广东省珠海一中 2023-2024 高三数学

大湾区预测卷四答案解析

数学（新高考 I 卷）

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

注意事项：

1．本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．写在本试卷上无效．

3．回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

4．测试范围：高考全部内容

5．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第 I 卷（选择题）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1．已知集合 $M=\{x\in \mathrm{N}|\log_2 x\le 2\}$， $N=\{x\in \mathrm{R}||x-1|<3\}$，则 $M\cup N=$（　）

A．$\{x|-2<x\le 4\}$　B．$\{x|-2<x<4\}$　C．$\{-1,0,1,2,3,4\}$　D．$\{1,2,3,4\}$

【答案】A

【分析】化简集合 M,N，利用集合并集的定义求解即可.

【详解】由题意可知 $M=\{x\in \mathrm{N}|\log_2 x\le 2\}=\{1,2,3,4\}$，

$N=\{x\in \mathrm{R}||x-1|<3\}=\{x|-2<x<4\}$，

所以 $M\cup N=\{x|-2<x\le 4\}$，

故选：A

2．已知复数 $z=(1+a\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$（$a\in \mathrm{R},\mathrm{i}$ 为虚数单位）的虚部为 3，则 $a=$（　）

A．-5　B．-1　C．1　D．5

【答案】C

【分析】利用复数的四则运算，结合复数的概念即可得解.

【详解】因为 $z=(1+a\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=1-2a+(a+2)\mathrm{i}$，

又z的虚部为3，则$a+2=3$，故$a=1$.

故选：C.

3．设向量$\vec{a}=(1,2,2),\vec{b}=(0,1,2)$，则向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$方向上的投影向量为（　　）

A．$(0,\frac{6}{5},\frac{12}{5})$　　B．（$(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

C．$(0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$　　D．$(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$

【答案】D

【分析】根据向量的数量积的运算公式和向量的投影向量的计算方法，即可求解.

【详解】由向量$\vec{a}=(1,2,2),\vec{b}=(0,1,2)$，

则向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$方向上的投影向量为$|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$.

故选：D.

4．在$[0,2\pi]$内函数$f(x)=\sqrt{1-2\cos x}+\ln\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$的定义域是（　）

A．$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$　　B．$\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$　　C．$\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{3}\right]$　　D．$\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$

【答案】B

【分析】根据函数$f(x)$的解析式有意义，列出不等式组，即可求解.

【详解】由函数$f(x)=\sqrt{1-2\cos x}+\ln\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，其中有意义，

则满足$\begin{cases}1-2\cos x\geq 0\\ \sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0\end{cases}$，其中$x\in[0,2\pi]$，即$\begin{cases}\cos x\leq\frac{1}{2}\\ \sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，其中$x\in[0,2\pi]$，

解得$\frac{\pi}{3}\leq x<\frac{3\pi}{4}$，即函数$f(x)$的定义域为$\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$.

故选：B.

5．南非在2021年11月9日检测出首例新冠病毒变异毒株“奥密克戎”，短短一周时间，从11月10日新增感染300人到11月16日新增感染1万人，若新增感染人数y与时间（第x天）可以表示为函数$y=k\cdot a^x$（k,a为正实数），则第四天新增感染人数约为（　）（参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.4,\sqrt{3}\approx 1.7$）

A．5485　　B．4018　　C．2143　　D．1765

【答案】D

【分析】代入数据计算$a^6=\dfrac{100}{3}$，得到$k\cdot a^4=k\cdot a\cdot a^3=\dfrac{3000}{\sqrt{3}}$，计算得到答案.

【详解】$y=k\cdot a^x$，则$300=k\cdot a$，$10000=k\cdot a^7$，解得$a^6=\dfrac{100}{3}$，

第四天新增感染人数约为$k\cdot a^4=k\cdot a\cdot a^3=300\times\sqrt{\dfrac{100}{3}}=\dfrac{3000}{\sqrt{3}}\approx 1765$.

故选：D

6．已知公比不为 1 的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, m, r, t\in\mathbf{N}^*$，记$p$：$S_m, S_r, S_t$为等差数列；$q$：对任意自然数$k, a_{m+k}, a_{r+k}, a_{t+k}$为等差数列，则$p$是$q$的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

【答案】C

【分析】根据条件得出命题p, q均等价于$2q^r=q^m+q^t$，再根据充分条件和必要条件的判断方法，即可得出结果.

【详解】因为命题$p: S_m, S_r, S_t$成等差数列，所以$2S_r=S_m+S_t$，又数列$\{a_n\}$为等比数列，且公比不为 1，

所以$2\times\dfrac{a_1(1-q^r)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^m)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^t)}{1-q}$，整理得到$2q^r=q^m+q^t$，

又命题$q: a_{m+k}, a_{r+k}, a_{t+k}$成等差数列，所以$2a_{r+k}=a_{m+k}+a_{t+k}$，即$2a_1q^{r+k}=a_1q^{m+k}+a_1q^{t+k}$，

整理得到$2q^r=q^m+q^t$，

所以p是q的充要条件，

故选：C.

7．已知A，B是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$与双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$的公共顶点，$P$是双曲线在第一象限上的一点，直线$PA$，$PB$交椭圆于点$M, N$. 若直线$MN$过椭圆的右焦点$F$，则$\triangle MAB$的面积为（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】C

【分析】根据几何关系可知直线PA与直线MA斜率相等，直线PB与直线BN斜率相等，由此可找出直线MA，NB的几何关系，由此得出点M，N的坐标，代入三角形的面积公式即可求出答案.

【详解】设点$P(x_0, y_0)$，则直线PA，PB斜率分别为$k_{PA}=\dfrac{y_0}{x_0+2}$，$k_{PB}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$，

又因$\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{3}=1$，可得$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{3}{4}$，

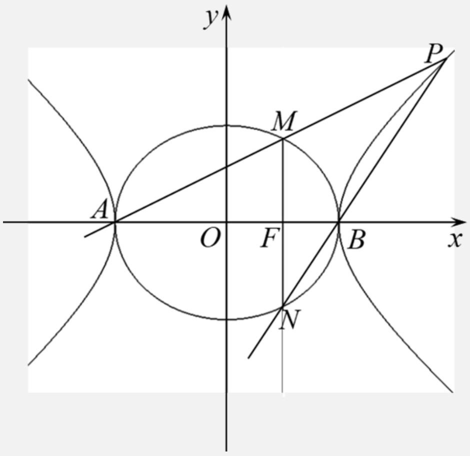
再设点$M\left(x_1,y_1\right)$，则直线MA，MB斜率分别为$k_{MA}=\frac{y_1}{x_1+2}$，$k_{MB}=\frac{y_1}{x_1-2}$，

又因$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，可得$k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=-\frac{3}{4}$，

因为$k_{PA}=k_{MA}$，所以$k_{PB}=k_{NB}=-k_{MB}$，即直线MB，NB关于x轴对称，

又因直线MN过椭圆的右焦点F，即$M\left(1,y_1\right)$，代入椭圆方程得$y_1=\pm\frac{3}{2}$，

$S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|y_1|=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3$.



故选：C

8．在三棱锥$V-ABC$中，$BV\perp$平面VAC，$VA=1$，$AB=AC=\sqrt{2}$，$\angle VAC=\frac{\pi}{4}$，点F为棱AV上一点，过点F作三棱锥$V-ABC$的截面，使截面平行于直线VB和AC，当该截面面积取得最大值时，$CF=$（　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{17}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{13}}{3}$

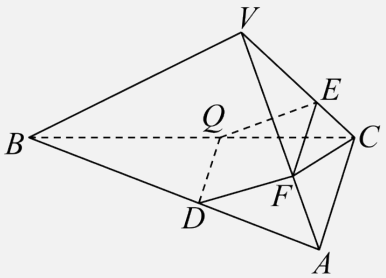
【答案】A

【分析】通过作平行线作出题中的截面，并结合线面平行以及线面垂直说明其为矩形，利用三角形相似表示出矩形的两边长，并求得其面积表达式，结合二次函数性质确定截面面积取得最大值时参数的值，解直角三角形即可求得答案.

【详解】根据题意，在平面VAC内，过点F作$EF\parallel AC$，交VC于点E；

在平面VBC内，过点E作$EQ\parallel VB$，交BC于点Q；

在平面VAB内，过点F作$FD\parallel VB$，交AB于点D，连接DQ，如图所示，



因为 $EF\parallel AC$，则 $\triangle VCA\backsim\triangle VEF$，设其相似比为 k，即 $\frac{VF}{VA}=\frac{VE}{VC}=\frac{EF}{AC}=k$，

则 $EF=\sqrt{2}k$；

又因为 $VA=1$，$AC=\sqrt{2}$，$\cos\angle VAC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由余弦定理得，$VC=\sqrt{1+2-2\times1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$，则 $VC^2+VA^2=AC^2$，

即 $VC\perp VA$.

又 $BV\perp$ 平面 VAC，VC，$VA\subset$ 平面 VAC，所以 $BV\perp VC$，$BV\perp VA$.

又 $AB=\sqrt{2}$，则 $BV=1$，$BC=\sqrt{2}$.

因为 $FD\parallel VB$，则 $\triangle AFD:\triangle AVB$，则 $\frac{AF}{AV}=\frac{AD}{AB}=\frac{FD}{VB}$，

因为 $\frac{AF}{VA}=\frac{VA-VF}{VA}=1-k$，所以 $\frac{FD}{VB}=\frac{AF}{VA}=1-k$，即 $FD=1-k$，

同理可得 $QE=1-k$，即 $QE=FD$，

因为 $EQ\parallel VB$，$FD\parallel VB$，则 $EQ\parallel FD$，

故四边形 $EFDQ$ 为平行四边形；而 $EQ\subset$ 平面 $EFDQ$，$VB\not\subset$ 平面 $EFDQ$，

故 $VB\parallel$ 平面 $EFDQ$，同理 $AC//$ 平面 $EFDQ$，

即四边形 $EFDQ$ 为截面图形；

又 $BV\perp$ 平面 VAC，$EF\subset$ 平面 VAC，则 $BV\perp EF$，

又 $FD\parallel VB$，所以 $FD\perp EF$.

故平行四边形 $EFDQ$ 为矩形，则 $S_{矩形EFDQ}=EF\cdot FD=\sqrt{2}k\cdot(1-k)=-\sqrt{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以当 $k=\frac{1}{2}$ 时，$S_{矩形EFDQ}$ 有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，则 $VF=kVA=\frac{1}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle CVF$ 中，$CF=\sqrt{CV^2+VF^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选：A.

【点睛】思路点睛：先作平行线作出题中的截面，再证明四边形 $EFDQ$ 为符合题意的截面图形，结合线面平行以及线面垂直说明四边形 $EFDQ$ 为矩形，利用三角形相似表示出矩形的两边长，并求得其面积表达式，利用二次函数求出最值得解.

二、多选题

9．设A，B是一个随机试验中的两个事件，则下列说法正确的是（　）

A．如果事件A与事件B互斥，那么$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

B．如果事件A与事件B互斥，那么$P(A)+P(B)=1$

C．如果事件A与事件B对立，那么$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

D．如果事件A与事件B对立，那么$P(A)+P(B)=1$

【答案】ACD

【分析】根据给定条件，利用对立事件、互斥事件的概率公式逐项判断即得.

【详解】对于A，事件A与事件B互斥，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，A正确；

对于B，事件A与事件B互斥，事件$A\cup B$不一定是必然事件，即$P(A)+P(B)$不一定为1，B错误；

对于C，事件A与事件B对立，则事件A与事件B互斥，有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，C正确；

对于D，事件A与事件B对立，事件$A\cup B$是必然事件，则$P(A)+P(B)=1$，D正确.

故选：ACD

10．科学研究已经证实：人的智力、情绪和体力分别以33天、28天和23天为周期，均可按$y=\sin\omega x(\omega>0)$进行变化.记智力曲线为I，情绪曲线为E，体力曲线为P，则（　）

A．第35天时情绪曲线E处于最高点

B．第322天时，情绪曲线E与体力曲线P都处于上升期

C．第46天到第50天时，体力曲线P处于上升期

D．情绪曲线E与体力曲线P都关于$(322,0)$对称

【答案】ACD

【分析】设人的智力曲线、情绪曲线和体力曲线的解析式分别用$f(x)=\sin\omega_1 x, g(x)=\sin\omega_2 x, h(x)=\sin\omega_3 x$表示，根据周期求出对应的解析式，然后利用正弦函数的最值、周期性、单调性及对称性可判断各选项.

【详解】设人的智力曲线、情绪曲线和体力曲线的解析式分别用

$f(x)=\sin\omega_1 x, g(x)=\sin\omega_2 x, h(x)=\sin\omega_3 x$表示，

所以 $\omega_1=\frac{2\pi}{33},\omega_2=\frac{2\pi}{28}=\frac{\pi}{14},\omega_3=\frac{2\pi}{23}$，

A 项：第 35 天时，$g(35)=\sin\frac{\pi}{14}\times 35=\sin\frac{5\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1$，故$E$处于最高点，故 A 正确；

B 项：322 除以 28 余 14，322 除以 23 余 0，此时情绪曲线E处于$\frac{1}{2}$周期处，所以出于下降期，体力曲线P刚好位于起点处，处于上升期，故 B 错误；

C 项：因为$x\in(46,50)$，所以$\frac{2\pi}{23}x\in\left(4\pi,\frac{100\pi}{23}\right)$，

因为$\frac{100\pi}{23}<\frac{9\pi}{2}$，所以根据正弦函数的性质可得此时$h(x)=\sin\frac{2\pi}{23}x$单调递增，故处于上升期，故 C 正确；

D 项：因为$g(322)=\sin\left(\frac{\pi}{14}\times 322\right)=\sin 23\pi=0$，$h(322)=\sin\left(\frac{2\pi}{23}\times 322\right)=\sin 28\pi=0$，

所以情绪曲线E与体力曲线P都关于$(322,0)$对称，故 D 正确.

故选：ACD.

11．随着我国航天科技的快速发展，双曲线镜的特性使得它在天文观测中具有重要作用，双曲线的光学性质是：从双曲线的一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点．由此可得，过双曲线上任意一点的切线平分该点与两焦点连线的夹角．已知F_1，F_2分别为双曲线C：$x^2-\frac{y^2}{4}=1$的左，右焦点，过C右支上一点$A(x_0,y_0)(x_0>1)$作直线l交x轴于$M\left(\frac{1}{x_0},0\right)$，交$y$轴于点$N$，则下列说法中正确的有（　）

A．C的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$

B．过点F_1作$F_1H\perp AM$，垂足为H，则$|OH|=1$

C．点N的坐标为$\left(0,\frac{4}{y_0}\right)$

D．四边形AF_1NF_2面积的最小值为$4\sqrt{5}$

【答案】BD

【分析】根据方程，可直接求出渐近线方程，即可判断 A 项；由已知可得$-x_0^2y_N+4y_N=4y_0$，进而结合双曲线方程，即可得出点N的坐标，即可判断 B 项；根据双曲线的光学性质可推得点H为F_1E的中点.进而得出$|OH|=\frac{1}{2}|F_2E|$，结合双曲线的定义，即可判断 C 项；由$S_{AF_1NF_2}=S_{\vee AF_1F_2}+S_{\vee NF_1F_2}$

，代入利用基本不等式即可求出面积的最小值，可判断 D 项.

【详解】对于 A：由已知可得 $a=1$，$b=2$，焦点在 x 轴上，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，故 A 错误；

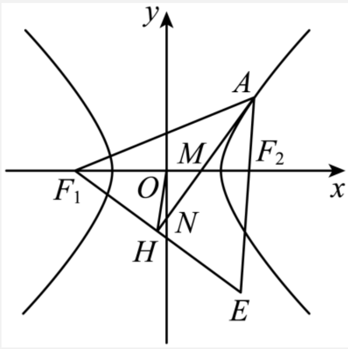
对于 B：因为点 $A\left(x_0, y_0\right)$ 在 $C: x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，所以 $x_0^2-1=\dfrac{y_0^2}{4}$，

又 AM 的直线方程为 $y-0=\dfrac{y_0}{x_0-\dfrac{1}{x_0}}\left(x-\dfrac{1}{x_0}\right)$，

所以 $\dfrac{{x_0}^2-1}{y_0}\cdot y=x_0x-1, \therefore \dfrac{\dfrac{{y_0}^2}{4}}{y_0}\cdot y=x_0x-1, \therefore x_0x-\dfrac{y_0y}{4}=1$，

$\therefore AM$ 为双曲线的切线，由双曲线的光学性质可知，AM 平分 $\angle F_1AF_2$，

如图：



延长 F_1H 与 AF_2 的延长线相交于点 E，又 $F_1H \perp AM$ 可得 AH 是 F_1E 的垂直平分线，

所以 $AF_1=AE$，H 是 F_1E 的中点，又 O 是 F_1F_2 的中点，

于是在 $\triangle EF_1F_2$ 中，$|OH|=\dfrac{1}{2}\left|F_2E\right|=\dfrac{1}{2}\left(|AE|-\left|AF_2\right|\right)=\dfrac{1}{2}\left(\left|AF_1\right|-\left|AF_2\right|\right)=a=1$，即 $|OH|=1$，

故 B 正确；

对于 C：设 $N\left(0, y_N\right)$，则 $\dfrac{y_0-0}{x_0-\dfrac{1}{x_0}}=\dfrac{0-y_N}{\dfrac{1}{x_0}-0}$，整理可得 $\left(1-x_0^2\right)y_N=y_0$.

又 $x_0^2-\dfrac{y_0^2}{4}=1$，即 $1-x_0^2=-\dfrac{y_0^2}{4}$，所以有 $y_N=\dfrac{y_0}{1-x_0^2}=-\dfrac{4}{y_0}$，

所以 N 点的坐标为 $\left(0,-\dfrac{4}{y_0}\right)$，故 C 项错误；

对于 D：由 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 得 $c=\sqrt{1+4}=5$，$\left|F_1F_2\right|=2\sqrt{5}$，

又 $S_{AF_1NF_2}=S_{\triangle AF_1F_2}+S_{\triangle NF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times\left|F_1F_2\right|\left(\left|y_0\right|+\dfrac{4}{\left|y_0\right|}\right) \geq \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{\left|y_0\right|\cdot\dfrac{4}{\left|y_0\right|}}=4\sqrt{5}$，

当且仅当 $\left|y_0\right|=\dfrac{4}{\left|y_0\right|}$，即 $y_0=\pm 2$ 时，等号成立.

所以，四边形AF_1NF_2面积的最小值为$4\sqrt{5}$，故 D 正确.

故选：BD.

【点睛】解答本题的关键是利用光学性质得点H为F_1E的中点，结合双曲线的定义求解$|OH|$，注意平面几何的特性是解决此类问题的捷径.

12．已知方程$ax-2x\ln x=x^2+3$（$a\in\mathbf{R}$）有两个不同的根x_1，x_2，若$x_1<x_2$，则（　）

A．$a\in(4,+\infty)$　　B．$x_1<1<x_2$

C．$\ln x_1+\ln x_2-1>\ln 2$　　D．$x_1x_2>1$

【答案】ABD

【分析】构造函数$f(x)=x+\dfrac{3}{x}+2\ln x-a$，得到其单调性即可判断 A，构造$g(x)=f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$即可判断 BCD.

【详解】方程$ax-2x\ln x=x^2+3$（$a\in\mathbf{R}$）等价于方程$x+\dfrac{3}{x}+2\ln x-a=0$，

构造函数$f(x)=x+\dfrac{3}{x}+2\ln x-a$，则$f'(x)=1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x^2}$，

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

则$f(x)_{\min}=f(1)=4-a$，因此需满足$f(1)<0$，即$a>4$.

当$a>4$时，$f(2a)=2a+\dfrac{3}{2a}+2\ln(2a)-a=a+\dfrac{3}{2a}+2\ln(2a)>0$，

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}+3a-2\ln a-a=\dfrac{1}{a}+2(a-\ln a)>\dfrac{1}{a}>0$，

由以上可知，当$a>4$时，$f(x)$分别在$\left(\dfrac{1}{a},1\right)$，$(1,2a)$上各有一个零点，因此选项 A 正确，

构造函数$g(x)=f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x}-2x+4\ln x$（$x>0$），则$g'(x)=\dfrac{-2(x-1)^2}{x^2}\le 0$，

因此$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，易知$g(1)=0$，由 A 易知$0<x_1<1<x_2$，则$g(x_2)<0$，

即$f(x_2)<f\left(\dfrac{1}{x_2}\right)$成立，又$f(x_1)=f(x_2)=0$，则$f(x_1)<f\left(\dfrac{1}{x_2}\right)$，因此$x_1>\dfrac{1}{x_2}$，即$x_1x_2>1$，

因此选项 B，D 正确；