

由于等差数列 $\{a_n\}$ 中 $3a_5 = 2a_7$ ，所以 $3(a_1 + 4d) = 2(a_1 + 6d)$ ，化简得 $a_1 = 0$ ，所以 a_1 为 0.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查等差数列的基本量计算，属于基础题.

9、A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/598005135134007003>